

チェッカーボード彩色可能な仮想結び目の normalized arrow polynomial について

今別府 孝規 (広島大学)

ある仮想結び目がチェッカーボード彩色可能であることを示すには、チェッカーボード彩色可能な仮想結び目のダイアグラムを1つ提示すればよい。一方チェッカーボード彩色可能でないことを示すには、仮想結び目の不変量を用いた判定方法が有効である。ここでは仮想結び目の不変量でジョーンズ多項式の拡張に当たる normalized arrow polynomial を用いた判定法について述べる。なお、講演で報告した内容には誤りがあったのでここではそれを修正したものを報告する。

1. 仮想結び目とそのチェッカーボード彩色の定義

1.1. 仮想結び目の定義

定義 1.1.1 仮想結び目のダイアグラムとは、向き付けられた1次元閉多様体の \mathbb{R}^2 へのはめ込みで、多重点は横断的二重点のみであり図1のいずれかの情報を持つ。(ここでは成分数が2以上の場合でも、仮想結び目と呼ぶ。)



図1

定義 1.1.2 仮想結び目とは、 \mathbb{R}^2 上の同位変形と図2の変形 generalized Reidmeister moves における同値類のことである。

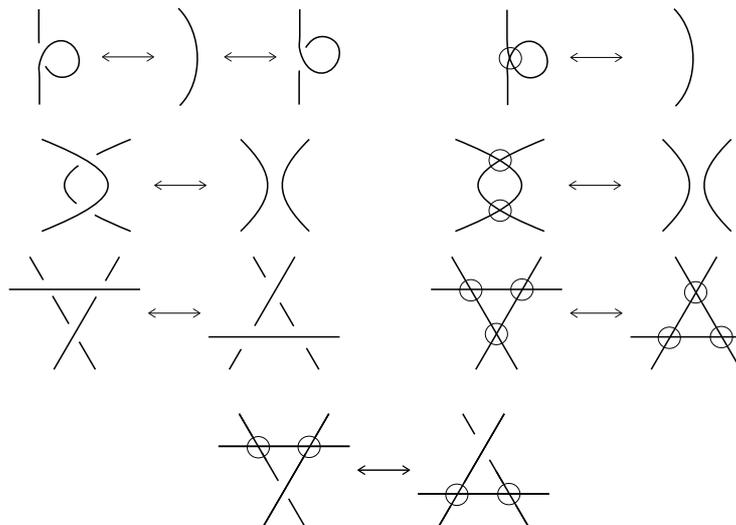


図2

定義 1.1.3 向き付けられたコンパクトな曲面 Σ と、 Σ 上のダイアグラム D で、 $|D|$ が Σ の変形レトラクトとなるとき、対 (Σ, D) を abstract link diagram と言う。ただし $|D|$ は D の実交点の上下関係をなくしたものとする。

定義 1.1.4 ([1]) ϕ は仮想結び目 D に対して図 3 の操作で得られる abstract link diagram を対応させる写像である。 D に関する abstract link diagram とは $\phi(D)$ のことである。

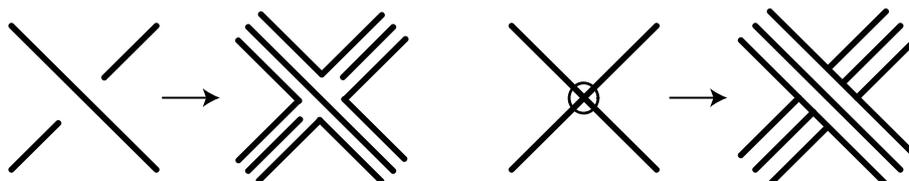


図 3

1.2. チェッカーボード彩色の定義

定義 1.2.1 abstract link diagram をチェッカーボード彩色するとは、隣り合う領域が同じ色とならないように、 $\Sigma \setminus |D|$ の連結成分に白または黒を彩色することである。

定義 1.2.2 仮想結び目のダイアグラム D がチェッカーボード彩色可能であるとは、 D に関する abstract link diagram がチェッカーボード彩色することができることである。また、仮想結び目 L がチェッカーボード彩色可能であるとは、 L がチェッカーボード彩色可能な仮想結び目のダイアグラムを持つことである。

古典結び目はチェッカーボード彩色可能であるが、仮想結び目は必ずしもチェッカーボード彩色可能であるとは限らない。図 4 はチェッカーボード彩色可能でないダイアグラムの例である。左のダイアグラムは自明結び目のダイアグラムと同値であり、仮想結び目のダイアグラムのチェッカーボード彩色可能性は generalized Reidmeister moves で保存されないことがわかる。

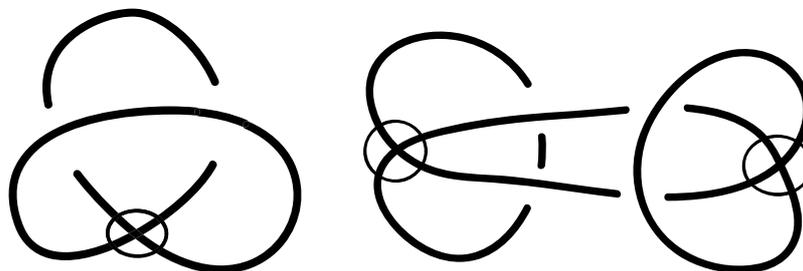


図 4

2. 仮想結び目のチェッカーボード彩色可能性の判定

この章では L は向きの付いた仮想結び目で、成分数は n とする。

2.1. ジョーンズ多項式を用いた判定方法

定理 2.1.1 (L. H. Kauffman [2]) f -多項式及びジョーンズ多項式は仮想結び目の不変量である。

$\text{EXP}(f(L))$ を仮想結び目 L の f -多項式 $f(L)$ の指数の集合とする。例えば、 $f(L) = 2A^6 - 3A^4 - A^{-2}$ のとき $\text{EXP}(f(L)) = \{6, 4, -2\}$ となる。

定理 2.1.2 (N. Kamada [3]) 仮想結び目 L がチェッカーボード彩色可能ならば

$$\text{EXP}(f(L)) \subset \begin{cases} 4\mathbb{Z} & n \text{ is odd} \\ 4\mathbb{Z} + 2 & n \text{ is even} \end{cases}$$

である。

2.2. normalized arrow polynomial の定義

仮想結び目 L のダイアグラム D の各交点に図 5 の A または B の変形を与える写像をステイトという。ただし向きを保存しないように平滑化する際、図のように各頂点に矢印をつける。

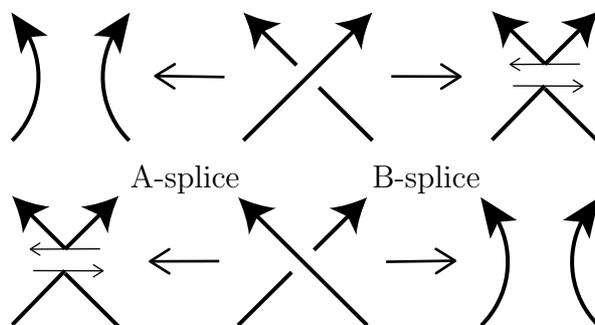


図 5

また、 S を D のステイト全体の集合とする。このとき S の任意の元 s に対して

$$\sigma(s) = (A \text{ の数}) - (B \text{ の数})$$

$$\#(s) = \text{変形してできたダイアグラムの成分数}$$

とする。

次に各ステイトに次の操作を行う。図 6 のように同じ向きの矢印が 2 つ連続しているとき、それらを消去する。ただし 2 つ連続した矢印の向きが異なるときは消去しない。

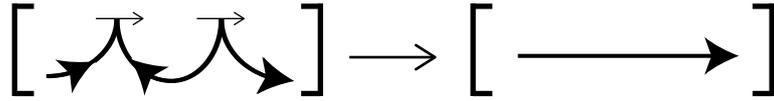


図 6

状態に対しこの操作ができなくなるまでこの操作を施すと、状態の各ループは偶数個の向きの異なる矢印を持つ。状態 s の各ループを $\{l_1, \dots, l_p\}$ とし、 l_i がもつ矢印の数を $2m_i$ とする。このとき $\mathcal{K}(s)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{K}(s) = K_{m_1} K_{m_2} \cdots K_{m_p} \in \mathbb{Z}[K_1, K_2, \dots].$$

ただし、 $m_i = 0$ のときは K_{m_i} を 1 と定義する。

仮想結び目 L のダイアグラム D の arrow polynomial を

$$\mathcal{A}(D) = \sum_{s \in \mathcal{S}} A^{\sigma(s)} (-A^2 - A^{-2})^{\#(s)-1} \mathcal{K}(s) \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}, K_1, K_2, \dots]$$

と定義する。また

$$w(D) = (\text{正の交点の数}) - (\text{負の交点の数})$$

としたとき、仮想結び目 L のダイアグラム D の normalized arrow polynomial を

$$\mathcal{W}(D) = (-A^{-3})^{w(D)} \mathcal{A}(D) \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}, K_1, K_2, \dots]$$

と定義する。

定理 2.2.1 (L. H. Kauffman [4]) $\mathcal{W}(D)$ は generalized Reidmeister moves で不変である。

L の normalized arrow polynomial $\mathcal{W}(L)$ を $\mathcal{W}(D)$ で定義すると、これは仮想結び目の不変量である。また、宮澤康行先生によって定義された宮澤多項式 [5,6] は、normalized arrow polynomial と同値な仮想結び目の不変量である。

2.3. normalized arrow polynomial を用いた判定方法

normalized arrow polynomial を使った仮想結び目のチェッカーボード彩色可能性の判定方法は 2 つあり、 A の指数に関する判定方法と K の項に関する判定方法がある。

まず 1 つ目の判定方法について説明する。EXP($\mathcal{W}(L)$) を仮想結び目の normalized arrow polynomial $\mathcal{W}(L)$ の A の指数の集合とする。例えば $\mathcal{W}(L) = A^6 - A^4 K_1 + A^2 K_1^2 - A^{-4} K_1^2 K_2$ のとき EXP($\mathcal{W}(L)$) = $\{6, 4, 2, -4\}$ となる。

定理 2.3.1 仮想結び目 L がチェッカーボード彩色可能ならば

$$\text{EXP}(\mathcal{W}(L)) \subset \begin{cases} 4\mathbb{Z} & n \text{ is odd} \\ 4\mathbb{Z} + 2 & n \text{ is even} \end{cases}$$

である。

次に 2 つ目の判定方法について説明する。

定義 2.3.2 $K_{n_1}^{m_1} K_{n_2}^{m_2} \cdots K_{n_t}^{m_t} \neq 1 \in \mathbb{Z}[K_1, K_2, \dots]$ が good であるとは、

$$\sum_{i=1}^t \left(n_i \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \right) = 0, \quad a_{ij} = \pm 1.$$

となる数列 a_{ij} が存在することである。また $1 \in \mathbb{Z}[K_1, K_2, \dots]$ は good である。

つまり $K_{n_1}^{m_1} K_{n_2}^{m_2} \cdots K_{n_t}^{m_t}$ が good であるとは、添字

$$\underbrace{\{n_1, \dots, n_1\}}_{m_1 \text{個}}, \underbrace{\{n_2, \dots, n_2\}}_{m_2 \text{個}}, \dots, \underbrace{\{n_t, \dots, n_t\}}_{m_t \text{個}}$$

に適当に符号を付けて和を 0 にできることである。例えば $K_2^2 K_3^3 K_4^2 K_5 K_6$ は、添字が $\{2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6\}$ で、 $2+2+3-3-3+4-4+5-6=0$ なので $K_2^2 K_3^3 K_4^2 K_5 K_6$ は good である。

定理 2.3.3 仮想結び目 L がチェッカーボード彩色可能ならば $\mathcal{W}(L)$ には good な項しか現れない。

2 つの判定方法を述べたが次の定理が成り立つ

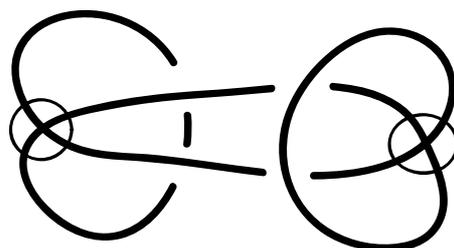
定理 2.3.4 仮想結び目 L の normalized arrow polynomial $\mathcal{W}(L)$ に good な項しか現れないならば

$$\text{EXP}(\mathcal{W}(L)) \subset \begin{cases} 4\mathbb{Z} & n \text{ is odd} \\ 4\mathbb{Z} + 2 & n \text{ is even} \end{cases}$$

である。

定理 2.3.4 の主張は定理 2.3.1 の A の指数に関する判定方法よりも定理 2.3.3 の K の項に関する判定方法の方が強いということである。

例 2.3.5 次の岸野の結び目の normalized arrow polynomial は以下のとおりである。



$$\mathcal{W}(L) = A^4 + 1 + A^{-4} - (A^4 + 2 + A^{-4})K_1^2 + 2K_2.$$

$\text{EXP}(\mathcal{W}(L)) = \{4, 0, -4\}$ であり、定理 2.3.1 ではチェッカーボード彩色可能性を判定できない。一方、 K_2 は good な項ではないので定理 2.3.3 より岸野の結び目はチェッカーボード彩色可能ではないことが分かる。

参考文献

- [1] N. Kamada and S. Kamada, *Abstract link diagrams and virtual knots*, J. Knot Theory Ramifications 9 (2000), 93–106.
- [2] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, Europ. J. Combinatorics 20 (1999), 663–690.
- [3] N. Kamada, *On the Jones polynomials of checkerboard colorable virtual links*, Osaka J. Math. 39 (2002), 325–333.
- [4] L. H. Kauffman, *An Extended Bracket Polynomial for Virtual Knots and Links*, J. Knot Theory Ramifications 18 (2009), 1369–1422.
- [5] Y. Miyazawa, *A multi-variable polynomial invariant for virtual knots and links*, J. Knot Theory Ramifications 17 (2008), 1311–1326.
- [6] Y. Miyazawa, *A virtual link polynomial and the virtual crossing number*, J. Knot Theory Ramifications 18 (2009), 605–623.