

(2, 1) ケーブル結び目の零番係数多項式 (The zeroth coefficient polynomial of a (2, 1)-cable knot)

滝岡英雄

大阪市立大学大学院理学研究科数物系専攻前期博士課程 2 年

Abstract

本稿では, (2, 1) ケーブル結び目の零番係数多項式の計算を紹介する. 特に HOMFLYPT 多項式では区別することのできない金信結び目に対して, その (2, 1) ケーブル結び目の零番係数多項式を計算することで, すべて区別できることを示す. さらに, 金信結び目のブレイド指数について考察する.

1 零番係数多項式

HOMFLYPT 多項式 $P(L) = P(L; y, z)$ は, Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, Yetter, Przytycki, Traczyk によって発見された絡み目 L の 2 変数 y, z の多項式不変量で, 次のスケイン関係式が成り立つ:

$$(i) P(\bigcirc) = 1. \quad (ii) yP(\text{crossing}) + y^{-1}P(\text{crossing}) = zP(\text{link})$$

さらに, L が r 成分の絡み目の場合, 次のように表せる:

$$P(L; y, z) = (yz)^{-r+1} \sum_{n \geq 0} c_n(L; -y^2) z^{2n}.$$

ここで, $c_n(L; -y^2)$ は, 変数 $-y^2$ のローラン多項式である. このとき, ローラン多項式 $c_n(L) = c_n(L; x)$ ($x := -y^2$) のことを n 番係数多項式と呼ぶ. ($c_{-1}(L) := 0$) この n 番係数多項式に関しては, 河内明夫氏により次のスケイン関係式が与えられている [1]:

$$(i) c_n(\bigcirc) = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ 0 & (n \neq 0). \end{cases} \quad (ii) -xc_n(\text{crossing}) + c_n(\text{crossing}) = (-x)^{\delta(p)} c_{n-\delta(p)}(\text{link}).$$

ここで, $\delta(p)$ は次のように定義されている:

$$\delta(p) := \begin{cases} 0 & (p \text{ が自己交差}), \\ 1 & (p \text{ が自己交差でない}). \end{cases}$$

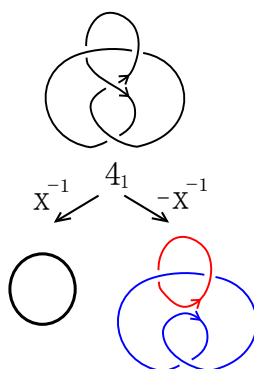
特に, 零番係数多項式に関しては, 次の命題が成り立つ.

命題 1.1. L を r 成分の絡み目, K_i ($1 \leq i \leq r$) を L の結び目成分とし, $\text{Link}(L)$ を全絡み数とする. このとき, 次の等式が成り立つ:

$$c_0(L) = (1-x)^{r-1} x^{-\text{Link}(L)} c_0(K_1) \cdots c_0(K_r).$$

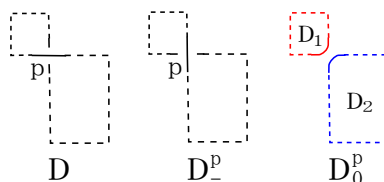
例 1.2. スケイン関係式と上の命題より, 次のように 8 の字結び目の零番係数多項式が計算できる.

$$c_0(4_1) = x^{-1} - x^{-1}(1-x)x = x + x^{-1} - 1.$$

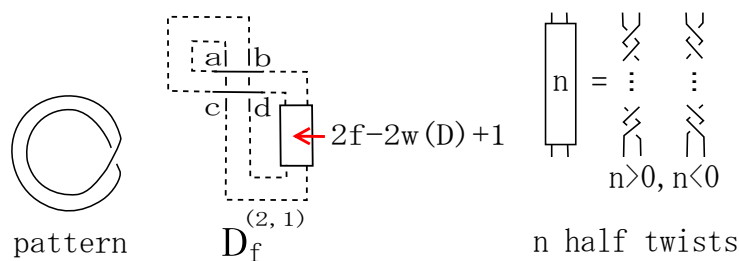


2 (2, 1) ケーブル結び目図式

D を少なくとも 1 つの交差点 p を持つ結び目図式, D^p を交差点 p で交差交換した結び目図式, D_0^p を交差点 p でスムージングした 2 成分の絡み目図式とし, その結び目成分図式を D_1, D_2 とする.



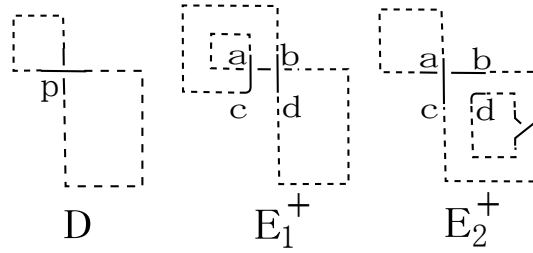
このとき, フレミング f の $(2, 1)$ ケーブル結び目図式 $D_f^{(2,1)}$ を次の図式とする. (フレミングが 0 の場合は, $D_0^{(2,1)}$ の代わりに $D^{(2,1)}$ と表す.)



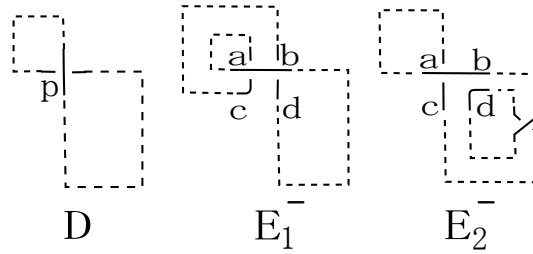
$\varepsilon = \varepsilon(p)$ を交差点 p の符号とする.

このとき, $E_1^\varepsilon, E_2^\varepsilon$ を次のような結び目図式とする.

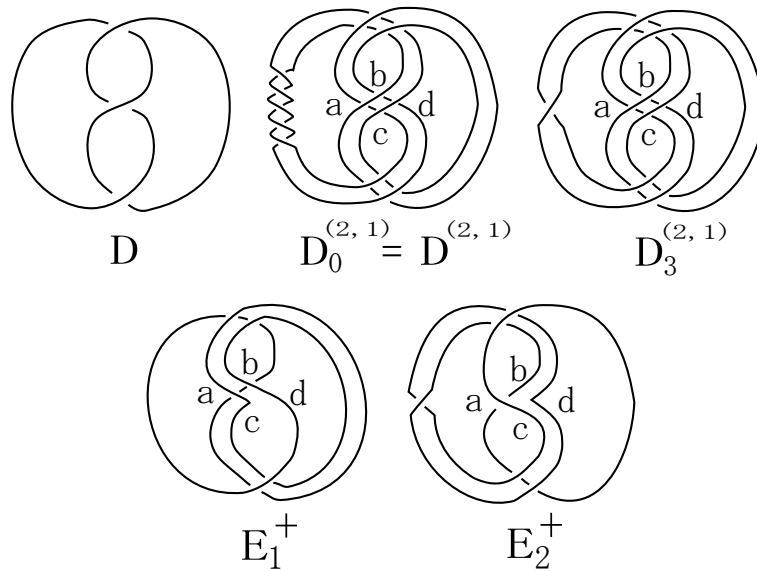
- $\varepsilon = +$ の場合



- $\varepsilon = -$ の場合



例 2.1.



このとき, $D^{(2,1)}$ の零番係数多項式は次のようになる.

定理 2.2.

$$\begin{aligned}
c_0(D^{(2,1)}) &= x^{w(D)-4\varepsilon} c_0(D_{w(D)}^{(2,1) \ a \ b \ c \ d} \text{-----}) \\
&\quad - 2\varepsilon(1-x)x^{w(D_1)-2\varepsilon-1} c_0(E_1^\varepsilon) c_0(D_2) \\
&\quad - 2\varepsilon(1-x)x^{w(D_2)-\frac{3}{2}\varepsilon-\frac{1}{2}} c_0(D_1) c_0(E_2^\varepsilon) \\
&\quad + (1-x)^2 x^{-\text{Link}(D_1, D_2) - \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{3}{2}} c_0(D_1) c_0(D_2) c_0(D_-^p) \\
&\quad + (1-x)^2 x^{-2\text{Link}(D_1, D_2) + w(D_2) - 1} c_0(D_1)^2 c_0(D_{2w(D_2)+\varepsilon}^{(2,1)}) \\
&\quad + (1-x)^2 x^{-2\text{Link}(D_1, D_2) + w(D_1) - \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{3}{2}} c_0(D_{1w(D_1)-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{2}}^{(2,1)}) c_0(D_2)^2 \\
&\quad + w(D)(1-x)x^{-1} c_0(D)^2.
\end{aligned}$$

次に, 計算でよく出てくる $(2, 2m+1)$ トーラス結び目の公式を紹介する.

命題 2.3. $T(2, 2m+1)$ を $(2, 2m+1)$ トーラス結び目とする. ($m \in \mathbb{Z}$)
このとき, 次の等式が成り立つ:

$$c_0(T(2, 2m+1)) = (m+1)x^{-m} - mx^{-m-1}.$$

$c_0(D^{(2,1)})$ の計算を単純にする条件として, 次のようなものが考えられる.

- D_-^p, D_1, D_2 : 自明な結び目図式. $\Rightarrow$

$D_{w(D)}^{(2,1) \ a \ b \ c \ d}$: $(2, 2w(D) - 2\varepsilon + 1)$ トーラス結び目図式,

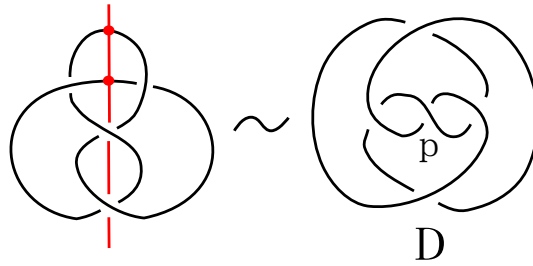
$D_{1w(D_1)-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{2}}^{(2,1)}$: $(2, 2w(D_1) - \varepsilon)$ トーラス結び目図式,

$D_{2w(D_2)+\varepsilon}^{(2,1)}$: $(2, 2w(D_2) + 2\varepsilon + 1)$ トーラス結び目図式.

つまり, コンパニオンの結び目図式が自明な結び目図式の場合は, その $(2, 1)$ ケーブル結び目図式は, あるトーラス結び目図式になるので計算が単純になる.

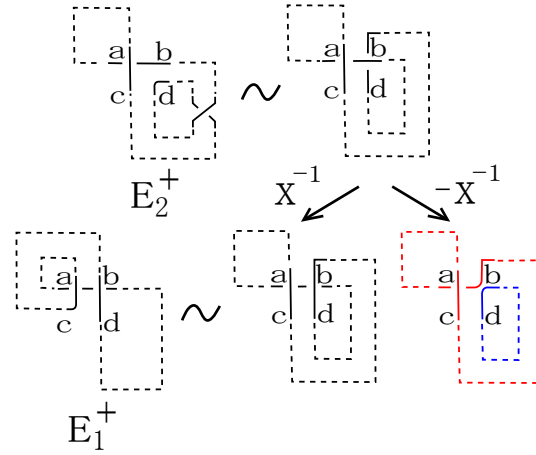
- D : 交差点 p に関して対称な強可逆結び目図式とする.

例 2.4.

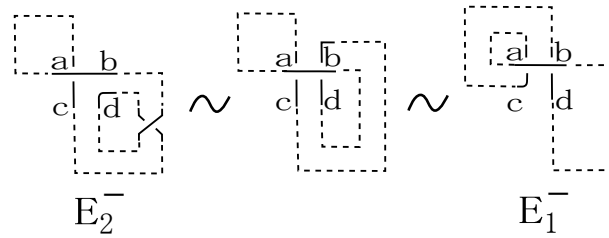


この仮定より, 次の2つの等式が成り立つ:

$$c_0(E_2^+) = x^{-1}c_0(E_1^+) - (1-x)x^{-\text{Link}(D_1, D_2)-w(D_2)-1}c_0(D_-^p)c_0(D_2).$$



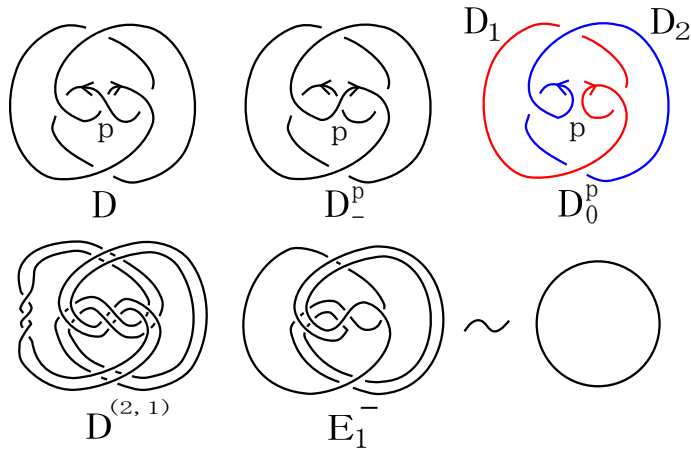
$$c_0(E_2^-) = c_0(E_1^-).$$



以上より, この仮定の下では $c_0(E_2^\pm)$ を計算する必要がないことがわかる.

例 2.5. 例えば, 8 の字結び目は先ほどの計算を単純にする条件をすべて満たしているので非常に簡単に計算できる.

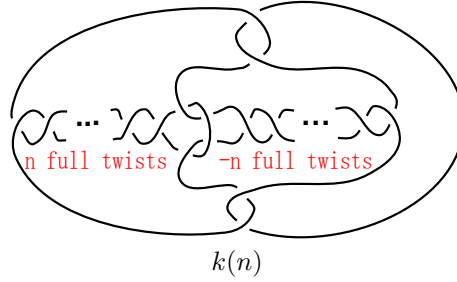
$$c_0(D^{(2,1)}) = 3x^2 - 7x + 6 + x^{-1} - 4x^{-2} + 2x^{-3}.$$



3 主定理

金信結び目 $k(n)$ は, すべての $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, 同じ HOMFLYPT 多項式を持つことが知られている [2]:

$$P(k(n)) = (y^2 + y^{-2} + 1 - z^2)^2.$$



次に, 本稿の主定理である金信結び目の $(2, 1)$ ケーブル結び目の零番係数多項式の計算結果を紹介する.

定理 3.1.

$$c_0(k(0)^{(2,1)}) = 5x^4 - 22x^3 + 48x^2 - 60x + 39 + 4x^{-1} - 34x^{-2} + 34x^{-3} - 17x^{-4} + 4x^{-5}.$$

$$\begin{aligned} & c_0(k(n)^{(2,1)}) - c_0(k(n-1)^{(2,1)}) \\ &= -2x^{n+2} + 8x^{n+1} - 10x^n + 10x^{n-2} - 8x^{n-3} + 2x^{n-4} \\ &+ 2x^{-n+3} - 8x^{-n+2} + 10x^{-n+1} - 10x^{-n-1} + 8x^{-n-2} - 2x^{-n-3}. \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

主定理より, 金信結び目はその $(2, 1)$ ケーブル結び目の零番係数多項式ですべて分類できることがわかる.

ブレイド指数に関して, 次の不等式が成り立つことが知られている [1], [3].

定理 3.2. (Morton-Franks-Williams の不等式)

L を絡み目, $\text{braid}(L)$ を L のブレイド指数, $y\text{-span } P(L; y, z)$ を HOMFLYPT 多項式 $P(L; y, z)$ の y に関する最大次数と最小次数の差, $\text{span } c_0(L)$ を零番係数多項式 $c_0(L)$ の最大次数と最小次数の差とする.

このとき, 次の不等式が成り立つ:

$$\frac{1}{2}y\text{-span } P(L; y, z) + 1 \leq \text{braid}(L).$$

$$\text{span } c_0(L) + 1 \leq \text{braid}(L).$$

系 3.3.

$$\begin{cases} 5 & (n = 0, 1, 2), \\ n + 3 & (n \geq 3) \end{cases} \leq \text{braid}(k(n)) \leq \begin{cases} 5 & (n = 0, 1), \\ 2n + 3 & (n \geq 2). \end{cases}$$

Proof. 本稿では, 下からの評価だけを示す.

Morton-Franks-Williams の不等式より, 次の不等式が成り立つ:

$$\text{span } c_0(k(n)^{(2,1)}) + 1 \leq \text{braid}(k(n)^{(2,1)}).$$

また, 金信結び目 $k(n)$ の最小本数のブレイド表示の $(2, 1)$ ケーブル結び目図式を考えると上から抑えることができるので, 次の不等式が成り立つ:

$$\text{braid}(k(n)^{(2,1)}) \leq 2 \text{braid}(k(n)).$$

主定理より, $\text{span } c_0(k(n)^{(2,1)})$ は, 次のようになる:

$$\text{span } c_0(k(n)^{(2,1)}) = \begin{cases} 9 & (n = 0, 1, 2), \\ 2n + 5 & (n \geq 3). \end{cases}$$

□

この系により, 金信結び目に対しては $(2, 1)$ ケーブル結び目の零番係数多項式を使うことによって, HOMFLYPT 多項式よりもブレイド指数の下からの良い評価を得ることができる.

References

- [1] 河内明夫, レクチャー結び目理論, 共立出版 (2007).
- [2] Taizo Kanenobu, Infinitely many knots with the same polynomial invariant.
Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), no. 1, 158-162.
- [3] Peter Cromwell, Knots and Links, Cambridge University Press (2004).