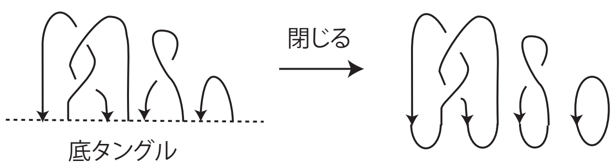
Brunnian 底タングルの普遍 sl_2 不変量について

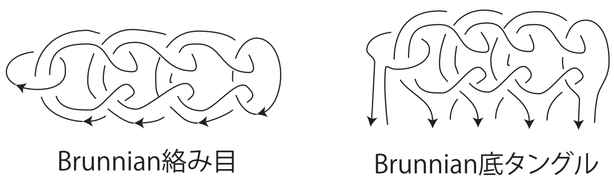
鈴木　咲衣
京都大学大学院理学研究科

1　概要

底タングルとは，立方体 $[0,1]^3$ の中の弧のみからなるタングルで，境界が底に一列に並び，一つの弧の 2 つの境界が隣り合っているようなもののことをいう．ただし，向きと枠を考える．任意の絡み目は底タングルを閉じることにより得られる．



絡み目 L は，L の任意の真部分絡み目が自明になるとき Brunnian 絡み目と呼ばれる．同様に，底タングル T は，T の任意の真部分タングルが自明になるとき Brunnian 底タングルと呼ばれる．



Jones 多項式の一般化である色つき Jones 多項式は，量子展開環 $U_h(sl_2)$ の有限次元表現を絡み目の各成分に指定するごとに得られる絡み目不変量である（[5]）．普遍量子 sl_2 不変量は，色つき Jones 多項式に普遍性を持つ，すなわち，すべての色つき Jones 多項式を導出できるようなタングルの不変量である（[3, 4]）．

ここでは，Brunnian 底タングルの普遍 sl_2 不変量の代数的性質を紹介する（[6]）．

2　量子展開環 $U_h(sl_2)$ のリボンホップ代数構造

この節では，量子展開環 $U_h(sl_2)$ と，そのリボンホップ代数構造を紹介する．次の q-整数を用いる．

$$\{i\}_q = q^i - 1, \quad \{i\}_{q,n} = \{i\}_q\{i-1\}_q \cdots \{i-n+1\}_q, \quad \{n\}_q! = \{n\}_{q,n},$$
$$[i]_q = \{i\}_q/\{1\}_q, \quad [n]_q! = [n]_q[n-1]_q \cdots [1]_q, \quad \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix}_q = \{i\}_{q,n}/\{n\}_q!,$$

$i \in \mathbb{Z}, n \geq 0$. 量子展開環 $U_h(sl_2)$ とは，トポロジカルに H, E, F で生成され，関係式

$$HE - EH = 2E, \quad HF - FH = -2F, \quad EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q^{1/2} - q^{-1/2}},$$

で定義される h 進完備 $\mathbb{Q}[[h]]$-代数である．ただし，

$$q = \exp h, \quad K = q^{H/2} = \exp \frac{hH}{2}$$

とおいた．

$U_h(sl_2)$ の完備化された n 重テンソル積を $U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$ と書く．余積 Δ: $U_h(sl_2) \to U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} 2}$，余単位射 ε: $U_h(sl_2) \to \mathbb{Q}[[h]]$，対合射 S: $U_h(sl_2) \to U_h(sl_2)$ は次で定義される．

$$\Delta(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H, \quad \varepsilon(H) = 0, \quad S(H) = -H,$$
$$\Delta(E) = E \otimes 1 + K \otimes E, \quad \varepsilon(E) = 0, \quad S(E) = -K^{-1}E,$$
$$\Delta(F) = F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F, \quad \varepsilon(F) = 0, \quad S(F) = -FK.$$

普遍 R-行列とその逆元は次で与えられる．

$$R = D\big(\sum_{i \geq 0} q^{\frac{1}{2}i(i-1)} \tilde{F}^{(i)} K^{-i} \otimes e^i\big), \quad R^{-1} = D^{-1}\big(\sum_{i \geq 0} (-1)^i \tilde{F}^{(i)} \otimes K^{-i} e^i\big),$$

ただし

$$e = q^{-1/2}(q-1)E, \quad \tilde{F}^{(i)} = \frac{F^i K^i}{[i]_q!}, \quad D = q^{\frac{1}{4} H \otimes H} = \exp\big(\frac{h}{4} H \otimes H\big),$$

$i \geq 1$. 以下 $R = \sum_k \alpha_k \otimes \beta_k$, $R^{-1} = \sum_k \bar{\alpha}_k \otimes \bar{\beta}_k$ とおく．リボン元とその逆元は次で与えられる．

$$r = \sum_k \bar{\alpha}_k K^{-1} \bar{\beta}_k = \sum_k \bar{\beta}_k K \bar{\alpha} k, \quad r^{-1} = \sum_k \alpha_k K \beta_k = \sum_k \beta_k K^{-1} \alpha_k.$$

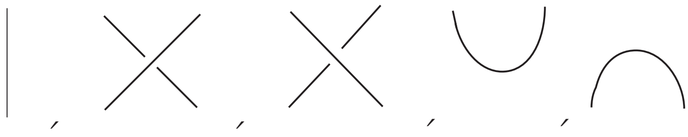


図 1: 基本図．向きは任意.

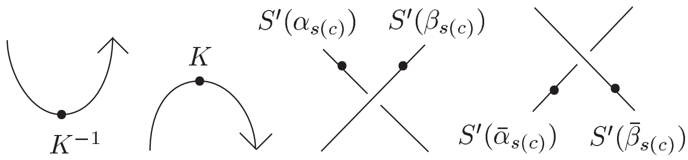


図 2: 基本図へのラベルの置き方.

3　底タングルの普遍 sl_2 不変量

この節では，底タングルの普遍 sl_2 不変量の定義をする．n 成分底タングル $T = T_1 \cup \cdots \cup T_n$ に対して，T の普遍 sl_2 不変量 $J_T \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$ を以下で定める．まず T の図式 P を一つ選び，その交点の集合を $C(P)$ とおく．ただし P は基本図（図 1 参照）を縦と横につなげて得られる絡み目図式とする．射

$$s\colon\ C(P) \ \ \to \ \ \{0, 1, 2, \ldots\}$$

を図式 P のステイトと呼ぶ．図式 P のステイトの集合を $S(P)$ と書く．各ステイト $s \in S(P)$ に対して，$U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$ の元 $J(P, s)$ を以下で定める．まず図式 P の各基本図 に対して，図 2 のようにラベルを貼る．(図 2 にない基本図にはラベルを貼らない.）ここで “S'” は，紐の向きが下向きのとき id に，上向きのとき S に置き換える．$J(P, s) \in U_h(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$ のテンソル積の i 成分を，T_i 成分に置かれたラベルの積で定義する．ここで，ラベルは紐を逆向きにたどりながら読み，読んだ順に左から右へ書く，という方法で積をとる． 例えば, 図 3 の底タングル C の図式 P については

$$J(P, s) = S(\alpha_i)S(\beta_j) \otimes \alpha_j \beta_i \bar{\alpha}_k K S(\bar{\beta}_k).$$

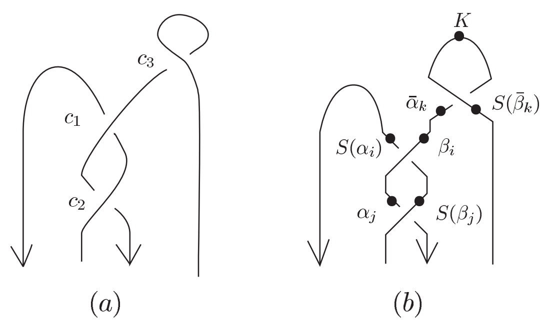


図 3: (a) 底タングル C. (b) 底タングル C の図式 P とラベル.

ただし $s(c_1)=i, s(c_2)=j, s(c_3)=k$ とおいた．すると，$J(P,s)$ のステイト和

$$J_T = \sum_{s\in S(P)} J(P,s)$$

は T の図式の取り方によらない値となり，底タングルの不変量を定める (cf. [4])．先ほどの例では

$$\begin{aligned}
J_C &= \sum_{i,j,k} S(\alpha_i)S(\beta_j)\otimes \alpha_j\beta_i\bar{\alpha}_k KS(\bar{\beta}_k) \\
&= \sum_{i,j,k} (-1)^{i+j} q^{-\frac{1}{2}k(k-1)-j^2+2ij-3jk+2ki} \begin{bmatrix} j+k \\ j \end{bmatrix}_q \\
&\qquad \times D^{-2}(1\otimes q^{\frac{1}{4}H(H+2)})(\tilde{F}^{(i)}K^{-2j}e^j \otimes \tilde{F}^{(j+k)}K^{2(j-i)}e^{k+i})
\end{aligned}$$

となる．

4　主定理とその応用

この節では，Brunnian 底タングルの普遍 sl_2 不変量に関する主定理（定理 1）と，色つき Jones 多項式に対する応用（定理 2）を紹介する．

$K^{\pm 2}, e, \tilde{F}^{(i)}, i\geq 1$ で生成される $U_h(sl_2)$ の $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-部分代数を $\mathcal{U}_q^{\mathrm{ev}}$ とする．$\mathcal{U}_q^{\mathrm{ev}}$ の，フィルトレーション $\mathcal{F}_k(\mathcal{U}_q^{\mathrm{ev}}) = \mathcal{U}_q^{\mathrm{ev}} e^k \mathcal{U}_q^{\mathrm{ev}}, k\geq 0$ を用いた完備化を $\tilde{\mathcal{U}}_q^{\mathrm{ev}}$ とする．すなわち

$$\tilde{\mathcal{U}}_q^{\mathrm{ev}} = \mathrm{Image}\big(\varprojlim_k \mathcal{U}_q^{\mathrm{ev}}/\mathcal{F}_k(\mathcal{U}_q^{\mathrm{ev}}) \to U_h(sl_2)\big).$$

同様に，$(\mathcal{U}_q^{\mathrm{ev}})^{\otimes n}$ のフィルトレーション

$$\mathcal{F}_k((\mathcal{U}_q^{\mathrm{ev}})^{\otimes n}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{U}_q^{\mathrm{ev}})^{\otimes i-1}\otimes \mathcal{F}_k(\mathcal{U}_q^{\mathrm{ev}})\otimes (\mathcal{U}_q^{\mathrm{ev}})^{\otimes n-i}, \quad k\geq 0$$

を用いた完備化を $(\tilde{\mathcal{U}}_q^{\mathrm{ev}})^{\tilde{\otimes} n}$ とする．algebraically split な n 成分底タングルの普遍 sl_2 不変量は $(\tilde{\mathcal{U}}_q^{\mathrm{ev}})^{\tilde{\otimes} n}$ に含まれることが知られている ([2])．

$K^{\pm 2}, \tilde{E}^{(i)} = \frac{(q^{-1/2}E)^i}{[i]_q!}, \tilde{F}^{(i)}$ で生成される $U_h(sl_2)$ の $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-部分代数を $U_{\mathbb{Z},q}^{\mathrm{ev}}$ とする．$K^{\pm 2}, e, f := (q-1)FK$ で生成される $U_h(sl_2)$ の $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-部分代数を $\bar{U}_q^{\mathrm{ev}}$ とする．このとき $\bar{U}_q^{\mathrm{ev}} \subset \mathcal{U}_q^{\mathrm{ev}} \subset U_{\mathbb{Z},q}^{\mathrm{ev}}$ が成り立つ．

$(\mathcal{U}_q^{\mathrm{ev}})^{\otimes n}$ の $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$-部分代数 X に対して，フィルトレーション $\{\mathcal{F}_k((\mathcal{U}_q^{\mathrm{ev}})^{\otimes n})\cap X\}_{k\geq 0}$ を用いた X の完備化を $\{X\}^{\hat{}}$ と記す．

定理 1. *T を n 成分 Brunnian 底タングルとする*（$n\geq 3$）．*このとき*

$$J_T \in \bigcap_{i=1}^{n} \Big\{\Big((\bar{U}_q^{\mathrm{ev}})^{\otimes i-1}\otimes U_{\mathbb{Z},q}^{\mathrm{ev}}\otimes (\bar{U}_q^{\mathrm{ev}})^{\otimes n-i}\Big)\cap (\mathcal{U}_q^{\mathrm{ev}})^{\otimes n}\Big\}^{\hat{}}$$

が成り立つ．

次に主定理の応用を紹介する．$\mathbb{Q}(q^{1/2})$-加群

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}(q^{1/2})}\{V_l \mid l \geq 1\}, \quad V_l : l \text{ 次元既約表現}$$

にテンソル積で積を定めた環を $\mathcal{R}$ とする．

$l \geq 0$ に対して，

$$\tilde{P}'_l = \frac{q^{\frac{1}{2}l}}{\{l\}_q!} \prod_{i=0}^{l-1} (V_2 - q^{i+\frac{1}{2}} - q^{-i-\frac{1}{2}})$$

とおく．

絡み目 $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ の L_i を $\tilde{P}'_{l_i}$ で色付けした色つき Jones 多項式を $J_{L;\tilde{P}'_{l_1},\ldots,\tilde{P}'_{l_n}}$ と記す．$l \geq 0$ に対して，I_l を $\{l-k\}_q!\{k\}_q!$, $k = 0, \ldots, l$ で生成される $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ のイデアルとする．

定理 2. *L を n 成分 Brunnian 絡み目とする（$n \geq 3$）．このとき，$l_1, \ldots, l_n \geq 0$ に対して*

$$J_{L;\tilde{P}'_{l_1},\ldots,\tilde{P}'_{l_n}} \in \frac{\{2l_{\max}+1\}_{q,l_{\max}+1}}{\{1\}_q\{l_{\min}\}_q!} \prod_{1 \leq i \leq n, i \neq i_M, i_m} I_{l_i}$$

が成り立つ．ただし $l_{\max} = \max(l_1, \ldots, l_n)$, $l_{\min} = \min(l_1, \ldots, l_n)$, また i_M, i_m, $i_M \neq i_m$ はそれぞれ $l_{i_M} = l_{\max}$, $l_{i_m} = l_{\min}$ となる整数とした．

例 3. *$m \geq 0$ に対して，Φ_m を q に関する m-円分多項式とする．L を n 成分 Brunnian 絡み目とする（$n \geq 3$）．定理 2 で $l_1 = \cdots = l_n = 1, 2, 3$ とすると*

$$\begin{aligned}
J_{L;\tilde{P}'_1,\ldots,\tilde{P}'_1} &\in \Phi_1^{n-2}\Phi_2\Phi_3\mathbb{Z}[q,q^{-1}], \\
J_{L;\tilde{P}'_2,\ldots,\tilde{P}'_2} &\in \Phi_1^{2(n-2)}\Phi_3\Phi_4\Phi_5\mathbb{Z}[q,q^{-1}], \\
J_{L;\tilde{P}'_3,\ldots,\tilde{P}'_3} &\in \Phi_1^{3(n-2)}\Phi_2^{n-1}\Phi_4\Phi_5\Phi_6\Phi_7\mathbb{Z}[q,q^{-1}]
\end{aligned}$$

となる．

例 4. *$n \geq 3$ に対して，M_n を Milnor の n 成分 Brunnian 絡み目とする（図 4 参照）．このとき*

$$J_{M_n;\tilde{P}'_1,\ldots,\tilde{P}'_1} = (-1)^n q^{-2n+4}\Phi_1^{n-2}\Phi_2^{n-2}\Phi_3\Phi_4^{n-3}$$

が成り立つ．

参考文献

[1] K. Habiro, Bottom tangles and universal invariants. Alg. Geom. Topol. **6** (2006), 1113–1214.

[2] K. Habiro, A unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariants for integral homology spheres. Invent. Math. **171** (2008), no. 1, 1–81.

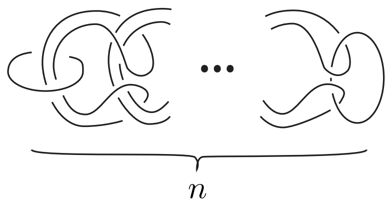


図 4: Milnor の絡み目 M_n.

[3] R. J. Lawrence, A universal link invariant. in: The interface of mathematics and particle phisics (Oxford, 1988), 151–156, Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser., vol. 24, Oxford Univ. Press, New York, 1990.

[4] T. Ohtsuki, Colored ribbon Hopf algebras and universal invariants of framed links. J. Knot Theory Ramifications **2** (1993), no. 2, 211–232.

[5] N. Y. Reshetikhin, V. G. Turaev, Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups. Comm. Math. Phys. **127** (1990), no. 1, 1–26.

[6] S. Suzuki, On the universal sl_2 invariant of Brunnian bottom tangles. arXiv: 1111.6310, 2011.