

The maximal degree of the Khovanov homology under twisting

東京工業大学大学院理工学研究科
田神 慶士

概要

本稿では, Khovanov ホモロジーと呼ばれる絡み目不変量に対して, そのホモロジーが非自明となる最大のホモロジー次数と絡み目のひねりの間の関係について得られた結果を報告する.

1 はじめに

Khovanov [3] は絡み目 L に対し, 次数付き加群の構造を持ったホモロジー型の絡み目不変量であって, その次数付き Euler 標数が絡み目 L の Jones 多項式となっているものを定義した. これを Khovanov ホモロジーと呼び, $\mathrm{KH}^{i,j}(L)$ と書くことにする. ただし, i はそのホモロジー次数であり, j はその次数付き加群の構造を表す.

絡み目 L に対し, その Khovanov ホモロジーが非自明となる最大のホモロジー次数 $i_{\max}(L) := \max\{i \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{KH}^i(L) \neq 0\}$ には次のような性質がある.

命題 1.1. 絡み目 L に対し, 次の不等式が成り立つ.

$$i_{\max}(L) \leq c_+(L) := \min\{c_+(D) \mid D \text{ は } L \text{ の図式}\},$$

ここで, $c_+(D)$ は図式 D の positive 交差の数である.

よって, $i_{\max}$ を調べることで絡み目の positivity を評価することができる.

Stošić [4] は $(2k, 2kn)$ -トーラス絡み目 $T_{2k, 2kn}$ に対し, その Khovanov ホモロジーが非自明となる最大のホモロジー次数について, 次の結果を示した.

定理 1.2 ([4]). 正整数 $k, n \geq 1$ に対し, $i_{\max}(T_{2k, 2kn}) = 2k^2n$ となる.

この定理の証明に用いた手法を適用することで, $(2k+1, (2k+1)n)$ -トーラス絡み目 $T_{2k+1, (2k+1)n}$ に対しても次の類似の結果が得られた ([5]).

定理 1.3 ([5]). 正整数 $k, n \geq 1$ に対し, $i_{\max}(T_{2k+1, (2k+1)n}) = 2k(k+1)n$ となる.

さらに, 同様の手法を精密化することで, より一般に, 任意の結び目 K の (p, pn) -ケーブル絡み目 $K(p, pn)$ についても類似の結果 (定理 1.4) が成り立つことがわかった ([5]).

定理 1.4 ([5]). K を結び目, k を正整数, n を $c_+(K)$ 以上の正整数とする. $K(p, pn)$ を結び目 K の (p, pn) -ケーブル絡み目とする. このとき, 次のことが成り立つ.

$$i_{\max}(K(2k, 2kn)) = 2k^2n,$$

$$2k(k+1)n \leq i_{\max}(K(2k+1, (2k+1)n)) \leq 2k(k+1)n + c_+(K).$$

定理 1.4 において K を自明な結び目とすれば $K(p, pn) = T_{p, pn}$ となるので, 直ちに定理 1.2 と 1.3 が得られる. 従って, 定理 1.4 は定理 1.2 と 1.3 の一つの拡張を与えている. この定理から次の系が得られる.

系 1.5. 任意の結び目 K について次が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i_{\max}(K(p, pn))}{n} = \begin{cases} 2k^2 & \text{if } p = 2k, \\ 2k(k+1) & \text{if } p = 2k+1. \end{cases}$$

この結果は絡み目にフルツイストを加えたときの漸近挙動を表していると思えるので, 自然に次のことが問題となる.

問 1.6. 任意の絡み目の適当なところにフルツイストを加えたときの漸近挙動は系 1.5 と同様の挙動を示すか?

問 1.6 を正確に書くと次のようになる.

L を向きづけられた絡み目とし, C_p を L と p 個の点で横断的に交わる円板とする. このとき, 円板は L との交点がすべて同じ方向から交わっているようにとる. このとき, 正整数 n に対し, 絡み目 L を円板 C_p のところで n 回フルツイストして得られる絡み目を $t_n(L; C_p)$ とする (図 1 参照).

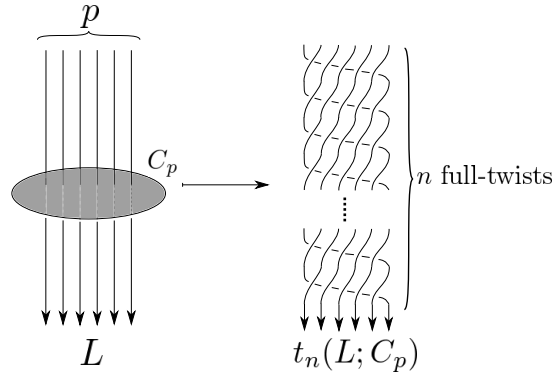


図 1: 絡み目 L を円板 C_p のところで n 回フルツイストして得られる絡み目を $t_n(L; C_p)$ と表す.

このとき, 問 1.6 は次のように書ける.

問 1.7. 任意の絡み目 L と上のような任意の円板 C_p に対し, 次のことが成り立つか?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i_{\max}(t_n(L; C_p))}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i_{\max}(K(p, pn))}{n}.$$

本稿では問 1.7 の $p = 2$ の場合について得られた次の結果を報告する.

定理 1.8. L を絡み目とし, C を図 2 のような円板とする. このとき次が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max\{i \in \mathbf{Z} \mid \mathrm{KH}^i(t_{n/2}(L; C)) \neq 0\}}{n} = 1,$$

ここで, $t_{n/2}(L; C)$ は絡み目 L を円板 C のところで n 回ハーフツイストして得られる絡み目とする.

注意 1.9. 定理 1.8 において n はハーフツイストの回数を表している. 定理 1.8 から問 1.7 の $p = 2$ の場合はただちに従う.

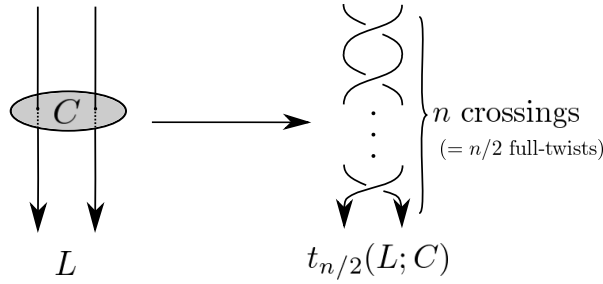


図 2: 絡み目 L の平行な二本の弧を円板 C のところで $n/2$ 回フルツイストを加えて得られる絡み目 $t_{n/2}(L; C)$.

2 Khovanov ホモロジー

この章では Khovanov ホモロジーの定義と定理 1.8 を示すのに必要な性質を紹介する.

2.1 Khovanov ホモロジーの定義

ここでは (有理係数) Khovanov ホモロジーの定義を与える.

L を絡み目とし, D を絡み目 L の図式とする. 図式 D の交点の集合には順序が与えられているとする. 図式 D の各交点に対し, 0-smoothing と 1-smoothing を図 3 のように定める. 図式 D の各交点を 0-smoothing もしくは 1-smoothing したものを図式 D の smoothing と呼ぶ. 各 smoothing は平面上の非交和な円周の集まりとなる. 図式 D の交点数を m とすると, 図式

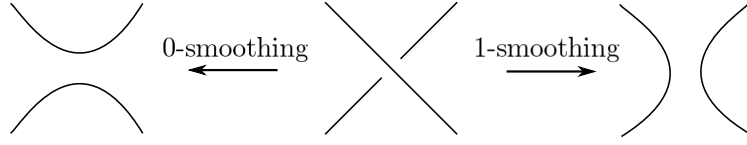


図 3: 0-smoothing と 1-smoothing.

D は 2^m 個の smoothing を持つ．図式 D に与えられた交点の順序を用いることで，図式 D の集合と $\{0, 1\}^m$ の間には自然な全単射が存在する．すなわち，各 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \{0, 1\}^m$ に対し，図式 D の smoothing D_ε を対応させる．ここで， D_ε は図式 D の i 番目の交点を ε_i -smoothing することで得られる smoothing を表す．

V を 1 と X を基底にもつ $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とする．さらに， $\deg(1) = 1$ ， $\deg(X) = -1$ とすることで V に次数付き加群の構造を入れる． k_ε を smoothing D_ε に含まれる円周の数とし， $M_\varepsilon := V^{\otimes k_\varepsilon}$ と定める．各 $v = v_1 \otimes \dots \otimes v_{k_\varepsilon} \in M_\varepsilon$ に対し $\deg(v) := \deg(v_1) + \dots + \deg(v_{k_\varepsilon})$ とすることで M_ε にも次数付き加群の構造が定まる．このとき， $C^i(D)$ を次のように定める．

$$C^i(D) := \bigoplus_{|\varepsilon|=i} M_\varepsilon\{i\},$$

ただし， $|\varepsilon| = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i$ であり， $M_\varepsilon\{i\}$ は M_ε の次数を i だけ動かしたものである（一般に次数付き加群の構造をもったベクトル空間 $M = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} M^j$ と整数 i に対し， $M\{i\} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} M^j\{i\}$ は $M\{i\}^j = M^{j-i}$ と定義される）．

次に境界作用素 $d^i: C^i(D) \rightarrow C^{i+1}(D)$ を定義する．二つの元 $\varepsilon, \varepsilon' \in \{0, 1\}^m$ で，ある j において $\varepsilon_j = 0$ かつ $\varepsilon'_j = 1$ であり， $i \neq j$ において $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$ となるものをとる．各 smoothing D_ε ごとにその円周の順序を一つ固定し， M_ε の i 番目のテンソル成分と D_ε の i 番目の円周を対応付ける．まず， $d_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon'}: M_\varepsilon \rightarrow M_{\varepsilon'}$ を次のように定める．

[Case 1] ε の j 成分が 0 から 1 に変わると， D_ε の 2 つの円周がくっついて， $D_{\varepsilon'}$ の 1 つの円周となるとき．

このとき，写像 $d_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon'}: M_\varepsilon \rightarrow M_{\varepsilon'}$ を，くっつく二つの円周に対応する M_ε のテンソル成分上 $m: V \otimes V \rightarrow V$ で定義し，それ以外の円周と対応するテンソル成分上では恒等射とする．ここで， m は次で定義される写像である．

$$m(1 \otimes 1) = 1, m(1 \otimes X) = m(X \otimes 1) = X, m(X \otimes X) = 0.$$

[Case 2] ε の j 成分が 0 から 1 に変わると， D_ε の 1 つの円周が分裂して， $D_{\varepsilon'}$ の 2 つの円周となるとき．

このとき，写像 $d_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon'}: M_\varepsilon \rightarrow M_{\varepsilon'}$ を，分裂する 1 つの円周に対応する M_ε のテンソル成分上 $\Delta: V \rightarrow V \otimes V$ で定義し，それ以外の円周と対応するテンソル成分上では恒等射とする．ここで， Δ は次で定義される写像である．

$$\Delta(1) = 1 \otimes X + X \otimes 1, \Delta(X) = X \otimes X.$$

もしも、異なる整数 i と j が存在して $\varepsilon_i \neq \varepsilon'_i$ かつ $\varepsilon_j \neq \varepsilon'_j$ となるときは、便宜上 $d_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon'} = 0$ と定める。

以上の準備のもとで写像 $d^i: C^i(D) \rightarrow C^{i+1}(D)$ を次のように定める。

$$d^i(v) := \sum_{|\varepsilon'|=i+1} (-1)^{l(\varepsilon, \varepsilon')} d_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon'}(v),$$

ここで、 $|\varepsilon'|$ は ε' に含まれる 1 の数、 $v \in M_\varepsilon \subset C^i(D)$ とし $l(\varepsilon, \varepsilon')$ を ε と ε' の間で異なる（ただ一つの）成分よりも（与えられた順序の意味で）前にある 1 の数とする。

このとき、 $(C^i(D), d^i)$ は鎖複体となる。これから得られるホモロジーを $H^i(D)$ と表し、図式 D の unnormalized ホモロジー群と呼ぶ。写像 d^i が $C^i(D)$ の次数付き加群の構造を保つことから、 $H^i(D)$ にも自然に次数付き加群の構造が定まる。最後に、図式 D の Khovanov ホモロジー $\mathrm{KH}^{i,j}(D)$ を次のように定める。

$$\mathrm{KH}^{i,j}(D) := H^{i+n_-, j-n_++2n_-}(D),$$

ここで、 n_+ と n_- はそれぞれ 図式 D の positive と negative 交差の数である。Khovanov ホモロジーの基本的な性質として次のことが知られている。

定理 2.1 ([1], [3]). 任意の絡み目 L とその図式 D に対し、ホモロジー群 $\mathrm{KH}(D)$ は図式 D と D の交点の順序の取り方に依らない。従って、 $\mathrm{KH}(D)$ は絡み目 L の不変量となる。この意味で $\mathrm{KH}(L) = \mathrm{KH}(D)$ と表す。さらに、 $\mathrm{KH}(L)$ の次数付き Euler 標数は絡み目 L の Jones 多項式と一致する。すなわち、次の等式が成立する。

$$V_L(t) = (q + q^{-1})^{-1} \sum_{i,j \in \mathbf{Z}} (-1)^i q^j \mathrm{rank} \mathrm{KH}^{i,j}(L) \Big|_{q=-t^{\frac{1}{2}}},$$

ここで $V_L(t)$ は絡み目 L の Jones 多項式である。

2.2 定理 1.8 を示すための性質

定理 1.8 を示すために次の結果を紹介する。これは Wehrli [6], Champanerkar-Kofman [2] によって与えられた Khovanov ホモロジーの spanning tree モデルから従う結果である。

図式 D の 0-smoothing とは D のすべての交点を 0-smoothing して得られる smoothing のことである（図 3 を参照）。同様に図式 D の 1-smoothing も定義する。このとき、次が成り立つ。

定理 2.2. [[6], [2]] D を絡み目図式とする。このとき、 $H^{i,j}(D) \neq 0$ ならば次が成り立つ。

$$s_1(D) - 2 - c(D) \leq j - 2i \leq 2 - s_0(D),$$

ここで、 $c(D)$ は D の交点数であり、 $s_0(D)$ と $s_1(D)$ はそれぞれ図式 D の 0-smoothing と 1-smoothing にあらわれる円周の数である。

3 定理 1.8 の証明

この章では定理 1.8 の証明を与える．そのためにまず，次の補題を用意する．

L_0 を向き付けられた絡み目とし， D_0 をその図式とする． D_n を図 4 にあるような $t_{n/2}(L; C)$ の図式とする． $L_n := t_{n/2}(L_0; C)$ とする．

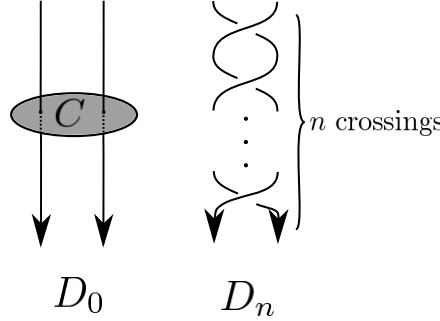


図 4: 図式 D_0, D_n .

このとき，Jones 多項式のスkein 関係式より，次のことがわかる．

補題 3.1. ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \geq N$ に対し，次が成り立つ．

$$\maxdeg V_{L_{n+1}}(t) - \maxdeg V_{L_n}(t) = \frac{3}{2},$$

ここで， $V_L(t)$ は絡み目 L の Jones 多項式であり， $\maxdeg V_L(t)$ は Jones 多項式の最高次数である．

定理 1.8 の証明 L_0, L_n, D_0 および D_n を上のように定める．すぐわかるように， $s_0(D_n) = s_0(D_0)$ である．ここで， $s_0(D_0)$ と $s_0(D_n)$ は定理 2.2 で与えられたものである．定理 2.2 より， $H^{i,j}(D_n) \neq 0$ ならば，次を満たす．

$$j - 2i \leq 2 - s_0(D_0). \quad (3.1)$$

ここで，Khovanov ホモロジーの次数付き Euler 標数が Jones 多項式と一致する（定理 2.1）ので任意の図式 D に対し，

$$\max\{j \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{KH}^{*,j}(D) \neq 0\} \geq 2 \maxdeg V_D(t) + 1$$

が成り立つ．さらに，定義から次が成り立つ．

$$\max\{j \in \mathbb{Z} \mid H^{*,j}(D) \neq 0\} \geq 2 \maxdeg V_D(t) + 1 - c_+(D) + 2c_-(D), \quad (3.2)$$

ここで， $c_+(D)$ と $c_-(D)$ はそれぞれ図式 D の positive と negative 交差の数である．そこで， $f(D_n) := 2 \maxdeg V_{L_n}(t) + 1 - c_+(D_n) + 2c_-(D_n)$ ， $k(D_n) := \frac{1}{2}(f(D_n) - 2 + s_0(D_0))$ とおく．式 (3.1) と (3.2) および H^i の定義から次が成り立つ（図 5 参照）．

$$k(D_n) \leq \max\{i \in \mathbb{Z} \mid H^i(D_n) \neq 0\} \leq c(D_n) = c(D_0) + n. \quad (3.3)$$

補題 3.1 により, ある自然数 $N \in \mathbf{N}$ が存在して任意の $n \geq N$ に対し, $k(D_{n+1}) - k(D_n) = 1$ となる. 特に, $k(D_{n+1}) = n - N + k(D_{N+1})$ となる. 式 (3.3) により,

$$n - N + k(D_{N+1}) \leq \max\{i \in \mathbf{Z} \mid \mathrm{KH}^i(L_n) \neq 0\} + c_-(D_0) \leq c(D_0) + n$$

となる. 従って, 定理 1.8 が成立する. $\square$

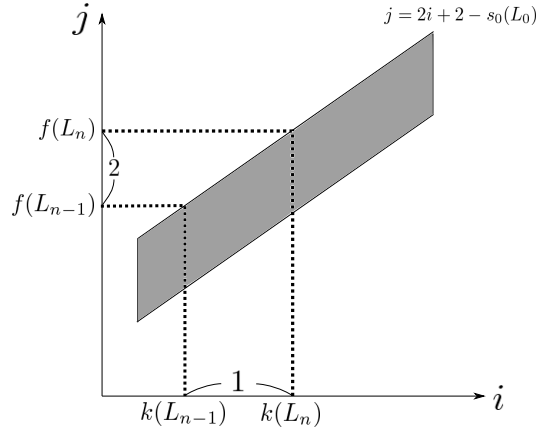


図 5: 色のついていない領域では, $\mathrm{rank} H^{i,j} = 0$.

参考文献

- [1] D. Bar-Natan, *On Khovanov's categorification of the Jones polynomial*, *Algebr. Geom. Topol.* **2** (2002), 337–370 (electronic). MR 1917056 (2003h:57014)
- [2] A. Champanerkar and I. Kofman, *Spanning trees and Khovanov homology*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), no. 6, 2157–2167. MR 2480298 (2009m:57019)
- [3] M. Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial*, *Duke Math. J.* **101** (2000), no. 3, 359–426. MR 1740682 (2002j:57025)
- [4] M. Stošić, *Khovanov homology of torus links*, *Topology Appl.* **156** (2009), no. 3, 533–541. MR 2492301 (2011b:57008)
- [5] K. Tagami, *The maximal degree of the Khovanov homology of a cable links*, preprint (Tokyo Institute of Technology, 2012).
- [6] S. Wehrli, *A spanning tree model for Khovanov homology*, *J. Knot Theory Ramifications* **17** (2008), no. 12, 1561–1574. MR 2477595 (2010d:57016)