結び目群の副有限完備化が Alexander 多項式を決定すること

植木 潤

December 26, 2017

定理 1. [U. arXiv:1702.03819]

結び目 $J, K \subset S^3$ に対し、結び目群の副有限完備化上の同型 $\widehat{\pi}_J \cong \widehat{\pi}_K$ があれば、Alexander 多項式の（$\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$ の単数倍を除いた）等式 $\Delta_J(t) \doteq \Delta_K(t)$ が成立つ。

問題.

$F/\mathbb{Q}$ を有限次拡大、S を F の素イデアルの有限集合、
$O = O_{F,S}$ を F の S 整数環とし、結び目群の $\mathrm{GL}_n(O)$ 表現を考える。
$\{(\pi_K, \rho)\}/\cong \ \longrightarrow \ \{\Delta_{K,\rho}(t) \in O[t^{\mathbb{Z}}]\}/\doteq$ は $\{(\widehat{\pi}_K, \widehat{\rho})\}/\cong$ を経由するか？

背景 1. Alexander 多項式

K : 結び目（ある $S^1 \hookrightarrow S^3$ の像）
$X := S^3 - K \quad \pi := \pi_1(X)$
$X_\infty \to X$ （$\mathbb{Z}$ 被覆）

$$1 \to \underset{=:\,\pi'}{[\pi,\pi]} \to \pi \to \underset{\cong\, t^{\mathbb{Z}}}{\pi^{\mathrm{ab}}} \to 1 \text{ exact} \quad (t\text{: メリディアン})$$

$t \curvearrowright \pi'^{\mathrm{ab}} \cong H_1(\pi') \underset{\mathrm{Hur.}}{\cong} H_1(X_\infty)$: 有限生成 $\Lambda = \mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$ 加群
$\mathrm{Fitt}_\Lambda H_1(X_\infty) = ({}^\exists \Delta_K(t)) \subset \Lambda$
この $\Delta_K(t)$ を K の Alexander 多項式という。

$X_n \to X$ （$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 被覆）
$\rightsquigarrow M_n \to S^3$ （分岐 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 被覆）
Crowell 完全列から $H_1(M_n) \cong H_1(X_\infty)/(t^n-1)H_1(X_\infty)$

Fox の公式: $|H_1(M_n)| = |\prod_{\zeta^n=1} \Delta_K(\zeta)| = |\mathrm{Res}(\Delta_K(t), t^n-1)|$
ここに有限群 G に対し $|G|$ を G の位数、無限群 G に対し $|G|=0$ とする。
$f(t), g(t) \in \mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$ に対し終結式 $\mathrm{Res}(f(t), g(t)) := \det \mathrm{Syl}(f(t), g(t)) \in \mathbb{Z}$

背景 2. 副有限完備化

結び目群（or 3-manifold 群）π を考える。
π の副有限完備化とは、$\widehat{\pi} := \varprojlim_{\text{有限商}} \pi/N$ なる位相群のこと。

π は剰余有限（i.e., $^\exists$ 自然な単射 $\pi \hookrightarrow \widehat{\pi}$）である
by [Hempel1987] + 幾何化予想の解決 [Perelman2002-03]。

[Grothendieck1970] の問題: 有限型かつ剰余有限な群 π は $\widehat{\pi}$ によって決まるか？
$\rightsquigarrow$ *No.* $\pi \ncong \Gamma$ かつ $\widehat{\pi} \cong \widehat{\Gamma}$ なる例 by [BridsonGrunewald2004].

問題: $\widehat{\pi}_K$ は K のどんなトポロジーを知っているか？

定理 1. [U. arXiv:1702.03819]

結び目 $J, K \subset S^3$ に対し、結び目群の副有限完備化上の同型 $\widehat{\pi}_J \cong \widehat{\pi}_K$ があれば、Alexander 多項式の（$\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$ の単数倍を除いた）等式 $\Delta_J(t) \doteq \Delta_K(t)$ が成立つ。

先行結果:
[BoileauFriedl2015] $\Delta_K(t)$ が 1 の冪根を根に持たないとき、ok。
[BridsonReid2015] 八の字結び目群は、任意の 3 次元多様体群と $\widehat{\pi}$ で区別可能。

定理 1 の証明: $\Delta_K(t)$ が 1 の冪根を根に持たない時（[BF2015]）

[Fried1988] の命題.　（See also [Hillar2005]）

多項式 $\Delta(t) \in \mathbb{R}[t]$ であって、reciprocal（次数対称）かつ
$\Delta(0) \neq 0$ かつ 1 の冪根を根に持たないものは、
巡回終結式の絶対値 $b_n := |\mathrm{Res}(\Delta(t), t^n - 1|$ たちで決まる。

証明の方針: $B(z) := \exp \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n}$ が $\mathbb{C}$ 上の有理関数に解析接続され、
そこに $\Delta(t)$ の根の情報が現れる。
（この $B(z)$ は [ArtinMazur1965] の力学系ゼータ関数と呼ばれる。）

定理の証明: $\Delta_K(t)$ が 1 の冪根を根に持たなければ、$H_1(M_n)$ は有限群である。
$H_1(M_n) \cong \widehat{H}_1(M_n) \cong \mathrm{Ker}(\widehat{\pi} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\mathrm{ab}}$ により、 群 $H_1(M_n)$ は $\widehat{\pi}$ で決まる。
その位数は巡回終結式を用いて $|H_1(M_n)| = |\mathrm{Res}(\Delta_K(t), t^n - 1)|$ で与えられる。
[Fried1988] の命題により結果を得る。 ■

この方法で区別できない例 [Fried1988]+

$\Phi_m = \Phi_m(t)$ で m-th 円分多項式を表すとき、相異なる素数 p, q に対し
$f = \Phi_{pq}\Phi_{p^2q}\Phi_{pq^2}$ と $g = \Phi_{pq}^2\Phi_{p^2q^2}$ の組、また $F = f^2g$ と $G = fg^2$ の組。

定理 1 の証明: $\Delta_K(t)$ が 1 の冪根を根に持つ時（[U.]）

完備群環 $\widehat{\Lambda} := \widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]] = \varprojlim_{m,n} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}]$ を考える。

$\widehat{\mathbb{Z}}$ は整域でないが p 進整数環 $\mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ は整域であるから、

分解 $\widehat{\Lambda} \cong \prod_p \mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ が役に立つ。

Step 1. $\widehat{\pi}_J \cong \widehat{\pi}_K \quad \rightsquigarrow \widehat{\Lambda}$ 加群の同型 $\widehat{H}_1(X_{J,\infty}) \cong \widehat{H}_1(X_{K,\infty})$

$\rightsquigarrow \widehat{\Lambda}$ のイデアルの等式 $(\Delta_J(t^v)) = (\Delta_K(t))$

$\pi_J^{\mathrm{ab}} = s^{\mathbb{Z}}$ と書くと、

$s^{\widehat{\mathbb{Z}}} = \widehat{\pi}_J^{\mathrm{ab}} \cong \widehat{\pi}_K^{\mathrm{ab}} = t^{\widehat{\mathbb{Z}}}$ によって $s \mapsto t^v$（v は $\widehat{\mathbb{Z}}$ のある単数）となることに注意。

Step 2. $\Phi_m(t) \in \mathbb{Z}[t]$ を m-th 円分多項式とする。

（1 の原始 m 乗根の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式。結果的に $\mathbb{Z}[t]$ に入る。

$t^n - 1 = \prod_{m|n} \Phi_m(t)$ で帰納的にも定まる。）

補題. $\Phi_m(t)$ は $\widehat{\Lambda}$ の非零因子である。

証明方針: イデアル $\cup_k \mathrm{Ann}(\Phi_m(t)^k)$ と $(\Phi_m(t))$ の $A = \mathbb{Z}_p[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$ での像を M, I と置く。$M = IM$ を示し NAK の補題を用いる。

補題. 単数 $v \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$ に対し、比 $\Phi_m(t^v)/\Phi_m(t) \in \widehat{\Lambda}$ となる。

定理の証明: 以上から、共通の円分因子をキャンセルできる。■

捻れ Alexander 多項式について、言えること

問題.

$F/\mathbb{Q}$ を有限次拡大、S を F の素イデアルの有限集合、
$O = O_{F,S}$ を F の S 整数環とし、結び目群の $\mathrm{GL}_n(O)$ 表現を考える。
$\{(\pi_K, \rho)\}/\cong \ \longrightarrow \ \{\Delta_{K,\rho}(t) \in O[t^{\mathbb{Z}}]\}/\doteq$ は、$\{(\widehat{\pi}_K, \widehat{\rho})\}/\cong$ を経由するか？

各種制限下で、これが経由することを
「($\Delta(t) = \Delta_{K,\rho}(t)$ が $(\widehat{\pi}_K, \widehat{\rho})$ によって）決まる」と言い表すことにする。

定理 2. [U.]（$\Delta(t) = \Delta_{K,\rho}(t)$ が $(\widehat{\pi}_K, \widehat{\rho})$ によって）

1. $\Delta(t)$ が reciprocal なら、$F/\mathbb{Q}$ の共役作用を除き決まる。
2. $\Delta(t)$ の最小分解体に含まれる最大の円分体が $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ のとき、$\Delta(t)$ の根は 1 の $2n$ 乗根倍のズレを除き決まる。
3. 円分多項式 $\Phi_m(t)$ が $O[t]$ で分解し、$\Delta(t)$ がその因子を部分的に含む時、どの因子を含むのかは決まらない。

① は定理 1 の帰結。②,③について概略を述べる。

捻れ Alexander 多項式について、証明の概略

$\rho : \pi_K \to \mathrm{GL}_n(O)$ は、副有限完備化の普遍性から $\widehat{\rho} : \widehat{\pi}_K \to \mathrm{GL}_n(\widehat{O})$ を導く。
連続群ホモロジー $\widehat{H}_1(\widehat{\pi}_K, \widehat{\rho})$ は有限生成 $\widehat{\Lambda}_O := \widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ 加群となり、
$\mathrm{Fitt}_{\widehat{\Lambda}_O} = (\Delta_{K,\rho}(t^v))$, $^\exists v \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$ を得る。

いま $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ の各 $\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$ への埋め込みを固定しておく。
素数 p および p 上の素イデアル $\mathfrak{p} \subset O$ を固定する。
各 p 素な m に対し $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ 被覆の完備 Alexander 加群 $\otimes O_\mathfrak{p}$ を考える。
これは $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の指標によって $O_\mathfrak{p}[[t^{\mathbb{Z}_p}]]$ 加群に分解し、
各成分の特性多項式は、ある 1 の m 乗根 ζ に対し $\Delta_{K,\rho}(t\zeta)$ の像である。
同型 $O_\mathfrak{p}[[t^{\mathbb{Z}_p}]] \cong O_\mathfrak{p}[[T]]; t \mapsto 1 + T$ があり、右辺の収束域は $|T|_p < 1$ である。
$\Delta_{K,\rho}(t)$ の根 α 毎に一意な ζ があり、α/ζ が特性多項式の根として検出される。

一般に $0 \neq \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ に対し、ほとんど全ての素数 p に対し $|\alpha|_p = 1$ である。
$|\alpha|_p = 1$ のとき、$|\alpha - \zeta|_p < 1$ なる 1 の p 素乗根 ζ が唯一つ存在する。
この ζ が 1 の原始 $m(p)$ 乗根であるとする。
いま $\mathbb{Q}(\alpha)$ の正規包に含まれる最大の円分体を $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ とする。
p が有限個を除いて走る時、$\gcd\{m(p)\} = n$ or $2n$ となることが、
ディリクレの算術級数定理とヒルベルト分岐理論を併せることで分かる。
$\Delta(t)$ の根たちの冪が成す族を調べることで結果を得る。

なお各 m に対し 1 の原始 m 乗根たちは $\widehat{\mathbb{Z}}$ の単数乗で移り合うので区別不可。■

まとめ & お訊ね

定理 1. [U. arXiv:1702.03819]

結び目 $J, K \subset S^3$ に対し、結び目群の副有限完備化上の同型 $\widehat{\pi}_J \cong \widehat{\pi}_K$ があれば、Alexander 多項式の（$\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$ の単数倍を除いた）等式 $\Delta_J(t) \doteq \Delta_K(t)$ が成立つ。

定理 2. [U.]（$\Delta(t) = \Delta_{K,\rho}(t)$ が $(\widehat{\pi}_K, \widehat{\rho})$ によって）

1. $\Delta(t)$ が reciprocal なら、$F/\mathbb{Q}$ の共役作用を除き決まる。
2. $\Delta(t)$ の最小分解体に含まれる最大の円分体が $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ のとき、$\Delta(t)$ の根は 1 の $2n$ 乗根倍のズレを除き決まる。
3. 円分多項式 $\Phi_m(t)$ が $O[t]$ で分解し、$\Delta(t)$ がその因子を部分的に含む時、どの因子を含むのかは決まらない。

お訊ねしたい事柄

1. $\rho : \widehat{\pi}_K \to \mathrm{GL}_n(\widehat{O})$ が自然に現れる幾何的な設定があるか？
2. $\widehat{\pi}_K$ の表現の中から幾何的に意味のある表現（例えばホロノミー表現）を見つける方法はあるか？