

WEIGHTS OF MARKOV TRACES FOR ALEXANDER POLYNOMIALS OF MIXED LINKS

山中 仁 (大阪市立大学理学研究科)

1. MIXED LINK

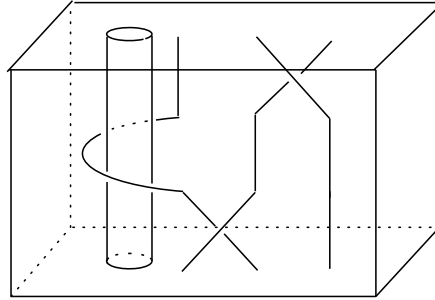
まず天下りの的に mixed link の定義を与えよう.

Definition 1.1. Solid torus 内に埋め込まれた link を **mixed link** という.

3次元球面の標準的な種数1の Heegaard 分解を考えることにより, 以下では mixed link は solid torus の内部の, S^3 における補空間に埋め込まれているものとみなす.

Link theory が braid theory により解釈されるように, mixed link にも対応する “braid theory” が存在する.

Definition 1.2. 立方体から図のように円柱をくり抜いた部分にある braid を **mixed braid** という.



Mixed braid についても closure を考えることができ, Alexander の定理, Markov の定理に相当する命題が成り立つ (Lambropoulou).

通常の braid theory と同様に, n -strands の mixed braid の同値類全体は群をなす. それを $B_{\text{aff},n}$ と書くとき, $B_{\text{aff},n}$ の構造は Lambropoulou により以下のように決定されている.

Lemma 1.3. $B_{\text{aff},n}$ は次の群に同型:

- 生成元 $t_0, \dots, t_{n-1}$
- 基本関係式

$$\begin{aligned} t_0 t_1 t_0 t_1 &= t_1 t_0 t_1 t_0, \\ t_i t_j &= t_j t_i \quad (|i - j| \geq 2), \\ t_i t_{i+1} t_i &= t_{i+1} t_i t_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n - 2). \end{aligned}$$

Remark 1.4. (1) 一般に有限 Coxeter 系 $(W, S = \{s_1, \dots, s_r\})$ に対し, その Artin braid 群 $B_{W,S}$ が

$$B_{W,S} = \langle a_1, \dots, a_r \mid a_i a_j a_i \cdots = a_j a_i a_j \cdots \quad (1 \leq i < j \leq r) \rangle$$

により定義される (ここで関係式において両辺は共に $\text{ord}(s_i s_j)$ 個の元の積). すると $B_{\text{aff},n}$ は B 型の複素単純 Lie 環から生じる Coxeter 系の Artin braid 群に同型になる

ので, Hecke 環を利用して不変量を構成することが期待できる. Solid torus に着目したのはこのためである.

(2) このことの類似として, 3 次元多様体であってその “braid 群” が D 型 Coxeter 系からくる Artin braid 群を与えるものを見つけるという問題が考えられる.

2. MARKOV TRACE

A 型 Iwahori-Hecke 環の場合に Jones が行ったものと同じ議論を行うことにより mixed link の不変量が定義できる. ここでは A, B 型 Iwahori-Hecke 環の双方を含む次の Hecke 環を考える. e, n を正の整数とし, $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(q, u_1, \dots, u_e)$ を有理式体とする.

Definition 2.1. 次で定義される $\mathbb{k}$ 上の結合代数 $H_{e,n}$ を $G(e, 1, n)$ 型の **Ariki-Koike 代数** という.

- 生成元 $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$
- 基本関係式:

$$\begin{aligned} (T_0 - u_1)(T_0 - u_2) \cdots (T_0 - u_e) &= 0 \\ T_0 T_1 T_0 T_1 &= T_1 T_0 T_1 T_0 \\ (T_i - q)(T_i + 1) &= 0 \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ T_i T_j &= T_j T_i \quad (|i - j| \geq 2) \\ T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-2). \end{aligned}$$

Remark 2.2. $e = 1, u_1 = 1$ のとき A_{n-1} 型 Iwahori-Hecke 環, $e = 2, u_1 = -1$ のとき (非等変数) B_n 型 Iwahori-Hecke 環となる.

全体の箱の数が n となるような e 個の Young diagram の順列を **総サイズ n の e -Young diagram** という. Ariki-Koike 代数の有限次元既約表現は総サイズ n の e -Young diagram でパラメトライズされることが知られている. そこで, 総サイズ n の e -Young diagram λ に対応する既約指標を χ_λ で表す.

今, e を固定するとき, 次の自然な帰納系がある:

$$H_{e,1} \subset H_{e,2} \subset \cdots \subset H_{e,n} \subset \cdots$$

この帰納系の極限 (和集合) を H_e で表す.

Lemma 2.3. (Lambropoulou) $z, y_1, \dots, y_e \in \mathbb{k}$ に対し, 線形形式 $\tau : H_e \rightarrow \mathbb{k}$ であって, 次をみたすものが一意的に存在する:

- $\tau(1) = 1$
- $\tau(ab) = \tau(ba) \quad (a, b \in H_{e,n})$
- $\tau(aT_i) = z\tau(a) \quad (a \in H_{e,n}, 1 \leq i \leq n)$
- $\tau(aL_i^j) = y_j\tau(a) \quad (a \in H_{e,n}, 0 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq e-1)$

ここで $L_i = T_i \cdots T_1 T_0 T_1^{-1} \cdots T_i^{-1}$.

今

$$t = \frac{1 - q + z}{qz}$$

とおき, 群準同型 $\pi_n : B_{\text{aff},n} \rightarrow H_{e,n}^\times, \pi_n(t_i) = T_i \quad (0 \leq i \leq n-1)$ を考える.

Mixed link $\hat{\alpha}$ を $\alpha \in B_{\text{aff},n}$ の closure とするとき

$$X_{\hat{\alpha}}(q, t) = \left[-\frac{1 - tq}{t^{\frac{1}{2}}(1 - q)} \right]^{n-1} (t^{\frac{1}{2}})^{wr(\hat{\alpha})} \tau(\pi_n(\alpha)).$$

とおくと, これは mixed link の不変量になる (ここで, $wr(\hat{\alpha})$ は $\hat{\alpha}$ の writhe number).

3. ALEXANDER POLYNOMIALS FOR MIXED LINKS

$X(q, t)$ の定義において, $(1 - tq)^{n-1}$ という項があるためアприオリには $t = q^{-1}$ という特殊化では無意味な量しか得られないように見える. 実は Markov trace $\tau|_{H_{e,n}}$ の weight (すなわち, $H_{e,n}$ の既約指標たちの $\mathbb{k}$ -線形結合として

$$\tau|_{H_{e,n}} = \sum_{\lambda} W_{\lambda} \chi_{\lambda}$$

と表したときの係数 W_{λ} を具体的に与える公式が Geck-Iancu-Malle により与えられており, それを用いると weight W_{λ} が $(t, q$ の多項式 $)/(1 - tq)^{n-1}$ と書けることが分かる. そこで $t = q^{-1}$ と特殊化して得られる量を $\Delta(\hat{\alpha})$ と書くと, これは Alexander 多項式の mixed link 版と思える.

Theorem 3.1. α を mixed braid とし, α_0 を α に現れる t_0 の項を取り除いて得られる braid とする. このとき closure の Alexander 多項式 $\Delta(\hat{\alpha}), \Delta(\hat{\alpha}_0)$ の間には次の関係がある:

$$\Delta(\hat{\alpha}) = \Delta(\hat{\alpha}_0) \sum_{1 \leq p \leq e} C(e, p) u_p^{wr_0(\alpha)} \left(\prod_{\substack{1 \leq l \leq e \\ l \neq p}} \frac{1}{u_p - u_l} \right).$$

ここで, $wr(\alpha_0)$ は α_0 に現れる t_0 の指数の和で, $C(e, p)$ は $u_1, \dots, u_e$ に関する k 次基本対称式 σ_k を用いて次で与えられる:

$$C(e, p) = \prod_{i=1}^{e-1} (u_k^{e-i-1} \sum_{j=1}^i (-1)^{i-j} y_j \sigma_{i-j}) + (-1)^{e-1} \prod_{\substack{1 \leq l \leq e \\ l \neq k}} u_l.$$

Proof. Geck-Iancu-Malle の公式を用いると, weight W_{λ} のうち λ が

$$(\emptyset, \dots, \emptyset, \lambda^{(a)}, \emptyset, \dots, \emptyset)$$

という形のもののみが寄与することが分かる (ここで $\lambda^{(a)}$ は n の分割 $(a+1, 1, \dots, 1)$ に対応する Young diagram). よって, それらの weight を直接計算することにより所望の関係式が得られる. $\square$

Remark 3.2. $\Delta(\hat{\alpha})$ の Skein 関係式を用いても証明可能であるが, 初期値に相当する量を計算する必要があり, 計算量はほとんど変わらない.

REFERENCES

- [AK] S.Ariki, K.Koike, A Hecke algebra of $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$ and construction of its irreducible representations, Adv.Math., **106**, 216-243 (1994).
- [GIM] M.Geck, L.Iancu, G.Malle, Weights of Markov traces and generic degrees, Indag.Math. (N.S) **11**, 379-397 (2000).
- [J] V.F.R.Jones, Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, Ann. Math. **126**, 335-388 (1987).
- [L1] S. Lambropoulou, Solid torus links and Hecke algebras of B-type, Proceedings of the Conference on Quantum Topology, D.N. Yetter ed., World Scientific Press, 1994.
- [L2] S. Lambropoulou, Knot theory related to generalized and cyclotomic Hecke algebras of type B, J. Knot theory and its Ramifications **8**, 621-658 (1999).