Milnor-Orr invariants from the Kontsevich invariant

野坂 武史　**(Takefumi Nosaka)**

東京工業大学　理学院 数学系

arXiv:GT 1712.02060 に公開済み

動機:　結び目の冪零的研究を深めたい！三つの不変量

動機:　結び目の冪零的研究を深めたい！三つの不変量

次数 $< 2k$ のミルナー不変量　組ひも群的

次数 k の Orr 不変量 ホモロジー的

次数 $< 2k - 1$ の Kontsevich 不変量の木部分 グラフ的

動機:　結び目の冪零的研究を深めたい！三つの不変量

$\boxed{\text{次数} < 2k \text{ のミルナー不変量}}$　組ひも群的

≒「 緯線を, 自由群のべき零商で量ったもの」

<u>関連</u>　・ 高次マッセイ積による記述.
・ 自由 **Lie** 環との関連

$\boxed{\text{次数 } k \text{ の Orr 不変量}}$ ホモロジー的

$\boxed{\text{次数} < 2k - 1 \text{ の Kontsevich 不変量の木部分}}$ グラフ的

動機:　結び目の冪零的研究を深めたい！三つの不変量

$\boxed{\text{次数} < 2k \text{ のミルナー不変量}}$　組ひも群的

≒「 緯線を, 自由群のべき零商で量ったもの」

関連 ・ 高次マッセイ積による記述.
・ 自由 Lie 環との関連

$\boxed{\text{次数 } k \text{ の Orr 不変量}}$ ホモロジー的

≒「 基本類を, 自由群のべき零商で量ったもの」

関連 ・ k-slice 予想.

$\boxed{\text{次数} < 2k - 1 \text{ の Kontsevich 不変量の木部分}}$ グラフ的

動機: 結び目の冪零的研究を深めたい！三つの不変量

$\boxed{\text{次数} < 2k \text{ のミルナー不変量}}$ 組ひも群的

≒「 絡線を, 自由群のべき零商で量ったもの」

<u>関連</u> ・ 高次マッセイ積による記述.

・ 自由 Lie 環との関連

$\boxed{\text{次数 } k \text{ の Orr 不変量}}$ ホモロジー的

≒「 基本類を, 自由群のべき零商で量ったもの」

<u>関連</u> ・ k-slice 予想.

$\boxed{\text{次数} < 2k-1 \text{ の Kontsevich 不変量の木部分}}$ グラフ的

≒「量子不変量の自由べき部分」

<u>関連</u> ・ Chen の反復積分 ・Special Magnus 展開

結果:　結び目の冪零的研究を深めたい！三つの不変量

$\boxed{\text{次数} < 2k \text{ のミルナー不変量}}$　組ひも群的

$\boxed{\text{次数 } k \text{ の Orr 不変量}}$ ホモロジー的

$\boxed{\text{次数} < 2k-1 \text{ の Kontsevich 不変量の木部分}}$ グラフ的

結果:　結び目の冪零的研究を深めたい！三つの不変量

$\boxed{\text{次数} < 2k \text{ のミルナー不変量}}$　組ひも群的

$\|$　定理１ (N.)

$\boxed{\text{次数 } k \text{ の Orr 不変量}}$ ホモロジー的

$\|$　定理２ (N.)

$\boxed{\text{次数} < 2k-1 \text{ の Kontsevich 不変量の木部分}}$ グラフ的

注意

結果:　結び目の冪零的研究を深めたい！三つの不変量

$\boxed{\text{次数 } < 2k \text{ のミルナー不変量}}$　組ひも群的

$\Vert$　定理 1 (N.)

$\boxed{\text{次数 } k \text{ の Orr 不変量}}$ ホモロジー的

$\Vert$　定理 2 (N.)

$\boxed{\text{次数 } < 2k-1 \text{ の Kontsevich 不変量の木部分}}$ グラフ的

注意 k 次 Milnor 不変量の等価性は [Habegger-Masbaum].

系 Kontsevich 不変量の木部分に位相的意味を与えた.

結果:　結び目の冪零的研究を深めたい！三つの不変量

$\boxed{\text{次数} < 2k \text{ のミルナー不変量}}$

‖　定理１ (N.)

$\boxed{\text{次数 } k \text{ の Orr 不変量}}$

‖　定理２ (N.)

$\boxed{\text{次数} < 2k-1 \text{ の Kontsevich 不変量の木部分}}$

↑ [Meilhan-Yasuhara] HOMFLYPT による還元

注意 k 次 Milnor 不変量の等価性は [Habegger-Masbaum].

系 Kontsevich 不変量の木部分に位相的意味を与えた.

Massuyeau の類似的結果:　写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の三つの写像

Massuyeau の類似的結果:　写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の三つの写像

Total Johnson homomorphism of deg $< 2k$

Morita homomorphism of deg k

Special Magnus expansion from LMO of deg $< 2k$

Massuyeau の類似的結果:　写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の三つの写像

$$\boxed{\text{Total Johnson homomorphism of deg} < 2k}$$

$$\Big\| \quad \text{定理 (M.)}$$

$$\boxed{\text{Morita homomorphism of deg } k}$$

$$\Big\| \quad \text{定理 (M.)}$$

$$\boxed{\text{Special Magnus expansion from LMO of deg} < 2k}$$

注意

Massuyeau の類似的結果:　写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の三つの写像

$\boxed{\text{Total Johnson homomorphism of deg} < 2k}$

$\|$ **定理** (Massuyeau)

$\boxed{\text{Morita homomorphism of deg } k}$

$\|$ **定理** (Massuyeau)

$\boxed{\text{Special Magnus expansion from LMO of deg} < 2k}$

注意 定理には, "Symplectic expansion" の記述が必要.

注意 私の定理は, 氏の方針をかなり踏襲した.

本講演の目次

指針：**3** つの不変量の復習と, 等価性の説明.

§1　Orr 不変量の復習

§2　ストリング絡み目のミルナー不変量の復習

§3　Kontsevich 不変量に現れるグラフと, ふたつの同型射

本講演の目次

指針：**3** つの不変量の復習と, 等価性の説明.

§1 **Orr** 不変量の復習

Orr 不変量の定義と, 難点の説明

§2 ストリング絡み目のミルナー不変量の復習

§3 **Kontsevich** 不変量に現れるグラフと, ふたつの同型射

Orr 不変量の定義

Orr 不変量の定義

$F := \langle x_1, x_2, \ldots .x_{\#L} \rangle$ 自由群

$$F_2 := [F, F], \quad F_3 := [F, [F, F]], \quad \ldots, F_k := [F, F_{k-1}].$$

$\Longrightarrow$

Orr 不変量の定義

$$\boldsymbol{F := \langle x_1, x_2, \ldots . x_{\#L} \rangle}$$ 自由群

$$\boldsymbol{F_2 := [F, F], \quad F_3 := [F, [F, F]], \quad \ldots, F_k := [F, F_{k-1}].}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{0 \to F_{k-1}/F_k \longrightarrow F/F_k \xrightarrow{p_k} F/F_{k-1} \to 0}$$ (中心拡大)

Orr 不変量の定義

$F := \langle x_1, x_2, \dots .x_{\#L} \rangle$ 自由群

$$F_2 := [F, F], \quad F_3 := [F, [F, F]], \quad \dots, F_k := [F, F_{k-1}].$$

$\Longrightarrow$

$$0 \to F_{k-1}/F_k \longrightarrow F/F_k \xrightarrow{p_k} F/F_{k-1} \to 0 \qquad \text{(中心拡大)}$$

仮定 A_k

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drrr, "f_k"] \arrow[drrrr, "f_{k+1}"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & \cdots \arrow[l] & F/F_k \arrow[l, "p_k"'] & F/F_{k+1} \arrow[l, "p_{k+1}"']
\end{tikzcd}$$

Orr 不変量の定義

$$F := \langle x_1, x_2, \ldots . x_{\#L} \rangle \qquad \text{自由群}$$

$$F_2 := [F, F], \quad F_3 := [F, [F, F]], \quad \ldots, F_k := [F, F_{k-1}].$$

$\Longrightarrow$

$$0 \to F_{k-1}/F_k \longrightarrow F/F_k \xrightarrow{p_k} F/F_{k-1} \to 0 \qquad (\text{中心拡大})$$

仮定 A_k

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drrr, "f_k"] \arrow[drrrr, "f_{k+1}"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & \cdots \arrow[l] & F/F_k \arrow[l, "p_k"'] & F/F_{k+1} \arrow[l, "p_{k+1}"']
\end{tikzcd}$$

Orr 不変量の定義

$$F := \langle x_1, x_2, \dots . x_{\#L} \rangle$$ 自由群

$$F_2 := [F, F], \quad F_3 := [F, [F, F]], \quad \dots, F_k := [F, F_{k-1}].$$

$$\Longrightarrow$$

$$0 \to F_{k-1}/F_k \longrightarrow F/F_k \xrightarrow{p_k} F/F_{k-1} \to 0$$ (中心拡大)

仮定 A_k

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drrr, "f_k"] \arrow[drrrr, "f_{k+1}"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & \cdots \arrow[l] & F/F_k \arrow[l, "p_k"'] & F/F_{k+1} \arrow[l, "p_{k+1}"']
\end{tikzcd}$$

定義 (k-次)Orr 不変量 とは基本 3-類の押出

$$(f_k)_*([S^3 \setminus L, \partial(S^3 \setminus L)]) \quad \in \quad H_3(F/F_k; \mathbb{Z}).$$

Orr 不変量の注意

定義 (k-次)Orr 不変量 とは

$$(f_k)_*([S^3 \setminus L, \partial(S^3 \setminus L)]) \quad \in \quad H_3(F/F_k;\mathbb{Z}).$$

Orr 不変量の注意

定義 (k-次)Orr 不変量 とは

$$(f_k)_*([S^3 \setminus L, \partial(S^3 \setminus L)]) \quad \in \quad H_3(F/F_k; \mathbb{Z}).$$

計算の難点

Orr 不変量の注意

定義 (k-次)Orr 不変量 とは

$$(f_k)_*([S^3 \setminus L, \partial(S^3 \setminus L)]) \quad \in \quad H_3(F/F_k;\mathbb{Z}).$$

計算の難点

1．定義はメリディアンの取り方に依る.
2．基本類の記述は大変.
3．ホモロジーの中でどの元なのか解り辛い! だが・・

Orr 不変量の注意

定義 $(k$-次$)$Orr 不変量 とは

$$(f_k)_*([S^3 \setminus L, \partial(S^3 \setminus L)]) \quad \in \quad H_3(F/F_k; \mathbb{Z}).$$

計算の難点

1．定義はメリディアンの取り方に依る.

2．基本類の記述は大変.

3．ホモロジーの中でどの元なのか解り辛い! だが・・

定理 [Orr-Igusa] $\quad N_m$:=rank(F_m/F_{m+1})

$$H_3(F/F_k; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{m=k}^{2k-2} \mathbb{Z}^{qN_m - N_{m+1}}.$$

注　このコホモロジーのマッセイ積による特徴づけ (N.

本講演の目次

指針：**3** つの不変量の復習と, 等価性の説明.

ストリング絡み目の復習・確認

ストリング絡み目 T とは

ストリング絡み目の復習・確認

ストリング絡み目 $\boldsymbol{T}$ とは

$\boldsymbol{C^\infty}$-埋込　$\boldsymbol{T : \sqcup^q [0,1] \hookrightarrow}$ 立方体 $\boldsymbol{[0,1]^3}$

s.t. $\boldsymbol{L(\partial_i([0,1])) = \{j/2q, 1/2, 0\} \cup \{j/2q, 1/2, 1\}}$

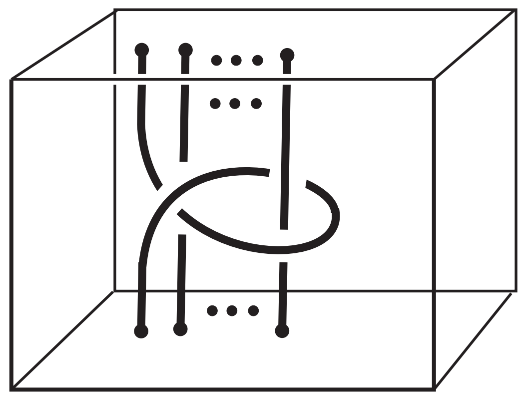
ストリング絡み目の復習・確認

ストリング絡み目 T とは

C^∞-埋込　$T : \sqcup^q [0,1] \hookrightarrow$ 立方体 $[0,1]^3$

s.t. $L(\partial_i([0,1])) = \{j/2q, 1/2, 0\} \cup \{j/2q, 1/2, 1\}$

T の閉包



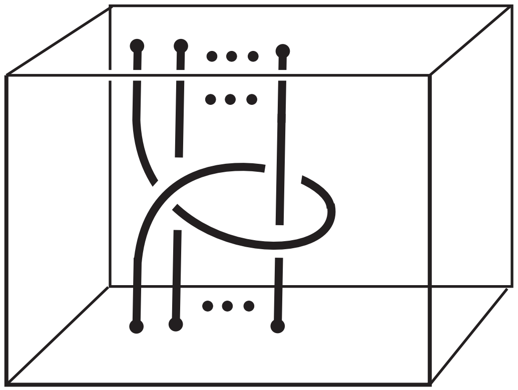
ストリング絡み目の復習・確認

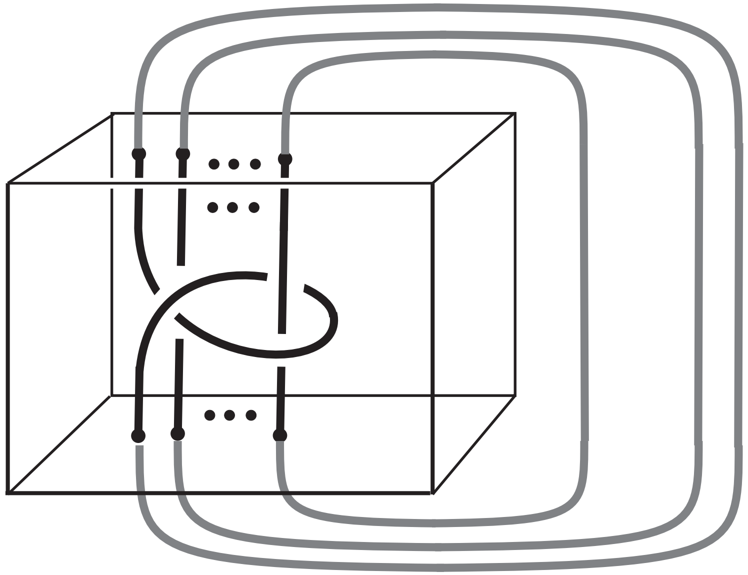
ストリング絡み目 T とは

C^∞-埋込　$T : \sqcup^q [0,1] \hookrightarrow$ 立方体 $[0,1]^3$

s.t. $L(\partial_i([0,1])) = \{j/2q, 1/2, 0\} \cup \{j/2q, 1/2, 1\}$

T の閉包　$T \subset [0,1]^3 \xrightarrow{\text{閉包を取る}} \overline{T} \subset S^3$





T と T' の合成

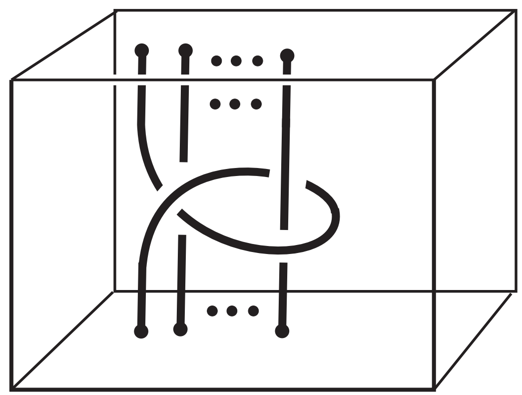
ストリング絡み目の復習・確認

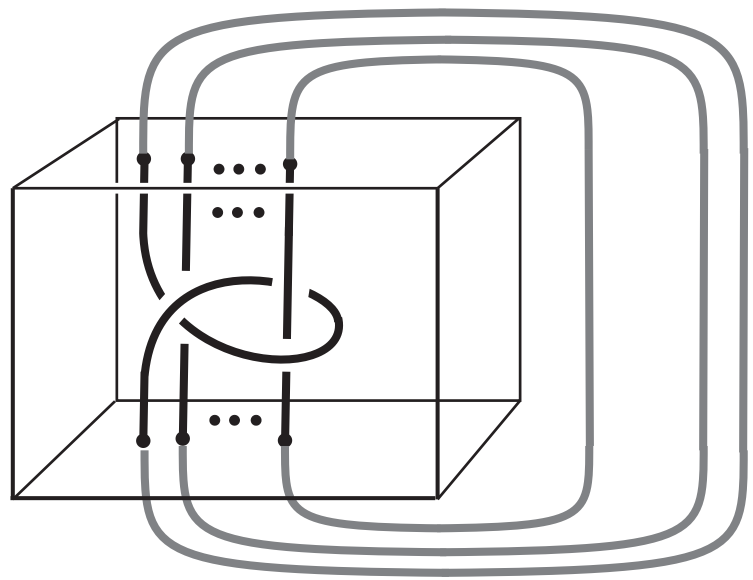
ストリング絡み目 T とは

C^∞-埋込　$T : \sqcup^q[0,1] \hookrightarrow$ 立方体 $[0,1]^3$

s.t. $L(\partial_i([0,1])) = \{j/2q, 1/2, 0\} \cup \{j/2q, 1/2, 1\}$

T の閉包　$T \subset [0,1]^3 \xrightarrow{\text{閉包を取る}} \overline{T} \subset S^3$





T と T' の合成 $\boxed{T} \circ \boxed{T'} := \begin{array}{|c|}\hline T \\ \hline T' \\ \hline\end{array}$

§2　String 絡み目 T のミルナー不変量

命題 (Milnor, Levine) ${}^{\forall}m$ に対し，リフトがある． i.e.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1([0,1]^3 \setminus T) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drrr, "f_m"] \arrow[drrrr, "\cdots"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & \cdots \arrow[l] & F/F_m \arrow[l, "p_m"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

注 閉包 $\overline{T}$ は仮定 A_k を満たす $\Leftrightarrow f_m(\mathfrak{l}_\ell) \in F_k/F_m \ {}^{\forall}m > k$.

§2　String 絡み目 T のミルナー不変量

命題 (Milnor, Levine) $^{\forall}m$ に対し，リフトがある．i.e.

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1([0,1]^3 \setminus T) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[rrrd, "f_m"] \arrow[rrrrd, "\cdots"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & \cdots \arrow[l] & F/F_m \arrow[l, "p_m"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

注 閉包 $\overline{T}$ は仮定 A_k を満たす $\Leftrightarrow$ $f_m(\mathfrak{l}_\ell) \in F_k/F_m$ $^{\forall}m > k$.

定義 $m := 2k - 1$ $(< 2k$-次$)$Milnor 不変量 とは

$$x_1 \otimes f_{2k-1}(\mathfrak{l}_1) + \cdots + x_q \otimes f_{2k-1}(\mathfrak{l}_q) \in \mathbb{Z}^q \otimes (F_k/F_{2k-1}).$$

注意 F_k/F_{2k-1} はアーベル群．　$\because [F_k, F_k] \subset F_{2k-1}$.

閑話　ミルナー不変量の計算法

閑話　ミルナー不変量の計算法

ストリング絡み目 $\boldsymbol{T}$ の不変量を計算したい！

$$\Downarrow$$

閑話　ミルナー不変量の計算法

ストリング絡み目 $\boldsymbol{T}$ の不変量を計算したい！

$$\Downarrow$$

$\boldsymbol{T}$ と同じ値の不変量をもつ, 純くみひも $\boldsymbol{\sigma_T}$ を見つける.

(その存在保障は, クラスパーか, 去年の講演内容による)

$$\Downarrow$$

閑話　ミルナー不変量の計算法

ストリング絡み目 $\boldsymbol{T}$ の不変量を計算したい！

$$\Downarrow$$

$\boldsymbol{T}$ と同じ値の不変量をもつ, 純くみひも $\boldsymbol{\sigma_T}$ を見つける.

(その存在保障は, クラスパーか, 去年の講演内容による)

$$\Downarrow$$

$\boldsymbol{\sigma_T}$ の緯線は, 経線 $x_1, \ldots, x_q$ で簡単に書ける.

(あとはマグナス展開で値を査定する.)

閑話　ミルナー不変量の計算法

ストリング絡み目 $\boldsymbol{T}$ の不変量を計算したい！

$$\Downarrow$$

$\boldsymbol{T}$ と同じ値の不変量をもつ，純くみひも $\boldsymbol{\sigma_T}$ を見つける．

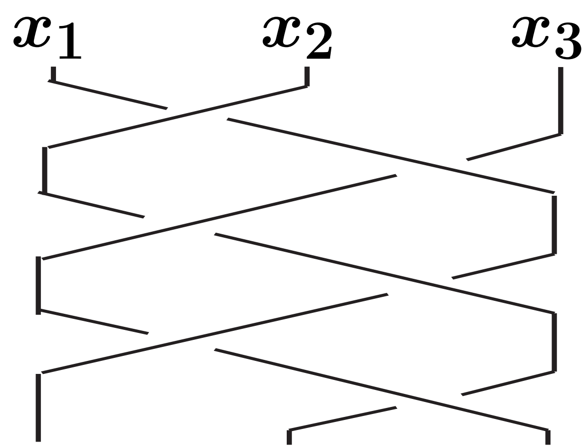
(その存在保障は，クラスパーか，去年の講演内容による)

$$\Downarrow$$

$\boldsymbol{\sigma_T}$ の緯線は，経線 $x_1, \ldots, x_q$ で簡単に書ける．

(あとはマグナス展開で値を査定する．)

例 ボロミアン環 右図の閉包



閑話　ミルナー不変量の計算法

ストリング絡み目 $\boldsymbol{T}$ の不変量を計算したい！

$$\Downarrow$$

$\boldsymbol{T}$ と同じ値の不変量をもつ, 純くみひも $\boldsymbol{\sigma_T}$ を見つける.

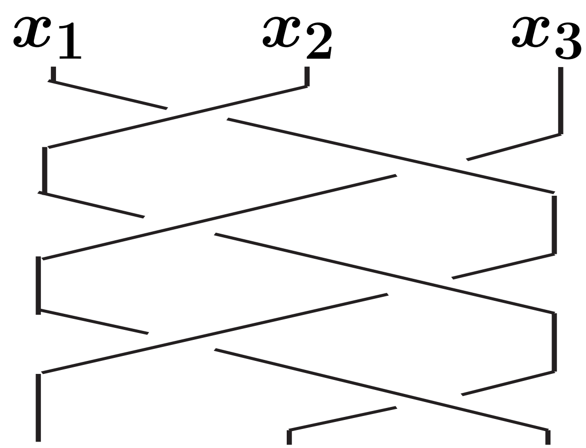
(その存在保障は, クラスパーか, 去年の講演内容による)

$$\Downarrow$$

$\boldsymbol{\sigma_T}$ の緯線は, 経線 $x_1, \ldots, x_q$ で簡単に書ける.

(あとはマグナス展開で値を査定する.)

例 ボロミアン環 右図の閉包



$$\mathfrak{l}_1 = x_3x_1x_2x_1^{-1}x_3^{-1}x_1x_2^{-1}x_1^{-1}$$
$$= [x_3,\ x_1x_2x_1^{-1}]$$

閑話　ミルナー不変量の計算法

ストリング絡み目 $\boldsymbol{T}$ の不変量を計算したい！

$$\Downarrow$$

$\boldsymbol{T}$ と同じ値の不変量をもつ，純くみひも $\boldsymbol{\sigma_T}$ を見つける.

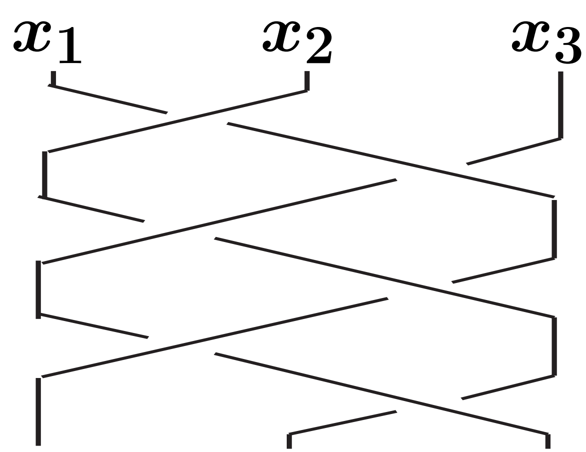
(その存在保障は，クラスパーか，去年の講演内容による)

$$\Downarrow$$

$\boldsymbol{\sigma_T}$ の緯線は，経線 $x_1, \ldots, x_q$ で簡単に書ける.

(あとはマグナス展開で値を査定する.)

例 ボロミアン環 右図の閉包



$$\mathfrak{l}_1 = x_3x_1x_2x_1^{-1}x_3^{-1}x_1x_2^{-1}x_1^{-1}$$
$$= [x_3,\ x_1x_2x_1^{-1}]$$

$$\mathfrak{l}_2 = [x_1,\ x_2x_3x_2^{-1}]$$
$$\mathfrak{l}_3 = [x_2,\ x_3x_1x_3^{-1}]$$

String 絡み目 T のミルナー不変量の考察

閉包 $\overline{T}$ は仮定 A_k を満たしたとする.

定義 $(< 2k$-次$)$Milnor 不変量 とは

$$x_1 \otimes f_{2k-1}(\mathfrak{l}_1) + \cdots + x_q \otimes f_{2k-1}(\mathfrak{l}_q) \ \in \ \mathbb{Z}^q \otimes (F_k / F_{2k-1}).$$

String 絡み目 T のミルナー不変量の考察

閉包 $\overline{T}$ は仮定 A_k を満たしたとする.

定義 ($< 2k$-次)Milnor 不変量 とは

$$x_1 \otimes f_{2k-1}(\mathfrak{l}_1) + \cdots + x_q \otimes f_{2k-1}(\mathfrak{l}_q) \in \mathbb{Z}^q \otimes (F_k / F_{2k-1}).$$

補題 $[x_1, \mathfrak{l}_1] \cdots [x_q, \mathfrak{l}_q] = 1 \in \pi_1(S^3 \setminus L)$

$\Longrightarrow$

String 絡み目 T のミルナー不変量の考察

閉包 $\overline{T}$ は仮定 A_k を満たしたとする.

定義 (< $2k$-次)Milnor 不変量 とは

$$x_1 \otimes f_{2k-1}(\mathfrak{l}_1) + \cdots + x_q \otimes f_{2k-1}(\mathfrak{l}_q) \in \mathbb{Z}^q \otimes (F_k / F_{2k-1}).$$

補題 $[x_1, \mathfrak{l}_1] \cdots [x_q, \mathfrak{l}_q] = 1 \in \pi_1(S^3 \setminus L)$

$\Longrightarrow$

Milnor 不変量 $\in \mathrm{Ker}([\bullet, \bullet] : \mathbb{Z}^q \otimes (F_k / F_{2k-1}) \longrightarrow F_k / F_{2k})$

Note:

String 絡み目 T のミルナー不変量の考察

閉包 $\overline{T}$ は仮定 A_k を満たしたとする.

定義 (< $2k$-次)Milnor 不変量 とは

$$x_1 \otimes f_{2k-1}(\mathfrak{l}_1) + \cdots + x_q \otimes f_{2k-1}(\mathfrak{l}_q) \ \in \ \mathbb{Z}^q \otimes (F_k/F_{2k-1}).$$

補題 $[x_1, \mathfrak{l}_1] \cdots [x_q, \mathfrak{l}_q] = 1 \in \pi_1(S^3 \setminus L)$

$\Longrightarrow$

Milnor 不変量 $\in \mathrm{Ker}([\bullet, \bullet] : \mathbb{Z}^q \otimes (F_k/F_{2k-1}) \longrightarrow F_k/F_{2k})$

Note: $\mathrm{Ker}([\bullet, \bullet]) \cong \bigoplus_{m=k}^{2k-2} \mathbb{Z}^{qN_m - N_{m+1}}$ $\longleftarrow$ 先程と同じ!!

問：Milnor と Orr 不変量は同じでは？

ここまでのまとめと, 次節の方針. $\boldsymbol{E_L := S^3 \setminus L}$

Milnor 不変量

Orr 不変量

ここまでのまとめと, 次節の方針. $\boldsymbol{E_L := S^3 \setminus L}$

$$\begin{array}{lc} \text{Milnor 不変量} & \in \mathbf{Ker}([\bullet, \bullet]) \\ & \Big\updownarrow {}^{\exists}\mathbf{1{:}1} \\ \text{Orr 不変量} & \in \boldsymbol{H_3(F/F_k;\mathbb{Z})} \end{array}$$

ここまでのまとめと，次節の方針． $\boldsymbol{E_L := S^3 \setminus L}$

Milnor 不変量 $\in \mathbf{Ker}([\bullet, \bullet])$

$$\updownarrow$$

Orr 不変量 $\in \boldsymbol{H_3(F/F_k; \mathbb{Z})}$

ここまでのまとめと，次節の方針．$E_L := S^3 \setminus L$

Milnor 不変量 $\in \mathrm{Ker}([\bullet, \bullet])$

$$\updownarrow$$

Tree 型

Kontsevich 不変量 $\in$ ツリー型 Jacobi 図

Orr 不変量 $\in H_3(F/F_k; \mathbb{Z})$

cf.

ここまでのまとめと，次節の方針．$E_L := S^3 \setminus L$

Milnor 不変量 $\in \mathrm{Ker}([\bullet, \bullet])$

$$\updownarrow$$

Tree 型 Kontsevich 不変量 $\in$ ツリー型 Jacobi 図

Orr 不変量 $\in H_3(F/F_k; \mathbb{Z})$

cf. $\delta_* : H_3(E_L, \partial E_L; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(\partial E_L; \mathbb{Z}) \cong^{\# L}$ の定義

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & C_3(E_L) & \longrightarrow & C_3(E_L, \partial E_L) \to 0 \\ & & & & \downarrow \partial_3 & & \\ 0 \to & C_2(\partial E_L) & \longrightarrow & & C_2(E_L) & & \end{array}$$

本講演の目次

指針：**3** つの不変量の復習と, 等価性の説明.

§1 Orr 不変量の復習

§2 ストリング絡み目のミルナー不変量の復習

§3 Kontsevich 不変量に現れるグラフと, ふたつの同型射

ミルナー不変量の定義と, 値を持つ器の考察

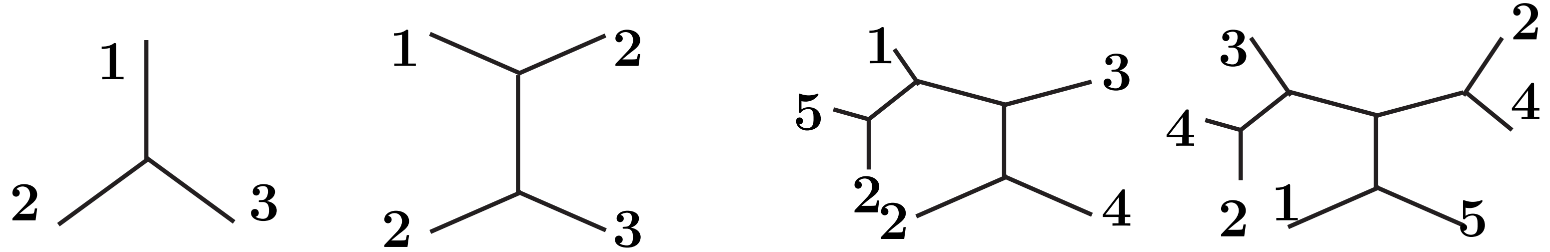
ツリー型 Jacobi 図とは？

ツリー型 Jacobi 図とは？

ヤコビ図 $\boldsymbol{J}$ とは, 単連結な **1**-, **3**-頂点グラフで,

s.t. **1**-価頂点は $\{\mathbf{1},\ldots,\boldsymbol{q}\}$ でラベルされ, **3**-価のは向付き

ヤコビ図 $\boldsymbol{J}$ の次数 とは, $\#\{$ $\boldsymbol{J}$ の頂点 $\}/\mathbf{2}$

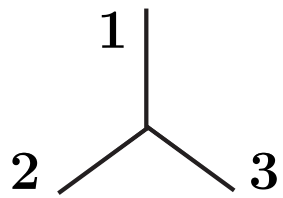


ツリー型 Jacobi 図とは？

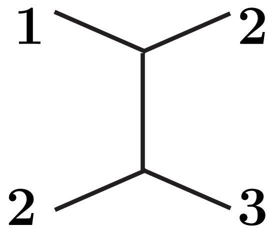
ヤコビ図 $\boldsymbol{J}$ とは, 単連結な **1-**, **3-**頂点グラフで,

s.t. **1-**価頂点は $\{1, \ldots, q\}$ でラベルされ, **3-**価のは向付き

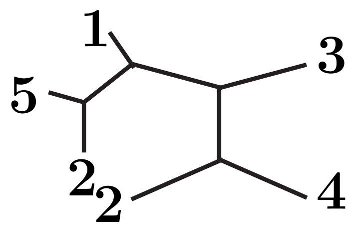
ヤコビ図 $\boldsymbol{J}$ の次数 とは, $\#\{$ $\boldsymbol{J}$ の頂点 $\}/2$



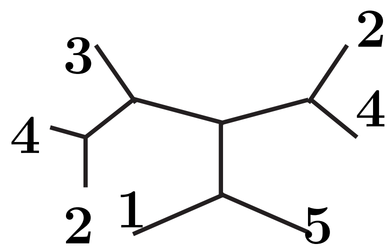
次数 **2**



次数 **3**



次数 **5**

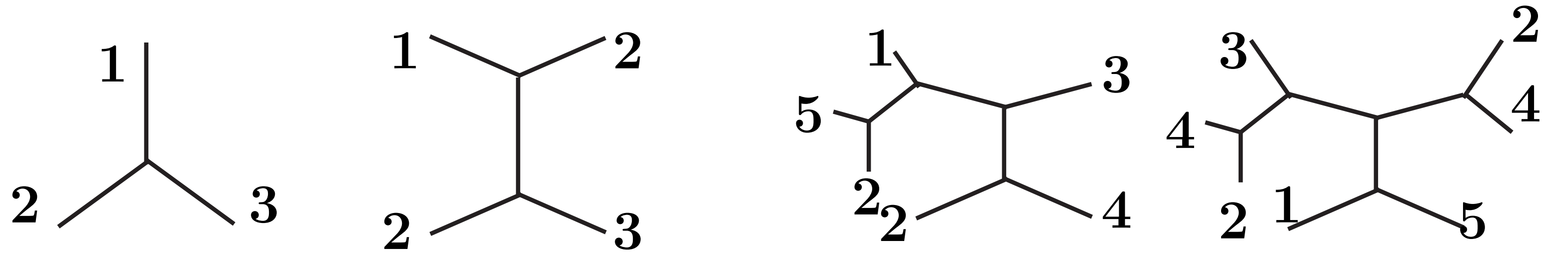


次数 **6**

ツリー型 Jacobi 図とは？

ヤコビ図 $\boldsymbol{J}$ とは, 単連結な **1-**, **3-**頂点グラフで,
s.t. **1-**価頂点は $\{1, \ldots, q\}$ でラベルされ, **3-**価のは向付き

ヤコビ図 $\boldsymbol{J}$ の次数 とは, $\#\{\ \boldsymbol{J}$ の頂点 $\}/2$

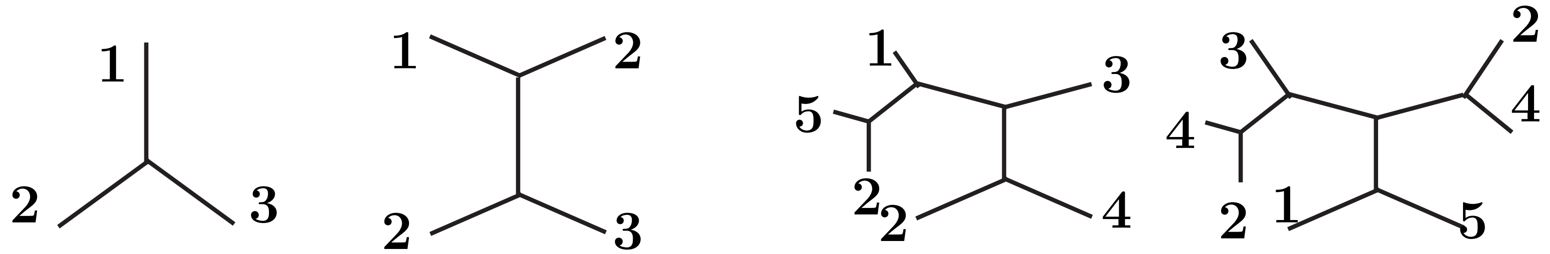


ツリー型 Jacobi 図とは？

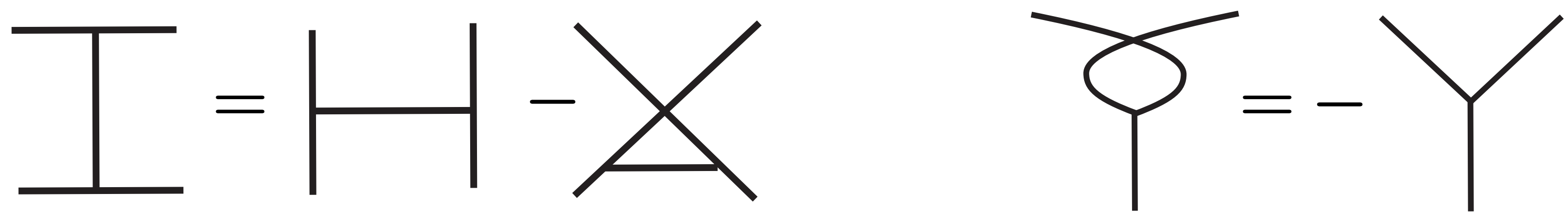
ヤコビ図 $\boldsymbol{J}$ とは，単連結な 1-，3-頂点グラフで，

s.t. 1-価頂点は $\{1, \ldots, q\}$ でラベルされ，3-価のは向付き

ヤコビ図 $\boldsymbol{J}$ の次数 とは，$\#\{\ \boldsymbol{J}$ の頂点 $\}/2$



$$\mathcal{P}^t_k := \mathbb{Q}\langle\ k \leq \text{次数} < 2k-1 \text{ のヤコビ図式 } \rangle/\text{IHX, AS}$$



事実 1　(次数 $< 2k-1$)Kont. 不変量の木部分 $Z^t(T)$ は $\mathcal{P}^t_k$ に入る．

事実 2　$\dim \mathcal{P}^t_k = \mathrm{rank}(\mathrm{Ker}[\bullet, \bullet])$

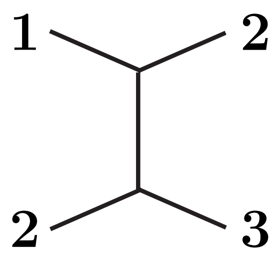
$\mathcal{P}_k^t$ からの二つの同型射 [Levine, Massuyeau]

(I) $\mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}[\bullet, \bullet]$ 　　各 1-頂点のラヴェルを消す.

(II) $\mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} H_3^{\mathrm{Lie}}(\mathcal{L}/\mathcal{L}_k)$ 　　各 3-頂点で外す.

$\mathcal{P}_k^t$ からの二つの同型射 [Levine， Massuyeau]

(I) $\mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}[\bullet, \bullet]$　　各 **1**-頂点のラヴェルを消す.

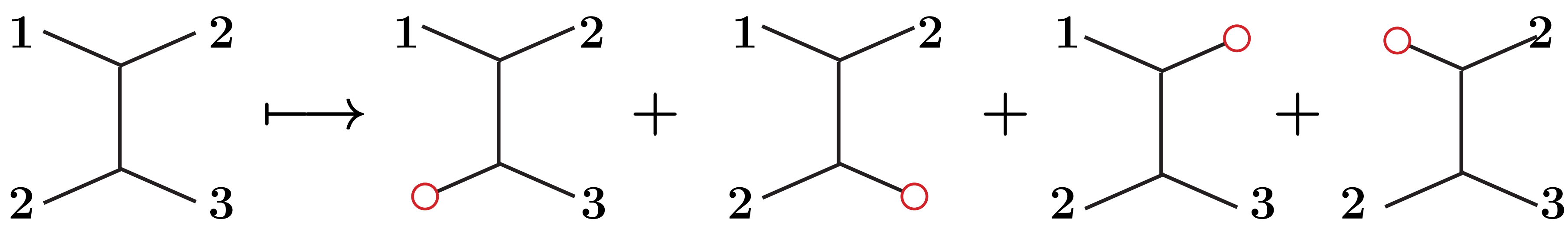


$\longmapsto$

(II) $\mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} H_3^{\mathrm{Lie}}(\mathcal{L}/\mathcal{L}_k)$　　各 **3**-頂点で外す.

$\mathcal{P}_k^t$ からの二つの同型射 [Levine, Massuyeau]

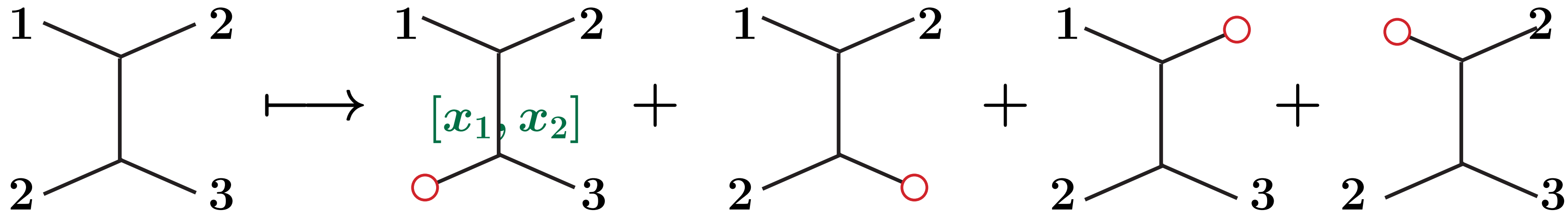
(I) $\mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}[\bullet, \bullet]$　　各 1-頂点のラヴェルを消す.



(II) $\mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} H_3^{\mathrm{Lie}}(\mathcal{L}/\mathcal{L}_k)$　　各 3-頂点で外す.

$\mathcal{P}_k^t$ からの二つの同型射 [Levine, Massuyeau]

(I) $\mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}[\bullet, \bullet]$ 　　各 **1**-頂点のラヴェルを消す.

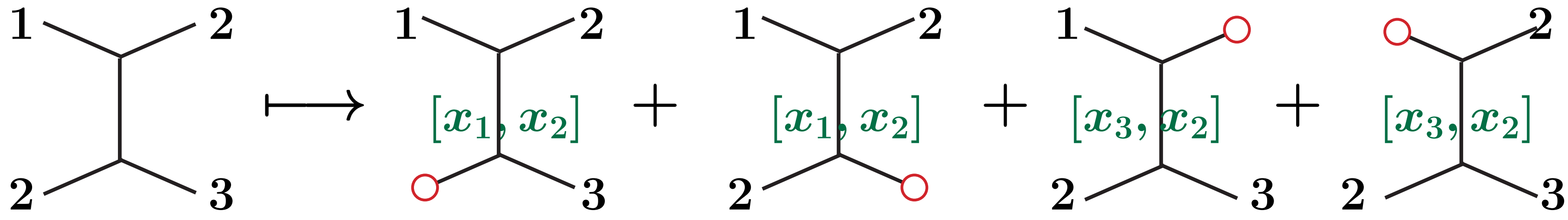


$$= [[x_1, x_2], x_3] +$$

(II) $\mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} H_3^{\mathrm{Lie}}(\mathcal{L}/\mathcal{L}_k)$ 　　各 **3**-頂点で外す.

$\mathcal{P}_k^t$ からの二つの同型射 [Levine, Massuyeau]

(I) $\mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}[\bullet, \bullet]$　　各 **1**-頂点のラヴェルを消す.

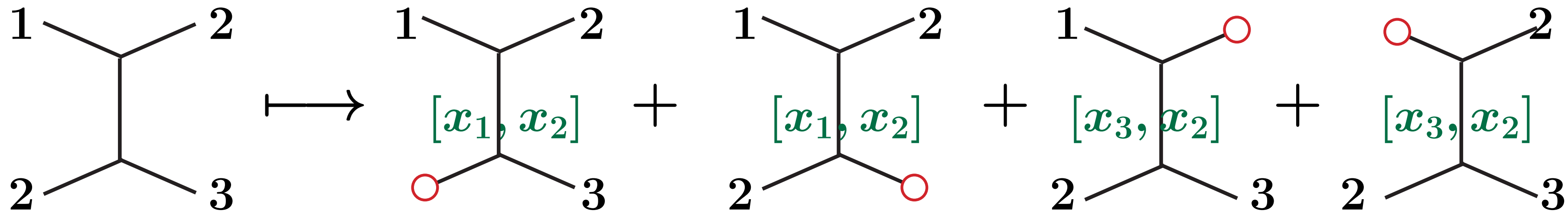


$$= [[x_1, x_2], x_3] + [x_2, [x_1, x_2] + [[x_3, x_2], x_1] + [x_2, [x_3, x_2]$$

(II) $\mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} H_3^{\mathrm{Lie}}(\mathcal{L}/\mathcal{L}_k)$　　各 **3**-頂点で外す.

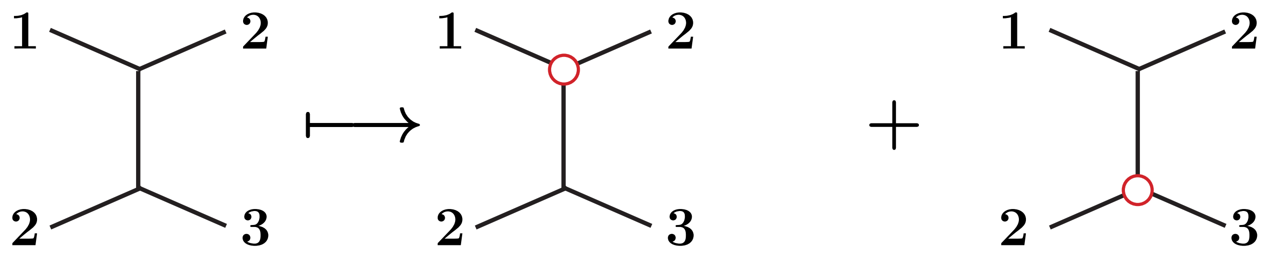
$\mathcal{P}_k^t$ からの二つの同型射 [Levine，Massuyeau]

(I) $\mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}[\bullet,\bullet]$　　各 1-頂点のラヴェルを消す．



$$= [[x_1, x_2], x_3] + [x_2, [x_1, x_2] + [[x_3, x_2], x_1] + [x_2, [x_3, x_2]$$

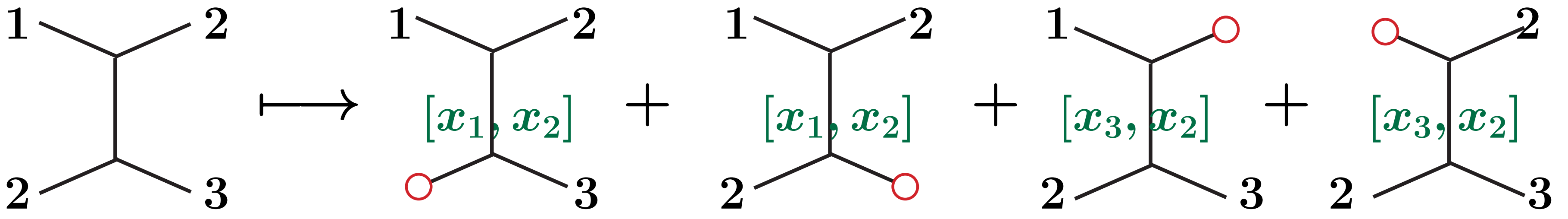
(II) $\mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} H_3^{\mathrm{Lie}}(\mathcal{L}/\mathcal{L}_k)$　　各 3-頂点で外す．



ここで $\mathcal{L}/\mathcal{L}_k$ は自由 Lie 環 $\mathbb{Q} \otimes \bigoplus_{s=1}^{k-1} F_s/F_{s+1}$

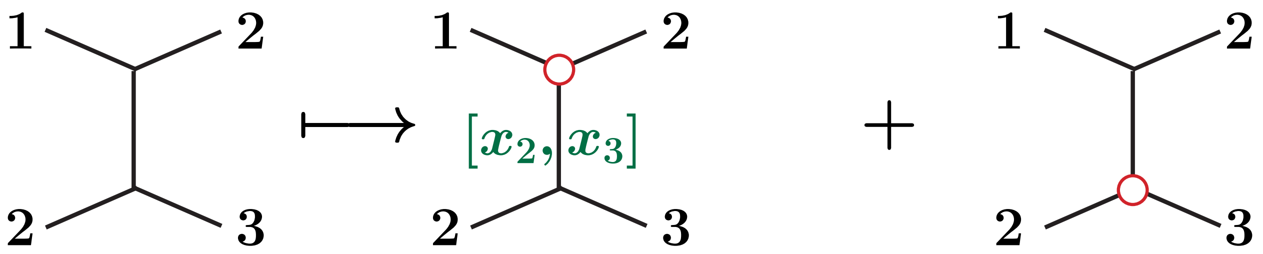
$\mathcal{P}_k^t$ からの二つの同型射 [Levine, Massuyeau]

(I) $\mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}[\bullet, \bullet]$　　各 1-頂点のラヴェルを消す.



$$= [[x_1, x_2], x_3] + [x_2, [x_1, x_2] + [[x_3, x_2], x_1] + [x_2, [x_3, x_2]$$

(II) $\mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} H_3^{\mathrm{Lie}}(\mathcal{L}/\mathcal{L}_k)$　　各 3-頂点で外す.

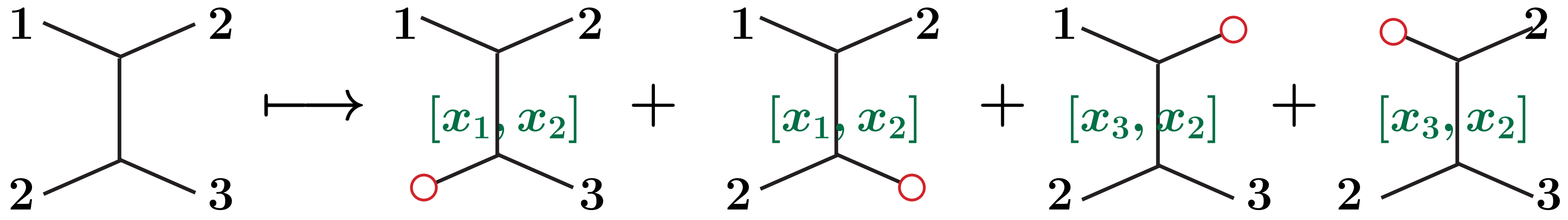


$$= x_1 \wedge x_2 \wedge [x_2, x_3] +$$

ここで $\mathcal{L}/\mathcal{L}_k$ は自由 Lie 環 $\mathbb{Q} \otimes \bigoplus_{s=1}^{k-1} F_s/F_{s+1}$

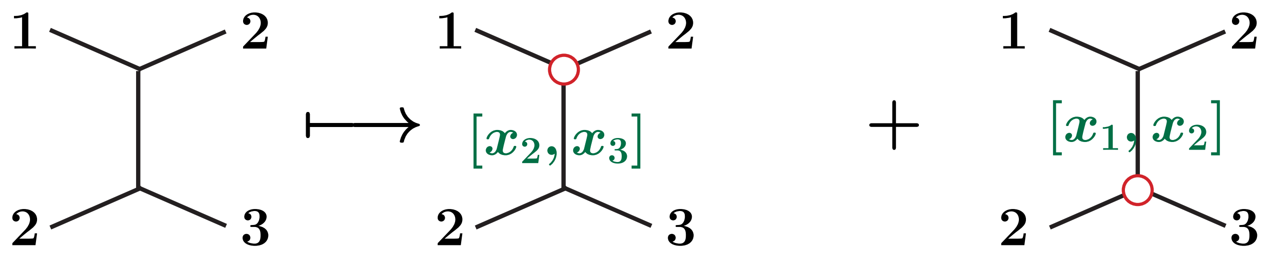
$\mathcal{P}_k^t$ からの二つの同型射 [Levine, Massuyeau]

(I) $\mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}[\bullet, \bullet]$ 　　各 1-頂点のラヴェルを消す.



$$= [[x_1, x_2], x_3] + [x_2, [x_1, x_2] + [[x_3, x_2], x_1] + [x_2, [x_3, x_2]$$

(II) $\mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} H_3^{\mathrm{Lie}}(\mathcal{L}/\mathcal{L}_k)$ 　　各 3-頂点で外す.



$$= x_1 \wedge x_2 \wedge [x_2, x_3] + [x_1, x_2] \wedge x_3 \wedge x_2$$

ここで $\mathcal{L}/\mathcal{L}_k$ は自由 Lie 環 $\mathbb{Q} \otimes \bigoplus_{s=1}^{k-1} F_s/F_{s+1}$

$\mathcal{P}_k^t$ からの二つの同型射 [Levine， Massuyeau] その２

(I) $\eta : \mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}[\bullet, \bullet]$　　各 1-頂点のラヴェルを消す.

(II) $\kappa : \mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} H_3^{\mathrm{Lie}}(\mathcal{L}/\mathcal{L}_k)$　　各 3-頂点で外す.

事実

$\mathcal{P}_k^t$ からの二つの同型射 [Levine, Massuyeau] その2

(I) $\eta : \mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}[\bullet, \bullet]$　　各 1-頂点のラヴェルを消す.

(II) $\kappa : \mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} H_3^{\mathrm{Lie}}(\mathcal{L}/\mathcal{L}_k)$　　各 3-頂点で外す.

事実 [Pickel]　$^\exists$ 同型 : $H_3^{\mathrm{Lie}}(\mathcal{L}/\mathcal{L}_k) \cong H_3^{\mathrm{gr}}(F/F_k; \mathbb{Q})$

定理 A

仮定 $\mathcal{A}_m$ を満たす T に対し, $\kappa(Z^t(T)) =$Orr 不変量

定理 B

Levine の写像 η を改良した同型 η' があって
仮定 $\mathcal{A}_m$ を満たす T に対し, $\eta'(Z^t(T)) =$ ミルナー不変量

$\mathcal{P}_k^t$ からの二つの同型射 [Levine, Massuyeau] その２

(I) $\eta : \mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}[\bullet, \bullet]$　　各 1-頂点のラヴェルを消す.

(II) $\kappa : \mathcal{P}_k^t \xrightarrow{\sim} H_3^{\mathrm{Lie}}(\mathcal{L}/\mathcal{L}_k)$　　各 3-頂点で外す.

事実 [Pickel]　$^\exists$ 同型 : $H_3^{\mathrm{Lie}}(\mathcal{L}/\mathcal{L}_k) \cong H_3^{\mathrm{gr}}(F/F_k; \mathbb{Q})$

定理 A

仮定 $\mathcal{A}_m$ を満たす T に対し，　$\kappa(Z^t(T))$ =Orr 不変量

定理 B

Levine の写像 η を改良した同型 η' があって
仮定 $\mathcal{A}_m$ を満たす T に対し，　$\eta'(Z^t(T))$ = ミルナー不変量

注意 次数 $< 2k-1$ を扱ったが，$\leq 2k-1$ 部分もホモトピー群を使って，補完する事が出来た.

まとめ:　結び目の冪零的研究を深めたい！三つの不変量

まとめ:　結び目の冪零的研究を深めたい！三つの不変量

$\boxed{\text{次数} < 2k \text{ のミルナー不変量}}$　組ひも群的

$\|$　定理１ (N.)

$\boxed{\text{次数 } k \text{ の Orr 不変量}}$ ホモロジー的

$\|$　定理２ (N.)

$\boxed{\text{次数} < 2k-1 \text{ の Kontsevich 不変量の木部分}}$ グラフ的