交差交換と Alexander 多項式

神戸大学大学院理学研究科　内田　樹

December 24, 2017

Introduction

問.
K:結び目
$K^{\times}$:= $\{K'$:結び目 $\mid K'$ は K に 1 回交差交換を施して得られる. $\}$
$\Delta K^{\times}$:=$\{\Delta K' | K' \in K^{\times}\}$
このとき, 多項式 $f(t)$ が $\Delta K^{\times}$ に含まれるための必要十分条件を求めよ.

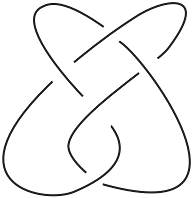
$$\downarrow$$

$K : trivial \;\Rightarrow$ H. Kondo, T. Sakai
$K : 3_1,\ 4_1 \;\Rightarrow$ Y. Nakanishi
$K : 5_1,\ 10_{132} \;\Rightarrow$ Y. Okada, Y. Nakanishi
$K : 5_2 \;\Rightarrow$?

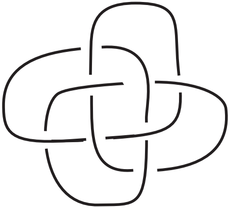
Main result

Result

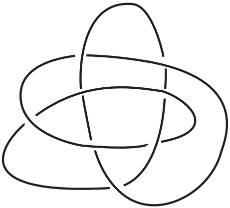
$$\textit{Gordian distance between } 5_2 \textit{ and } 8_{18}\ (8_{18}^*,\ 8_{21}) \textit{ is } 2$$



5_2



8_{18}



8_{21}^*

Remark

Darcy の結果より,

$$\textit{Gordian distance between } 5_2 \textit{ and } 8_{18}\ (8_{18}^*,\ 8_{21}) \textit{ is } 1 \textit{ or } 2$$

Main Theorem

Theorem A

$f(t) = a_2(t^2 + t^{-2}) + a_1(t + t^{-1}) + 1 - 2(a_1 + a_2)\ (a_1,\ a_2 \in \mathbb{Z})$

このとき,

$$f(t) \in \Delta 5_2^{\times} \Leftrightarrow^{\exists} x,\ y \in \mathbb{Z}\ s.t.\ |7a_2 + 2a_1 - 4| = x^2 + xy + 2y^2$$

Theorem B

$f(t) = a_3(t^3 + t^{-3}) + a_2(t^2 + t^{-2}) + a_1(t + t^{-1}) + 1 - 2(a_1 + a_2 + a_3)$
$(a_1,\ a_2,\ a_3 \in \mathbb{Z})$

このとき,

$$f(t) \in \Delta 5_2^{\times} \Leftrightarrow^{\exists} x,\ y \in \mathbb{Z}\ s.t.\ |25a_3 + 14a_2 + 4a_1 - 8| = x^2 + xy + 2y^2$$

Remark

整数論の基本定理より, $x,\ y \in \mathbb{Z}$ に対し, $x^2 + xy + 2y^2$ は奇素数 $q \equiv 3, 5, 6 \mod 7$ を因数として奇べきで含まない.

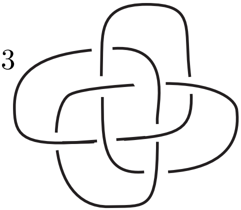
Proof of Main Result

$$\Delta_{8_{18}}(t) = \Delta_{8^*_{18}}(t)$$
$$= -(t^3 + t^{-3}) + 5(t^2 + t^{-2}) - 10(t + t^{-1}) + 13$$

$$|25 \cdot (-1) + 14 \cdot 5 + 4 \cdot (-10) - 8| = 3$$

$$\therefore \Delta_{8_{18}}(t),\ \Delta_{8^*_{18}}(t) \notin \Delta 5_2^{\times}$$

$$\therefore 8_{18},\ 8^*_{18} \notin 5_2^{\times}$$



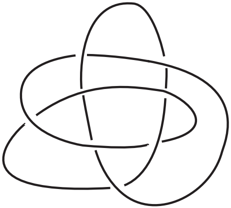
8_{18}

$$\Delta_{8_{21}}(t) = -(t^2 + t^{-2}) + 4(t + t^{-1}) - 5$$

$$|7 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 - 4| = 3$$

$$\therefore \Delta_{8_{21}}(t) \notin \Delta 5_2^{\times}$$

$$\therefore 8_{21} \notin 5_2^{\times}$$



8^*_{21}

Main Theorem

Theorem C

$f(t) = a_1(t + t^{-1}) + 1 - 2a_1 \ (a_1 \in \mathbb{Z})$

このとき,

$$f(t) \in \Delta 5_2^{\times} \Leftrightarrow {}^{\exists} x,\ y \in \mathbb{Z}\ s.t.\ |a_1 - 2| = x^2 + xy + 2y^2$$

Remark

整数論の基本定理より, $x,\ y \in \mathbb{Z}$ に対し, $x^2 + xy + 2y^2$ は奇素数 $q \equiv 3, 5, 6 \mod 7$ を奇べきで含まない.

なお, Theorem C において $f(t) \in \Delta 5_2^{\times}$ となるときの a_1 として,

$$-9,\ -7,\ -6,\ -5,\ -2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 10$$

が挙げられる.

Proof of Theorem C

$(\Rightarrow) k$ を 1 回交差交換を施すと 5_2 になる結び目とすると,

$$\begin{aligned}\Delta_k(t) &= \pm\det\begin{pmatrix}\Delta_{5_2}(t) & r(t^{-1}) \\ r(t) & m(t)\end{pmatrix} \\ &= \pm\Delta_{5_2}(t)m(t) \mp r(t)r(t^{-1})\end{aligned}$$

$f(t)$ は 2 次式 Laurent 多項式なので,

$$r(t) = t^p(t-1)(c_1t-2c_0),\ m(t) = c_1c_0(t+t^{-1}) \pm 1 - 2c_1c_0\ (p,\ c_0,\ c_1 \in \mathbb{Z})$$

としてよい. すると,

$$\pm f(t) = (c_1^2 - 3c_1c_0 + 4c_0^2 \pm 2)(t+t^{-1}) - 2(c_1^2 - 3c_1c_0 + 4c_0^2) \mp 3$$

したがって,

$$\begin{aligned}|a_1 - 2| &= |c_1^2 - 3c_1c_0 + 4c_0^2| \\ &= |(c_1 - c_0)^2 + (c_1 - c_0)\cdot(-c_0) + 2(-c_0)^2|\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$

$$^{\exists}x,\ y \in \mathbb{Z}\ s.t.\ |a_1 - 2| = x^2 + xy + 2y^2$$

$x = c_1 - c_0,\ y = -c_0$ と変数変換すると,

$$\begin{aligned}|a_1 - 2| &= (c_1 - c_0)^2 + (c_1 - c_0) \cdot (-c_0) + 2(-c_0)^2 \\ &= {c_1}^2 - 3c_1c_0 + 4{c_0}^2\end{aligned}$$

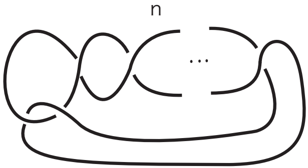
$m(t) := c_1c_0(t + t^{-1}) \pm 1 - 2c_1c_0,\ r(t) := (t-1)(c_1t - 2c_0)$ とおくと,

$$\begin{aligned}\pm \det \begin{pmatrix} \Delta_{5_2}(t) & r(t^{-1}) \\ r(t) & m(t) \end{pmatrix} &= a_1(t + t^{-1}) + 1 - 2a_1 \\ &= f(t) \qquad \square\end{aligned}$$

Example

T_n : *n-twistknot*
n が奇数のとき

$$\Delta_{T_n}(t) = \frac{n+1}{2}(t+t^{-1}) - n$$



$|\frac{n+1}{2} - 2| = \frac{|n-3|}{2},\ 2 \equiv 2 \mod 7$ より,
$\Delta_{T_n}(t) \in \Delta 5_2^{\times} \Leftrightarrow |n-3|$ は奇素数 $q \equiv 3,\ 5,\ 6 \mod 7$ を因数として奇べきで含まない.

e.g.)$T_n \notin 5_2^{\times}$ の例として,

$$n = -9,\ -7,\ -3,\ 9,\ 13,\ 15$$

が挙げられる.

pretzel knot $P(p,\ q,\ r)$ $(p,\ q,\ r:$ 奇数$)$

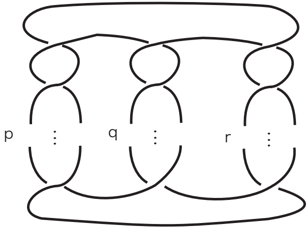
$$\Delta_{P(p,\ q,\ r)}(t) = \frac{1}{4}\{(pq+qr+rp)(t-1)^2+(t+1)^2\}$$
$$= t\{\frac{1}{4}(pq+qr+rp+1)(t+t^{-1})-\frac{1}{2}(pq+qr+rp-1)\}$$

$|\frac{1}{4}(pq+qr+rp+1)-2| = \frac{|pq+qr+rp-7|}{2^2}$, $2 \equiv 2 \mod 7$ より,
$\Delta_{P(p,\ q,\ r)}(t) \in \Delta 5_2^{\times} \Leftrightarrow |pq+qr+rp-7|$ は奇素数 $q \equiv 3,\ 5,\ 6 \mod 7$ を因数として奇べきで含まない.

e.g.)$P(p,\ q,\ r) \notin 5_2^{\times}$ の例として,

$(p,\ q,\ r) = (1,\ 1,\ 9),\ (-1,\ 3,\ 11),\ (3,\ -7,\ 19)$

が挙げられる.



次が成立することが期待される;

$n \in \mathbb{N}$

$f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t^i + t^{-i}) + a_0$ s.t. $f(1) = 1,\ a_i \in \mathbb{Z}\ (i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$

このとき,

$$f(t) \in \Delta 5_2^{\times} \Leftrightarrow^{\exists} x,\ y \in \mathbb{Z}\ s.t.\ \left| \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} P_j a_j - 2^n \right| = x^2 + xy + 2y^2$$

ここで,

$$P_j := 2^{j+1} - \left(\frac{3 + \sqrt{7}i}{2} \right)^j - \left(\frac{3 - \sqrt{7}i}{2} \right)^j$$

とする.