結び目群の $\mathrm{SL}_2\,\mathbb{F}_{p^n}$ 既約表現の共役類の個数の合同ゼータ関数

坂中大志

京都大学数理解析研究所 修士 2 年

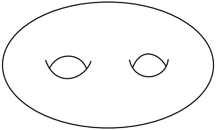
2017 年 12 月 26 日

Introduction

方程式

$\mathbb{C}$ 上

$\mathbb{F}_{p^n}$ 上
有限体



種数 g の
リーマン面

$$N_{p^n} = (\mathbb{F}_{p^n}\text{点の個数})$$

母関数

$$\underbrace{\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_{p^n}}{n} t^n\right)}_{\text{合同ゼータ関数}} = \frac{(2g\text{ 次多項式})}{(1-t)(1-pt)}$$

Weil 予想

(1948 年に Weil が証明)

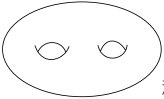
トポロジー

数論的な量

$\pi_1(S^3 \setminus K)$ の
表現の共役類

$\mathrm{SL}_2\,\mathbb{C}$ 表現

$\mathrm{SL}_2\,\mathbb{F}_{p^n}$ 表現

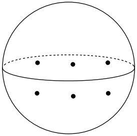


種数 g

$$\text{合同ゼータ関数} = \frac{(2g\ \text{次多項式})}{(1-t)(1-pt)}$$

2 重分岐被覆

双曲構造の
変形空間



$(S^2, (2g+2)\ \text{点})$

主結果

具体的な K, p に対して
合同ゼータ関数を計算した

先行研究:[Sink], [Harada]

目次

§1. 準備

- 結び目の合同ゼータ関数
- two-bridge 結び目

§2. 主結果—合同ゼータ関数の計算

- 定理 1, 定理 2, 定理 3, 定理 4

§3. 証明

- 証明の準備
- 証明の概要

§4. 双曲構造の変形空間

- 双曲構造
- $K(5,3)$ の双曲構造の変形空間
- $K(7,3)$ の双曲構造の変形空間

- K : 結び目

  p : 素数

$$\rho, \rho' \colon \pi_1(S^3 \setminus K) \to \mathrm{SL}_2\,\mathbb{F}_{p^n} \text{ が共役} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{c} \exists P \in \mathrm{SL}_2\,\overset{\text{代数閉包}}{\overline{\mathbb{F}_{p^n}}}, \ \text{s.t.} \\ \rho'(g) = P\rho(g)P^{-1} \\ \text{for } \forall g \in \pi_1(S^3 \setminus K) \end{array}$$

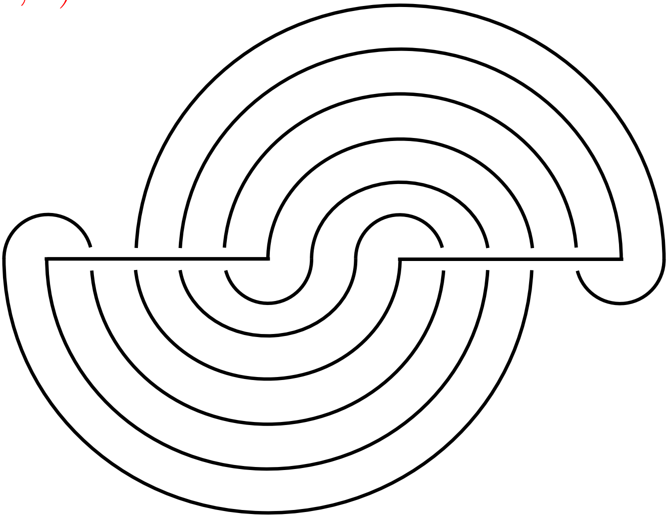
- $N_{p^n} := \#\{\text{既約表現} : \pi_1(S^3 \setminus K) \to \mathrm{SL}_2\,\mathbb{F}_{p^n}\}/\text{共役}$

  結び目 K の合同ゼータ関数 :

$$Z_{K,p}(t) \overset{\text{def}}{=} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_{p^n}}{n} t^n\right)$$

- two-bridge 結び目

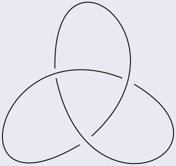
  $K(5,3)$



主結果

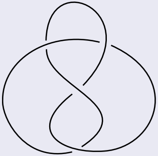
定理 1

$$Z_{K(3,1)}(p,t) = \begin{cases} \dfrac{1-t}{1-2t} & p=2, \\ \dfrac{1-t}{1-3t} & p=3, \\ \dfrac{(1-t)^2}{1-pt} & p \equiv 1, 11 \mod 12, \\ \dfrac{(1-t)(1+t)}{1-pt} & p \equiv 5, 7 \mod 12. \end{cases}$$



定理 2

$$Z_{K(5,3)}(p,t) = \begin{cases} \dfrac{(1+t)(1-t)^2(1+3t^2)}{1-3t} & p=3, \\ \dfrac{(1+t)(1-t)^2(1+4t+7t^2)}{1-7t} & p=7, \\ \dfrac{(1-t)^3(1-4t+11t^2)}{1-11t} & p=11. \end{cases}$$



定理 3

$$Z_{K(7,3)}(p,t) = \begin{cases} \dfrac{(1+t)(1-t)^3(1-1t+2t^2-3t^3+9t^4)}{1-3t} & p=3, \\ \dfrac{(1-t)^4(1+1t+5t^3+25t^4)}{1-5t} & p=5, \\ \dfrac{(1-t)^4(1+5t+18t^2+55t^3+121t^4)}{1-11t} & p=11. \end{cases}$$

定理 4

$$Z_{K(8,3)}(p,t) = \begin{cases} \dfrac{(1+t)(1-t)^3(1+3t^2)}{1-3t} & p=3, \\ \dfrac{(1-t)^4(1+4t+5t^2)}{1-5t} & p=5, \\ \dfrac{(1+t)(1-t)^3(1+7t^2)}{1-7t} & p=7, \\ \dfrac{(1+t)(1-t)^3(1+11t^2)}{1-11t} & p=11. \end{cases}$$

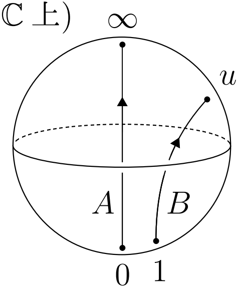
事実

$$\left\{(A,B)\in(\mathrm{SL}_2\,\mathbb{F}_{p^n})^2 \;\middle|\; A \overset{\text{共役}}{\sim} B\right\}/\text{共役} \xleftrightarrow{\text{“1:1”}} \{(x,z)\in(\mathbb{F}_{p^n})^2\}$$

$$(A,B) \longmapsto (\operatorname{tr}A, \operatorname{tr}AB)$$

<u>事実の証明 (Sketch)</u>

($\mathbb{C}$ 上)



$\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C}\cup\{\infty\} \circlearrowleft \mathrm{SL}_2\,\mathbb{C}$

$$\left.\begin{array}{l} A\text{ の固定点} \\ B\text{ の固定点}\end{array}\right\} \overset{\text{共役}}{\rightsquigarrow} \left\{\begin{array}{l} 0,\infty \\ 1,u \end{array}\right.$$

A の共役類 $\leftsquigarrow$ A の固有値 $\xleftarrow[]{T^2-xT+1=0}$ $x = \operatorname{tr}A = \operatorname{tr}B$

B の共役類

A, B の位置関係 $\leftsquigarrow u \leftsquigarrow z = \operatorname{tr}AB$

$\square$

§ 3. 定理の証明の概要

- $\pi_1(S^3 \setminus K(\alpha,\beta)) = \langle a, b \mid aw = wb \rangle \quad w : a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$の積

定理の証明の概要

$$\{\,既約表現 : \pi_1(S^3 \setminus K) \to \mathrm{SL}_2\, \mathbb{F}_{p^n}\}\,/共役$$

$$\Big\updownarrow \text{“1:1”}$$

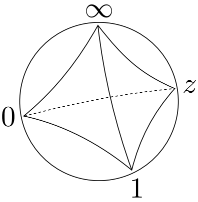
$$\{(A,B) \mid A \sim B\}\,/共役 \supset \{(A,B) \mid AW = WB\}\,/共役$$

$$\text{“1:1”} \Big\updownarrow \mathrm{tr} \qquad\qquad \text{“1:1”} \Big\updownarrow \longleftarrow AW - WB = f_K(x,z)(A-B)$$

$$\{(x,z)\} \qquad \supset \{(x,z) \mid f_K(x,z) = 0\}$$

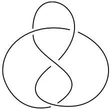
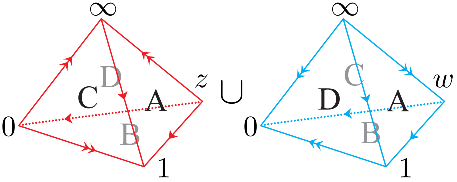
$$\Big\downarrow \text{Weil予想} \longleftarrow \begin{cases} \mathbb{C}\ 上の種数\ g \\ \mathbb{F}_p点, \mathbb{F}_{p^2}点, \cdots の個数 \end{cases}$$

$$合同ゼータ関数 = \frac{(2g\ 次多項式)}{(1-t)(1-pt)} \qquad \square$$



理想四面体

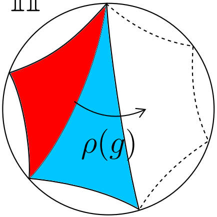
$$\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \infty$$

$S^3\setminus$  $=$ 

双曲構造

$$z(z-1)w(w-1)=0$$

$\mathbb{H}^3$



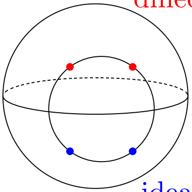
$$\widetilde{S^3 \setminus K} \longrightarrow \mathbb{H}^3$$

$$\circlearrowright \qquad\qquad \circlearrowright$$

$$\rho\colon\ \pi_1(S^3\setminus K) \to PSL_2\,\mathbb{C}$$ holonomy 表現

dihedral 表現

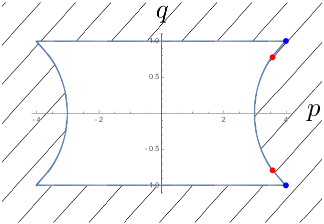
複素共役 $\circlearrowright$



ideal point

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi_1(S^3 \setminus K) \text{ の} \\ PSL_2\mathbb{C} \text{ 表現} \end{array} \right\} / \text{共役} \ni \rho$$

$$\rho \mapsto \rho(m^p l^q) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



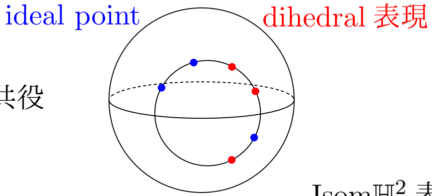
双曲構造の変形空間 $\ni (p,q)$

$(p,q) \underset{\text{同じ点}}{\sim} (-p,-q)$

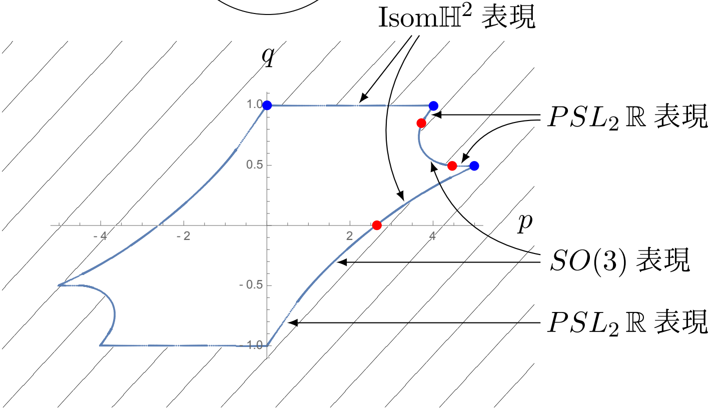
$$S^3 \xrightarrow{K \text{ に沿った } (p,q)\text{-surgery}} \underset{\sim\sim\sim}{M_{(p,q)}}$$

ここに双曲構造の入る (p,q)

$$\left\{ \begin{array}{c} \pi_1(S^3 \setminus K) \text{ の} \\ PSL_2\mathbb{C} \text{ 表現} \end{array} \right\} / \text{共役}$$



双曲構造の
変形空間



今後の課題

- すべての素数 p について $Z_{K,p}(t)$ は求まるか.
  どのような結び目ならば求まるか.
- two-bridge 結び目の character variety の一般形は求まるか.
- $Z_{K,p}(t)$ は種数の他に K のトポロジーに関する量と関連をもつか.