

空間完全4部グラフ $K_{3,3,1,1}$ 内の結び目 と絡み目の不変量について

橋本 広香 (東京女子大学大学院理学研究科)*¹

新國 亮 (東京女子大学現代教養学部)*²

概 要

完全4部グラフ $K_{3,3,1,1}$ の空間埋め込みに対する Conway-Gordon 型定理を示す。また、その直線型空間埋め込みへの応用も与える。

1. 準備

本稿で用いる幾つかの用語と記号を準備する。以下、グラフは全て有限グラフで自然に位相空間とみなす。グラフ G の円周に同相な部分グラフ γ をサイクルといい、特にちょうど k 本の辺から成るサイクルを k サイクルという。 G の全ての頂点を含むサイクルは Hamilton サイクルとも呼ばれる。 G のサイクル全体の集合を $\Gamma(G)$ で表し、特に k サイクル全体の集合を $\Gamma_k(G)$ で表す。また、 G の互いに交わらない2つのサイクルの組全体の集合を $\Gamma^{(2)}(G)$ で表し、特に互いに交わらない k サイクルと l サイクルの組全体からなる集合を $\Gamma_{k,l}^{(2)}(G)$ で表す。グラフ H がグラフ G のマイナーであるとは、 H が G から辺の除去及び縮約を繰り返して得られるときをいい、特に $H \neq G$ のときプロパーマイナーという。グラフ G の3次元 Euclid 空間への埋め込み $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ を G の空間埋め込みといい、 $f(G)$ を単に空間グラフという。このとき、 $\gamma \in \Gamma(G)$ に対し $f(\gamma)$ は $f(G)$ 内の結び目で、また、 $\gamma \in \Gamma^{(2)}(G)$ に対し $f(\gamma)$ は $f(G)$ 内の2成分絡み目である。 G の空間埋め込み全体の集合を $\text{SE}(G)$ で表す。 G の空間埋め込み f が直線型であるとは、 G の各辺 e に対し、 $f(e)$ が $\mathbb{R}^3$ の直線分であるときをいう。 G の直線型空間埋め込み全体の集合を $\text{RSE}(G)$ で表す。

2. Conway-Gordon の定理とその精密化

K_n を n 頂点完全グラフ、即ち n 個の頂点のどの2つの組もちょうど1本の辺で結んでできるグラフとする。このとき、次の定理は Conway-Gordon の定理と呼ばれ、空間グラフ理論において特に有名な定理の1つである。

定理 2.1 (Conway-Gordon [2]) $\text{SE}(K_7)$ の任意の元 f に対し、

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) \equiv 1 \pmod{2}.$$

ここで $a_2(J)$ は結び目 J の Conway 多項式 $\nabla_J(z)$ の2次の係数、即ち z^2 の係数を表す。

*¹ 〒167-8585 東京都杉並区善福寺 2-6-1 東京女子大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: etiscatbird@yahoo.co.jp

*² 〒167-8585 東京都杉並区善福寺 2-6-1 東京女子大学現代教養学部数理科学科
e-mail: nick@lab.twcu.ac.jp

従って, K_7 の任意の空間埋め込みの像は, Conway 多項式の 2 次の係数が奇数の結び目を, ある Hamilton サイクルの像として必ず含む. 一般に, $\text{SE}(G)$ の任意の元 f に対し $f(G)$ が非自明結び目を含むとき, G は結び目内在であるという. 定理 2.1 により, K_7 は結び目内在である. 一方, K_7 の任意のプロパーマイナーは結び目内在ではない [10]. そのようなグラフは (結び目内在性に関し) マイナーミニマルであるという. 即ち, K_7 はマイナーミニマルな結び目内在グラフである.

定理 2.1 は, 以下のように $\mathbb{Z}_2$ 上の関係式から $\mathbb{Z}$ 上の関係式に精密化されることが知られている.

定理 2.2 (新國 [11]) $\text{SE}(K_7)$ の任意の元 f に対し,

$$\begin{aligned} & 7 \sum_{\gamma \in \Gamma_7(K_7)} a_2(f(\gamma)) - 6 \sum_{\gamma \in \Gamma_6(K_7)} a_2(f(\gamma)) - 2 \sum_{\gamma \in \Gamma_5(K_7)} a_2(f(\gamma)) \\ &= 2 \sum_{\gamma \in \Gamma_{3,4}^{(2)}(K_7)} \text{lk}(f(\gamma))^2 - 21. \end{aligned}$$

ここで $\text{lk}(L)$ は 2 成分絡み目 L の絡み数を表す.

定理 2.2 の両辺を 2 を法として考えることで, 定理 2.1 が直ちに得られることに注意する. 即ち, 定理 2.2 は Conway-Gordon の定理の整数への持ち上げである.

次に, 図 2.1 に表されたグラフ $K_{3,3,1,1}$ を考える. Foisy は以下を示した.

定理 2.3 (Foisy [4]) $K_{3,3,1,1}$ はマイナーミニマルな結び目内在グラフである.

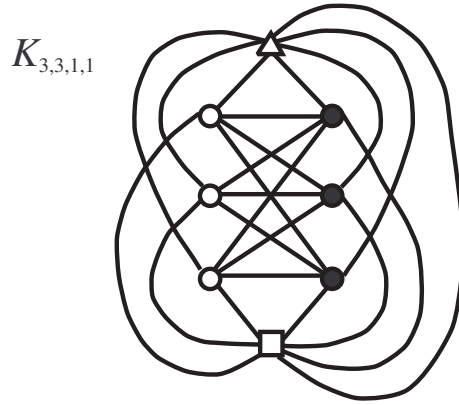


図 2.1: $K_{3,3,1,1}$

しかしこの場合, K_7 の場合とは様相が異なる. 即ち, $\text{SE}(K_{3,3,1,1})$ の元 f に対し,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_8(K_{3,3,1,1})} a_2(f(\gamma)) \equiv 1 \pmod{2}$$

が成り立つとは限らないことが, 小原-鈴木 [9] により指摘されている (例 3.3 参照). 従って, Conway-Gordon の定理のもともとの証明のアイディアは, $K_{3,3,1,1}$ におい

てはうまく機能しない. 実際, Foisy は全く別の手法で $K_{3,3,1,1}$ の結び目内在性を示したのだが, その議論において, $K_{3,3,1,1}$ の空間埋め込みの像が含む非自明結び目の “場所” を特定することができない. Foisy は, 結果的に次を示している.

定理 2.4 (Foisy [4]) $\text{SE}(K_{3,3,1,1})$ の任意の元 f に対し, ある $\gamma \in \bigcup_{k=4}^8 \Gamma_k(K_{3,3,1,1})$ が存在して, $a_2(f(\gamma))$ は奇数である.

そこで, Foisy-Ludwig は次の問題を挙げた.

問 2.5 (Foisy-Ludwig [6, Question 5.8])

- (1) $K_{3,3,1,1}$ の任意の空間埋め込みの像は, 非自明結び目を, ある Hamilton サイクルの像として必ず含むか?
- (2) $K_{3,3,1,1}$ の直線型空間埋め込みではどうか?

我々の目的は, $K_{3,3,1,1}$ の空間埋め込みに対し, 整数版 Conway-Gordon 型定理を与えることで Foisy による定理 2.4 を精密化し, 更に問 2.5 (2) に対し肯定的解答を与えることである.

3. 主定理

今回, 主結果として, 次を得た.

定理 3.1 (1) $\text{SE}(K_{3,3,1,1})$ の任意の元 f に対し,

$$\begin{aligned} & 4 \sum_{\gamma \in \Gamma_8(K_{3,3,1,1})} a_2(f(\gamma)) - 4 \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_7(K_{3,3,1,1}) \\ \gamma \not\supset \{x,y\}}} a_2(f(\gamma)) \\ & - 4 \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_6(K_{3,3,1,1}) \\ \gamma \cap \{x,y\} \neq \emptyset}} a_2(f(\gamma)) - 4 \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_5(K_{3,3,1,1}) \\ \gamma \not\supset \{x,y\}}} a_2(f(\gamma)) \\ & = \sum_{\gamma \in \Gamma_{3,5}^{(2)}(K_{3,3,1,1})} \text{lk}(f(\gamma))^2 + 2 \sum_{\gamma \in \Gamma_{4,4}^{(2)}(K_{3,3,1,1})} \text{lk}(f(\gamma))^2 - 18. \end{aligned}$$

(2) $\text{SE}(K_{3,3,1,1})$ の任意の元 f に対し,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_{3,5}^{(2)}(K_{3,3,1,1})} \text{lk}(f(\gamma))^2 + 2 \sum_{\gamma \in \Gamma_{4,4}^{(2)}(K_{3,3,1,1})} \text{lk}(f(\gamma))^2 \geq 22.$$

定理 3.1 の (1), (2) を組み合わせることで, 直ちに次が得られる.

系 3.2 $\text{SE}(K_{3,3,1,1})$ の任意の元 f に対し,

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \Gamma_8(K_{3,3,1,1})} a_2(f(\gamma)) - \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_7(K_{3,3,1,1}) \\ \gamma \not\supset \{x,y\}}} a_2(f(\gamma)) \\ & - \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_6(K_{3,3,1,1}) \\ \gamma \cap \{x,y\} \neq \emptyset}} a_2(f(\gamma)) - \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_5(K_{3,3,1,1}) \\ \gamma \not\supset \{x,y\}}} a_2(f(\gamma)) \geq 1. \end{aligned}$$

系 3.2 は, 非自明結び目の場所を絞り込むという観点から, 定理 2.4 の精密化になっている.

例 3.3 f, g を図 3.1 の $K_{3,3,1,1}$ の空間埋め込みとする. 実は, $f(K_{3,3,1,1})$ が含む非自明結び目は, ある 8 サイクルの像として実現されるただ 1 つの三葉結び目であり, 一方, $g(K_{3,3,1,1})$ が含む非自明結び目は, ある 2 つの 8 サイクルの像として実現されるちょうど 2 つの三葉結び目である (小原-鈴木 [9]). このことから, 系 3.2 の左辺は f に対し 1 となるので, 系 3.2 は最良の結果であり, 一方, g に対しては 2 となるので, 系 3.2 の左辺は $\mathbb{Z}_2$ 上では必ずしも 1 と合同となるわけではない.

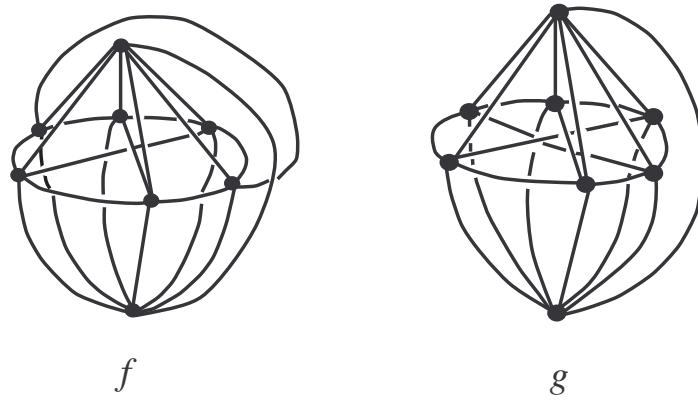


図 3.1: $f, g : K_{3,3,1,1} \rightarrow \mathbb{R}^3$

4. ΔY 変換と $K_{3,3,1,1}$ 族

グラフ G_Δ において, G_Δ の 3 サイクル $\Delta = \overline{uv} \cup \overline{vw} \cup \overline{wu}$ に対し, $\overline{uv}, \overline{vw}, \overline{wu}$ を取り除き, 新しい頂点 x 及び 3 辺 $\overline{ux}, \overline{vx}, \overline{wx}$ を加えてできるグラフを G_Y とおく ($Y = \overline{ux} \cup \overline{vx} \cup \overline{wx}$ とする). このとき, G_Δ から G_Y を得る操作を ΔY 変換といい, 逆に G_Y から G_Δ を得る操作を $Y\Delta$ 変換という (図 4.1).

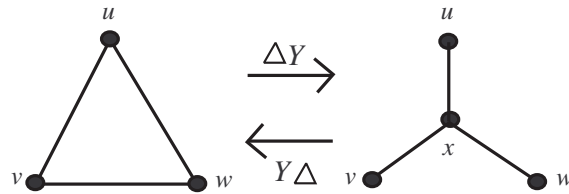


図 4.1: ΔY 変換, $Y\Delta$ 変換

このとき, 次が知られている.

命題 4.1 (Motwani-Ragunathan-Saran [10]) G_Δ が結び目内在ならば, G_Y も結び目内在である.

グラフ H に対し, H から ΔY 変換及び $Y\Delta$ 変換の有限列で得られるグラフの同型類の集合を H 族と呼び, $\mathcal{F}(H)$ で表す. 特に H から ΔY 変換のみの有限列で得られるグラフの同型類の集合を $\mathcal{F}_\Delta(H)$ で表す. 定理 2.1, 定理 2.3 により, $\mathcal{F}_\Delta(K_7)$, $\mathcal{F}_\Delta(K_{3,3,1,1})$ に属する任意のグラフは結び目内在であり, 更にマイナーミニマルであることも知られている (小原-鈴木 [9]). そこで $\mathcal{F}_\Delta(K_7)$ に属する任意のグラフについては, 以下の通り, 既に整数版 Conway-Gordon 型定理が与えられている.

定理 4.2 (新國-谷山 [12]) $\mathcal{F}_\Delta(K_7)$ に属するグラフ G において, ある写像 $\omega : \Gamma(G) \cup \Gamma^{(2)}(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ が存在して, $\text{SE}(G)$ の任意の元 f に対し,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(G)} \omega(\gamma) a_2(f(\gamma)) = 2 \sum_{\gamma \in \Gamma^{(2)}(G)} \omega(\gamma) \text{lk}(f(\gamma))^2 - 21.$$

系 4.3 $\mathcal{F}_\Delta(K_7)$ に属するグラフ G において, $\Gamma(G)$ のある部分集合 Γ が存在して, $\text{SE}(G)$ の任意の元 f に対し,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} a_2(f(\gamma)) \equiv 1 \pmod{2}.$$

注意 4.4 $\mathcal{F}(K_7) \setminus \mathcal{F}_\Delta(K_7)$ に属する任意のグラフは結び目内在ではないことが知られている (Flapan-Naimi [3], 花本-新國-谷山-山崎 [8]).

今回, $\mathcal{F}_\Delta(K_{3,3,1,1})$ に属する任意のグラフに対し, 次が成り立つことを示した.

定理 4.5 $\mathcal{F}_\Delta(K_{3,3,1,1})$ に属するグラフ G において, ある写像 $\omega : \Gamma(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ が存在して, $\text{SE}(G)$ の任意の元 f に対し

$$\sum_{\gamma \in \Gamma(G)} \omega(\gamma) a_2(f(\gamma)) \geq 1.$$

注意 4.6 マイナーミニマルな結び目内在グラフは, $\mathcal{F}_\Delta(K_7)$, $\mathcal{F}_\Delta(K_{3,3,1,1})$ に属するもの以外にも多く知られている. Foisy [5] では $\mathcal{F}_\Delta(K_7) \cup \mathcal{F}_\Delta(K_{3,3,1,1})$ に属さないマイナーミニマルな結び目内在グラフの存在が示され, また, Goldberg-Mattman-Naimi [7] では, $\mathcal{F}(K_{3,3,1,1}) \setminus \mathcal{F}_\Delta(K_{3,3,1,1})$ に属する任意のグラフはマイナーミニマルな結び目内在グラフであると報告されている. これらのグラフについてある種の Conway-Gordon 型定理が成り立つかどうかは, まだ調べられていない.

5. 直線型空間グラフへの応用

我々の主結果の直線型空間グラフへの応用について述べる. 直線型空間グラフは, 分子トポロジーにおいて, 分子化合物の数学的モデルとして自然に現れる概念である. 図 5.1 は $K_{3,3,1,1}$ の直線型空間埋め込みの例である (図 3.1 の g). 一般に完全グラフは, 空間曲線 (t, t^2, t^3) の上に全ての頂点を置き, どの 2 頂点の間も直線分で結ぶことで, 直線型空間埋め込みを持つ. 従って任意の単純グラフは直線型空間埋め込みを持つ.

今回, 定理 3.1, 及び結び目の棒数の理論の応用により, 以下を示した.

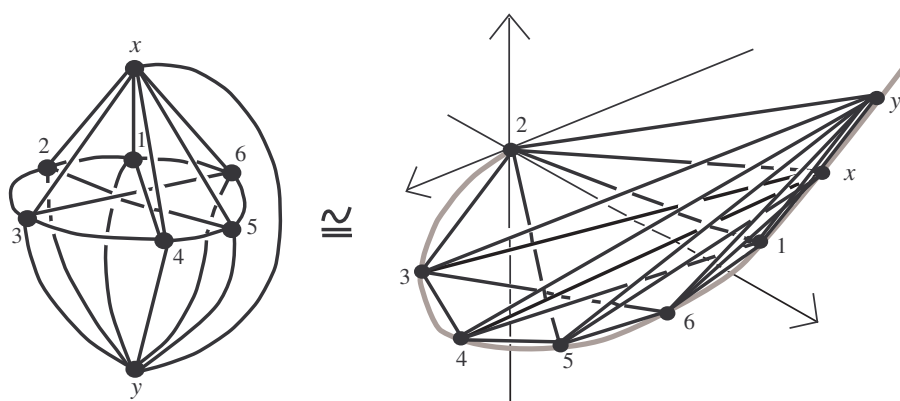


図 5.1: $K_{3,3,1,1}$ の直線型空間埋め込み

定理 5.1 $\text{RSE}(K_{3,3,1,1})$ の任意の元 f に対し,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_8(K_{3,3,1,1})} a_2(f(\gamma)) \geq 1.$$

系 5.2 $\text{RSE}(K_{3,3,1,1})$ の任意の元 f に対し, ある Hamilton サイクル $\gamma \in \Gamma_8(K_{3,3,1,1})$ が存在して, $a_2(f(\gamma)) > 0$.

即ち, 問 2.5 (2) は肯定的に解かれた. ちなみに, K_7 の任意の直線型空間埋め込みの像は, 三葉結び目を, ある Hamilton サイクルの像として必ず含むことが知られているが (Brown [1], Ramírez Alfonsín [13], 新國 [11]), $K_{3,3,1,1}$ の場合に, 系 5.2 の非自明結び目の型を三葉結び目に特定できるかどうかは未解決である.

今回の研究において, 最後に問 2.5 (1) が未解決のまま残ってしまった. いつか完全に決着したい.

参考文献

- [1] A. F. Brown, Embeddings of graphs in E^3 , Ph. D. Dissertation, Kent State University, 1977.
- [2] J. H. Conway and C. McA. Gordon, Knots and links in spatial graphs, *J. Graph Theory* **7** (1983), 445–453.
- [3] E. Flapan and R. Naimi, The Y-triangle move does not preserve intrinsic knottedness, *Osaka J. Math.* **45** (2008), 107–111.
- [4] J. Foisy, Intrinsically knotted graphs, *J. Graph Theory* **39** (2002), 178–187.
- [5] J. Foisy, A newly recognized intrinsically knotted graph, *J. Graph Theory* **43** (2003), 199–209.

- [6] J. Foisy and L. Ludwig, When graph theory meets knot theory, *Communicating mathematics*, 67–85, Contemp. Math., **479**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [7] N. Goldberg, T. Mattman and R. Naimi, Many, many more intrinsically knotted graphs, preprint. (arXiv:math.1109.1632)
- [8] R. Hanaki, R. Nikkuni, K. Taniyama and A. Yamazaki, On intrinsically knotted or completely 3-linked graphs, *Pacific J. Math.* **252** (2011), 407–425.
- [9] T. Kohara and S. Suzuki, Some remarks on knots and links in spatial graphs, *Knots 90 (Osaka, 1990)*, 435–445, de Gruyter, Berlin, 1992.
- [10] R. Motwani, A. Raghunathan and H. Saran, Constructive results from graph minors: Linkless embeddings, *29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE*, 1988, 398–409.
- [11] R. Nikkuni, A refinement of the Conway-Gordon theorems, *Topology Appl.* **156** (2009), 2782–2794.
- [12] R. Nikkuni and K. Taniyama, ΔY -exchanges and the Conway-Gordon theorems, *J. Knot Theory Ramifications*, to appear. (arXiv:math.1104.0828)
- [13] J. L. Ramírez Alfonsín, Spatial graphs and oriented matroids: the trefoil, *Discrete Comput. Geom.* **22** (1999), 149–158.