

(−2, 3, 2s + 1) 型プレッツェル結び目の基本群の表示と $\mathbb{R}$ -covered 葉層構造について

中江 康晴

秋田大学大学院工学資源学研究科

1. 主定理と背景

3次元多様体 M 上の余次元 1 葉層構造 $\mathcal{F}$ で, レーブ成分 (Reeb component) を持たないものを Reebless 葉層構造と呼ぶ. ここでレーブ成分とは, ソリッドトーラス $T = D^2 \times S^1$ 上の余次元 1 葉層構造で, $\partial T = T^2$ を唯一のコンパクト葉としてもち, T の内部にある葉はすべて $\mathbb{R}^2$ と同相になるものである (葉層構造の定義や基本的な性質などは, 田村一郎 ‘葉層のトポロジー’ [15] (英訳は [16]), または Candel–Conlon ‘Foliations I’ [4] を参照せよ). 閉 3 次元多様体 M で $S^2 \times S^1$ に同相ではないものに Reebless 葉層構造 $\mathcal{F}$ が存在するとき, M の普遍被覆 $\widetilde{M}$ は $\mathbb{R}^3$ と同相になり, 葉は $\mathbb{R}^2$ と同相になることが, Novikov, Rosenberg, Palmeira の定理により知られている (Reebless 葉層構造に対する Novikov, Rosenberg, Palmeira の定理については, Candel–Conlon ‘Foliations II’ [5, Chapter 9] を参照せよ). この $\mathcal{F}$ を $\widetilde{M}$ に持ち上げたものを $\widetilde{\mathcal{F}}$ とし, それによる商空間 $\mathcal{T} = \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F}$ の葉空間 (leaf space) と呼ぶ (このような, 単連結な多様体上の平面による余次元 1 葉層構造とその葉空間については, [5, Appendix D] を参照せよ). この $\mathcal{T}$ は単連結な 1 次元多様体になるが, 一般にはハウスドルフ空間にならない. これに対し, $\mathcal{T}$ が $\mathbb{R}$ と同相になるような Reebless 葉層構造 $\mathcal{F}$ を, $\mathbb{R}$ -covered 葉層構造と呼ぶ. また, $\widetilde{M}$ への被覆変換群としての基本群 $\pi_1(M)$ の作用を考えることにより, $\pi_1(M)$ は $\mathcal{T}$ 上に固定点を持たない位相同型写像として作用することがわかる.

さて, 2004 年に J. Jun は論文 [9] で以下の定理を示した.

Theorem 1.1. (J. Jun [9, Theorem 2]) K を S^3 内の $(-2, 3, 7)$ -プレッツェル結び目とし, K に沿ってスロープ p/q によりデーン手術をして得られる閉 3 次元多様体を $E_K(p/q)$ とする. このとき, $p/q \geq 10$ かつ p が奇数ならば, $E_K(p/q)$ に $\mathbb{R}$ -covered 葉層構造は存在しない.

結び目 K に沿ったスロープ p/q によるデーン手術とは, K の管状近傍 $N(K)$ を取り除き, そこに有理数のパラメータ p/q で定まる方法でソリッドトーラス $D^2 \times S^1$ を張り合わせ, 新たな閉 3 次元多様体を作り出す操作である. その詳細については, Boyer [1] を参照せよ.

我々は, この定理を部分的に拡張して, 以下の結果を得た.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 57R30, 57M25.

Theorem 1.2. (主定理) K_s を S^3 内の $(-2, 3, 2s+1)$ -プレッツェル結び目 ($s \geq 3$) とする. このとき, $p/q \geq 4s+7$ かつ p が奇数ならば, $E_{K_s}(p/q)$ に $\mathbb{R}$ -covered 葉層構造は存在しない.

ここで, $(-2, 3, 7)$ -プレッツェル結び目の場合, すなわち $s = 3$ の場合を考えると, Theorem 1.2 では $p/q \geq 19$ のときに $\mathbb{R}$ -covered 葉層構造をもたないことがわかり, Theorem 1.1 の $p/q \geq 10$ に含まれる結果になっている.

J. Jun は同じ論文 [9] で以下を示し, こちらその論文における主定理である.

Theorem 1.3. (J. Jun [9, Theorem 1]) Theorem 1.1 の K に対し, $p/q > 18$, p は奇数, かつ $p/q \neq 37/2$ ならば, $E_K(p/q)$ に Reebless 葉層構造は存在しない.

この定理は, R. Roberts, J. Shareshian, M. Stein の論文 [14] で得られた以下の結果と同様の方法で証明されたものである.

Theorem 1.4. (R. Roberts, J. Shareshian, M. Stein [14, Theorem A], 2003) 閉 3 次元双曲多様体で, Reebless 葉層構造を持たないものが無限個存在する.

また, これを本質的ラミネーション (essential lamination) に対して, 以下のように S. Fenley が拡張している.

Theorem 1.5. (S. Fenley [7], 2007) 閉 3 次元双曲多様体で, 本質的ラミネーションを持たないものが無限個存在する.

Theorem 1.4 と Theorem 1.5 では, 一つ穴あきトーラス $F = \Sigma_{1,1}$ をファイバーとするような S^1 上の曲面束 M に対し, その境界 ∂M に沿ってスロープ p/q による Dehn filling をして得られた閉 3 次元多様体 $M_{p/q}$ を考えている. その曲面束のモノドロミー $\phi : F \rightarrow F$ を行列で $\phi_{\#} = \begin{pmatrix} m & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ と表した時の m と p/q をパラメータとして, $M_{p/q}$ が Reebless 葉層構造を持たない条件を定めて, 無限個の Reebless 葉層構造をもたないような閉 3 次元双曲多様体の族を構成している.

これらの定理は次のような方針で証明されている. まず先述の通り, M に Reebless 葉層構造 $\mathcal{F}$ が存在すると, その葉空間 $\mathcal{T}$ はハウスドルフ空間ではないかもしれない単連結 1 次元多様体になる. また, $\pi_1(M)$ が $\mathcal{T}$ に位相同型写像として固定点を持たずに作用している. さらに, M に 2 つの Reebless 葉層構造 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ があって, それぞれの葉空間を $\mathcal{T}$ と $\mathcal{T}'$ とすると, Palmeira の定理により, $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}'$ に写す微分同相写像 $f : M \rightarrow M$ が存在することと, $\tilde{f} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ なる微分同相写像が存在することが同値となる. よって, 任意の単連結 1 次元多様体 $\mathcal{T}$ に対し, 閉 3 次元多様体 M の基本群 $\pi_1(M)$ の全ての元の作用によって固定される $\mathcal{T}$ 上の点が存在すれば, M は Reebless 葉層構造を持たないことがわかる.

一般に, このような葉空間 $\mathcal{T}$ はハウスドルフ空間になるとは限らないので, それに対する $\pi_1(M)$ の作用に関する議論は複雑になる. よって Theorem 1.2 においては, 葉空間が単純な $\mathbb{R}$ となる $\mathbb{R}$ -covered 葉層構造を考えている. また, このような作用を考えると, 固定点を見つけるためには, $\pi_1(M)$ はより少ない生成元で表示されたほうが良い. 本研究では, $\pi_1(E_{K_s})$ の表示が 2 元生成の形で得られることを用いて, 定理を証明している. 基本群のこのような良い表示を得る方法について第 2 章で解説し, 第 3 章で主定理の証明を簡単に説明する. 第 2 章と第 3 章の内容の詳細については [12] を参照のこと. また第 4 章において, 関連する事項について触れる.

2. 基本群の良い表示について

Theorem 1.1 の証明では, 基本群 $\pi_1(E_K)$ の表示を J.Weeks によるコンピュータプログラム SnapPea [17] を用いて得ている. Theorem 1.2 の証明のためには, SnapPea を用いずに, ツイストの数を表すパラメータ s を含む形で, また先述のとおり, 良い形の表示を得る必要がある. それを, 次のような方法を用いて得た.

まず, 森元・作間・横田の結果 [11] により, K_s はトンネル数 1 の結び目であることがわかる. よって, K_s の結び目群は生成元が 2 個, 関係子が 1 個の表示をもつことがわかる. H. M. Hilden, D. M. Tejada, M. M. Toro は論文 [8] で, トンネル数 1 の結び目に対し Wirtinger 表示からスタートしそれに Tietze 変換を行っていくことで, そのような表示を得る方法を提示している. そこでは, 結び目 K にトンネルを付けて作られるグラフ Γ に対し, 最終的に $S^1 \vee S^1$ の形になるまで変形する局所変形の列を作り, そのそれぞれの局所変形に対応する Tietze 変換を行っていくことで, 必要となる表示を得ている.

この方法を K_s に適用するため, [8] で用いられた局所変形に加えて, いくつかの新たな種類の局所変形を用いた. これらの局所変形を, 小林 [10] に書かれている変形手順を参考にしながら K_s に行い, それぞれに対応する Tietze 変換を行った結果, 以下を得た.

Lemma 2.1. K_s を S^3 内の $(-2, 3, 2s+1)$ -プレッツェル結び目 ($s \geq 3$) とし, E_{K_s} を K_s の外部空間とする. このとき, 基本群 $G_{K_s} = \pi_1(E_{K_s})$ の表示は

$$G_{K_s} = \langle c, l \mid clcl\bar{c}l^s\bar{c}lclcl^{s-1} \rangle$$

となる.

Theorem 1.2 の証明のためには, 基本群 $\pi_1(E_{K_s}(p/q))$ の表示が必要であるが, そのためには meridian と longitude を表す G_{K_s} の元を得る必要がある. meridian M は G_{K_s} において c で表されることが Lemma 2.1 の計算過程からわかる. longitude L については, 次のように計算をする.

まず, Burde-Zieschang の本 [3] にある方法 (p.39, 3.13 Remark) で, 最初に得られた Wirtinger 表示から longitude L_0 を

$$L_0 = afcf_{2s-1}f_{2s-3}\cdots f_1cgf_{2s-2}f_{2s-4}\cdots f_2ae\bar{c}^{2s+6}$$

として得る. ここで, 群の元 a に対し $\bar{a}$ で a^{-1} を表すこととする. その L_0 を, Lemma 2.1 の表示を得るために行った Tietze 変換の列に従って変形していくと, 最終的に

$$L_{12} = \bar{c}^{s-1}lcl^s(\bar{l}clcl\bar{c})^{s-1}\bar{l}clcl^{s-1}cl\bar{c}^{2s+8}$$

となる. この L_{12} は複雑な式になっているので, このままでは使いにくい. そこで, Lemma 2.1 で得られた G_{K_s} の表示の関係子 $clcl\bar{c}l^s\bar{c}lclcl^{s-1}$ を用いて, 次の簡単な形を得た:

$$L = \bar{c}^{2s-2}lcl^scl^scl\bar{c}^{2s+9}$$

これを可換化して 1 次元ホモロジーの元として考えると, 自明なものになっていることが計算によりわかる. 以上をまとめて, 次の結果を得た.

Lemma 2.2. $G_{K_s}(p, q)$ を, K_s に沿ってスロープ p/q でデーン手術して得られた閉 3 次元多様体 $E_{K_s}(p/q)$ の基本群とする. $G_{K_s}(p, q)$ の表示として以下を得た:

$$G_{K_s}(p, q) = \langle c, l \mid clcl\bar{c}l^s\bar{c}lclcl^{s-1}, M^pL^q \rangle, \quad M = c, \quad L = \bar{c}^{2s-2}lcl^scl^scl\bar{c}^{2s+9}$$

これらの結果を元に, 次章で Theorem 1.2 の証明の概略を説明する.

3. 主定理の証明の概略

Theorem 1.2 は, J. Jun [9] や R. Roberts, J. Shareshian, M. Stein [14] の論文における手順に従って, 以下の手順を追って証明される.

Lemma 3.1. (cf. [9, Lemma 8], [14, Lemma 3.4])

$G_{K_s}(p, q)$ の元 k で, $M = k^q$ かつ $L = k^{-p}$ を満たすものが存在する.

Lemma 3.1 と Lemma 2.2 における $G_{K_s}(p, q)$ や L の表示により, 基本群の元 k, c, l に対する次の関係を得る:

Fact 3.2. $k, c, l \in G_{K_s}(p, q)$ に対して,

$$k^{p-(4s+7)} = \bar{l}\bar{c}l^s\bar{c}l^s\bar{c}l$$

なる関係式が成り立つ.

Theorem 1.2 の証明のため, 以降 $G_{K_s}(p, q)$ は単連結な 1 次元多様体 $\mathcal{T}$ に位相同型写像として作用していると仮定する. また, $G_{K_s}(p, q)$ の $\mathcal{T}$ への作用を準同型 $\Phi : G_{K_s}(p, q) \rightarrow \text{Homeo}(\mathcal{T})$ として考えるとき, $g \in G_{K_s}(p, q)$ とその像 $\Phi(g)$ を同じ記号で表す. すなわち, $x \in \mathcal{T}$ に対し xg で $\Phi(g)(x)$ を表すとする. さらに, p が奇数であるという仮定から, $\Phi(G_{K_s}(p, q)) \subset \text{Homeo}^+(\mathcal{T})$ となることわかる ([9, Corollary 7]).

さて, ハウスドルフ空間ではないかもしれない単連結 1 次元多様体 $\mathcal{T}$ に対し, 次のように半順序を定める. まず $x \in \mathcal{T}$ に対し, $\mathcal{T} \setminus \{x\}$ はちょうど 2 個の成分に分かれる. U を $x \in \mathcal{T}$ の十分小さなユークリッド近傍とする. すると, $U \setminus \{x\}$ の 2 つの成分は, $\mathcal{T} \setminus \{x\}$ の異なる 2 つの成分にそれぞれ含まれる. U^+ で $U \setminus \{x\}$ の 1 つの成分を表し, それを x の positive direction と呼ぶ. x^+ を $\mathcal{T} \setminus \{x\}$ の成分で U^+ を含むものとし, x^- を $\mathcal{T} \setminus (x^+ \cup \{x\})$ なるものとする. これにより, $\mathcal{T}$ 上の半順序 $\leq$ を次のように定める.

Definition 3.3. 単連結 1 次元多様体 $\mathcal{T}$ 上の半順序 $\leq$ を, $x, y \in \mathcal{T}$ に対し, $x^+ \supseteq y^+$ のとき $x \leq y$ であると定める.

このように定めることで, $\text{Homeo}^+(\mathcal{T})$ の元は, この半順序 $\leq$ を保つ.

Lemma 3.4. (cf. [9, Lemma 15], [14, Lemma 3.5]) P を半順序集合とし, $p - (4s + 7)q \geq 0$, $q > 0$ かつ $G_{K_s}(p, q)$ の P への任意の作用は順序を保つとする. このとき, $x \in P$ が

- (1) $xk = x$ かつ, x と xl は順序を持つ, あるいは
- (2) $xl = x$ かつ, x と xk は順序を持つ,

を満たすならば, x は $G_{K_s}(p, q)$ の任意の元で固定される.

いま $\mathcal{T} \cong \mathbb{R}$ なので, この Lemma 3.4 はそれほど大きな意味を持たないが, $\mathcal{T}$ が一般の場合 (ハウスドルフではない場合) に, 重要になる.

Lemma 3.5. (cf. [9, Lemma 16]) $q > 0$ かつ任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $xk > x$ ならば, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $xl > x$ となる.

この Lemma 3.5 は, 次の Proposition 3.6 の証明のために必要となるものである.

最後に, 以下の Proposition 3.6 を示すことで, $\mathbb{R}$ -covered 葉層構造から定まる葉空間への作用が固定点を持たないという性質により, Theorem 1.2 が証明される.

Proposition 3.6. (cf. [9, Proposition 17]) $q > 0$ かつ $p/q \geq 4s + 7$ とすると, 任意の $\Phi : G_K(p, q) \rightarrow \text{Homeo}^+(\mathbb{R})$ に対し, 全ての $g \in \Phi(G_K(p, q))$ で固定される $x \in \mathbb{R}$ が存在する.

4. 今後の課題と関連する話題

まず今後の課題について述べる. Theorem 1.2 では葉空間 $\mathcal{T}$ が $\mathbb{R}$ の場合を考えたが, Theorem 1.3 のように, $\mathcal{T}$ がハウスドルフ空間ではないような一般の場合に拡張することが, 最初の課題である. $\mathcal{T}$ の形が複雑になるため Theorem 1.2 の証明の手順のように簡単には行かないが, $G_{K_s}(p, q)$ の良い表示をこのようにすでに得ていて, かつ $\mathcal{T}$ が一般の場合に重要となる Lemma 3.4 の証明もできているので, 証明できる可能性は高い. また, 対象となる結び目を K_s から $(-2, 2r + 1, 2s + 1)$ -プレッツェル結び目 $K_{(r,s)} (r \geq 1, s \geq 3)$ に拡張して同様の結果を得ることも考えている. 基本群 $G_{K_{(r,s)}} = \pi_1(E_{K_{(r,s)}})$ の良い表示も, 同様にこの $K_{(r,s)}$ がトンネル数 1 であることを利用して得ることができる. $K_{(r,s)}$ の必要な変形手順そのものはできているので, あとは対応する Tietze 変換の列を定式化すれば良いのであるが, かなり煩雑になるため慎重な検証が必要となっている.

次に, 関連する話題について述べる. ある群 G が左順序付け可能 (left-orderable) であるとは, 任意の $f, g, h \in G$ に対し, $g > h \Rightarrow fg > fh$ なる全順序 $>$ が G 上に存在することと定義する (f を右からの演算で取ることで, 右順序付け可能 (right-orderable) も同様に定義される). この左順序付け可能性に関して, 可算群 G が左順序付け可能であることと, G の $\mathbb{R}$ への faithful な作用が存在することが同値であることが知られている. よってこれより, 閉 3 次元多様体 M に $\mathbb{R}$ -covered 葉層構造が存在すると, $\pi_1(M)$ が左順序付け可能であることがわかる. また, Theorem 1.2 の仮定に適合する $G_{K_s}(p, q)$ は, Proposition 3.6 により $\mathbb{R}$ に faithful な作用を持たないので, 左順序付け可能ではないことがわかる. R. Roberts と J. Shareshian は, [14] で扱われた曲面束の基本群の性質をより一般化し, その基本群は右順序付け可能でないことを示している ([13, Corollary 1.5]).

左順序付け可能性に関して, A. Clay, L. Watson は論文 [6] において, 以下の定理を示している.

Theorem 4.1. (A. Clay, L. Watson [6, Theorem 28]) K を $(-2, 3, 2m + 5)$ -プレッツェル結び目とする. $p/q > 2m + 15$ かつ $m \geq 0$ ならば, $\pi_1(E_K(p/q))$ は左順序付け可能ではない.

よって, この定理の仮定を満たす $E_K(p/q)$ は $\mathbb{R}$ -covered 葉層構造をもたないことがわかり, Theorem 1.2 はこの定理に比べて弱い結果であることがわかる.

さて, 閉 3 次元多様体 M が L-space であるとは, M が有理ホモロジー球面で, Heegaard-Floer ホモロジー $\widehat{HF}(M)$ が $\text{rk } \widehat{HF}(M) = |H_1(M)|$ を満たすものをいう. S. Boyer, C. McA. Gordon, L. Watson らは [2] において, M が L-space であることと $\pi_1(M)$ が左順序付け可能ではないことが同値であるという予想を提示している. このように本研究とその周辺は, 基本群とその左順序付け可能性, $\mathbb{R}$ -covered 葉層構造の存在, そして Heegaard-Floer ホモロジーにおける L-space と, 関連する話題は多方面に渡り, 興味深い研究分野になっている.

REFERENCES

- [1] S. Boyer, *Dehn surgery on knots*, Handbook of geometric topology, 165–218, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [2] S. Boyer, C. McA. Gordon, L. Watson, *On L -spaces and left-orderable fundamental groups*, preprint, arXiv:1107.5016.
- [3] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, Second edition. de Gruyter Studies in Mathematics, 5. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2003. xii+559 pp.
- [4] A. Candel, L. Conlon, *Foliations I*, Graduate Studies in Mathematics **23**, AMS, Providence, RI, 2000.
- [5] A. Candel, L. Conlon, *Foliations II*, Graduate Studies in Mathematics **60**, AMS, Providence, RI, 2003.
- [6] A. Clay, L. Watson, *Left-orderable fundamental groups and Dehn surgery*, preprint, arXiv:1009.4176.
- [7] S. R. Fenley, *Laminar free hyperbolic 3-manifolds*, Comment. Math. Helv. **82**(2007), 247–321.
- [8] H. M. Hilden, D. M. Tejada, M. M. Toro, *Tunnel number one knots have palindrome presentation*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol.11, No.5 (2002), 815–831.
- [9] J. Jun, *$(-2, 3, 7)$ -pretzel knot and Reebless foliation*, Topology and its Applications, **145** (2004), 209–232.
- [10] T. Kobayashi, *A criterion for detecting inequivalent tunnels for a knot*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., Vol.107(1990), 483–491.
- [11] K. Morimoto, M. Sakuma, Y. Yokota, *Identifying tunnel number one knots*, J. Math. Soc. Japan, Vol.48, No.4 (1996), 667–688.
- [12] Y. Nakae, *A good presentation of $(-2, 3, 2s+1)$ -type Pretzel knot group and $\mathbb{R}$ -covered foliation*, in preparation.
- [13] R. Roberts, J. Shareshian, *Non-right-orderable 3-manifold groups*, Canad. Math. Bull. 53 (2010), no. 4, 706–718.
- [14] R. Roberts, J. Shareshian, M. Stein, *Infinitely many hyperbolic 3-manifolds which contain no Reebless foliation*, Journal of the Amer. Math. Soc. Vol.16 No.3 (2003), 639–679.
- [15] 田村一郎, 葉層のトポロジー, 数学選書, 岩波書店, 1976
- [16] I. Tamura, *Topology of foliations: an introduction*, Translations of Mathematical Monographs **97**, AMS, Providence, RI, 1992.
- [17] J. Weeks, SnapPea, <http://www.geometrygames.org/SnapPea/>

010-8502 秋田市手形学園町 1-1 秋田大学大学院工学資源学研究科情報工学専攻
E-mail address: nakae@ie.akita-u.ac.jp