Eulerian coorientations and Seifert surfaces for divide links

村長　達

広島大学

2017 年 12 月 26 日

導入 (divide)

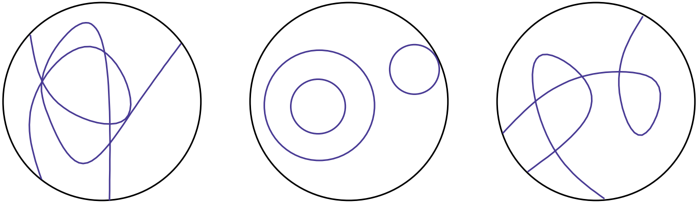
定義

$\left(\bigsqcup^{\ell} [0,1] \right) \cup \left(\bigsqcup^{m} S^1 \right)$ を以下の条件を満たすように $\Sigma_{g,n}$ にはめ込んだものを **divide** という.

(i) 像は自己接点も三重点も持たない.

(ii) 各 $[0,1]$ について, $\{\{0,1\}$ の像 $\} \subset \partial\Sigma_{g,n}$ かつ $\{\mathrm{Int}([0,1])$ の像 $\} \cap \partial\Sigma_{g,n} = \emptyset$.

(iii) 各 S^1 の像は $\partial\Sigma_{g,n}$ と交わらない.



導入 (divide)

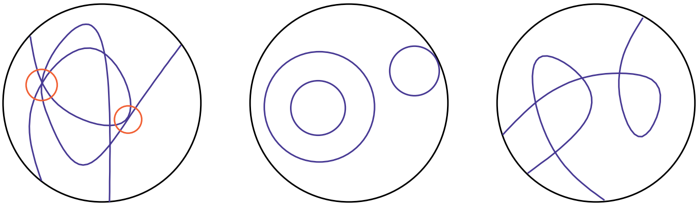
定義

$\left(\bigsqcup^{\ell} [0,1] \right) \cup \left(\bigsqcup^{m} S^1 \right)$ を以下の条件を満たすように $\Sigma_{g,n}$ にはめ込んだものを **divide** という.

(i) 像は自己接点も三重点も持たない.

(ii) 各 $[0,1]$ について, $\{\{0,1\}$ の像 $\} \subset \partial\Sigma_{g,n}$ かつ $\{\mathrm{Int}([0,1])$ の像 $\} \cap \partial\Sigma_{g,n} = \emptyset$.

(iii) 各 S^1 の像は $\partial\Sigma_{g,n}$ と交わらない.



導入 (divide)

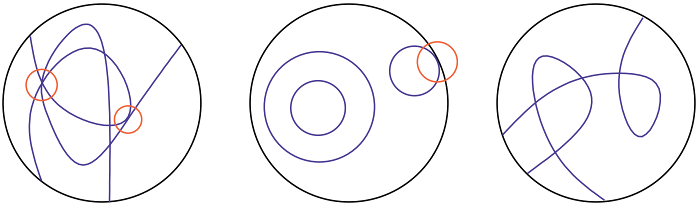
定義

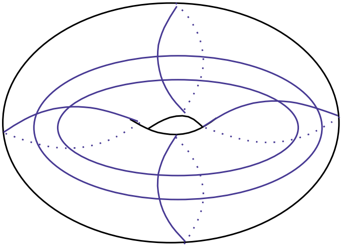
$\left(\bigsqcup^{\ell} [0,1] \right) \cup \left(\bigsqcup^{m} S^1 \right)$ を以下の条件を満たすように $\Sigma_{g,n}$ にはめ込んだものを **divide** という.

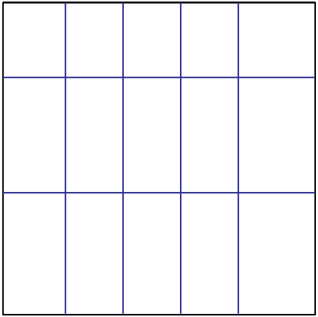
(i) 像は自己接点も三重点も持たない.

(ii) 各 $[0,1]$ について, $\{\{0,1\}$ の像 $\} \subset \partial\Sigma_{g,n}$ かつ $\{\mathrm{Int}([0,1])$ の像 $\} \cap \partial\Sigma_{g,n} = \emptyset$.

(iii) 各 S^1 の像は $\partial\Sigma_{g,n}$ と交わらない.



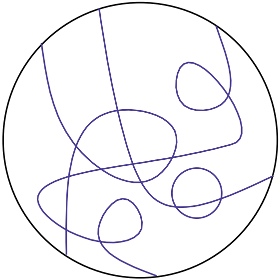




定義

devide P が **admissible** であるとは以下を満たすときをいう.

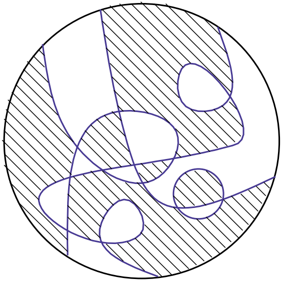
(i) P は connected.
(ii) P の interior region はすべて単連結.
(iii) P の各 exterior region は単連結か annulus.
(iv) P は checkerboard coloring できる.



定義

devide P が **admissible** であるとは以下を満たすときをいう.

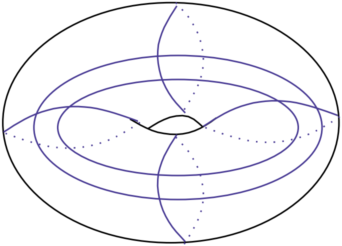
(i) P は connected.
(ii) P の interior region はすべて単連結.
(iii) P の各 exterior region は単連結か annulus.
(iv) P は checkerboard coloring できる.

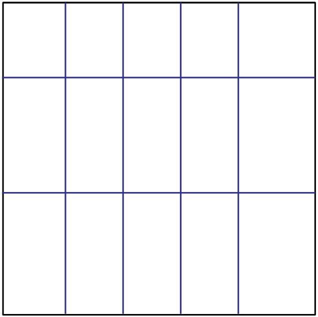


定義

devide P が **admissible** であるとは以下を満たすときをいう.

(i) P は connected.
(ii) P の interior region はすべて単連結.
(iii) P の各 exterior region は単連結か annulus.
(iv) P は checkerboard coloring できる.

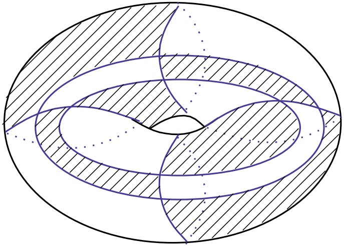


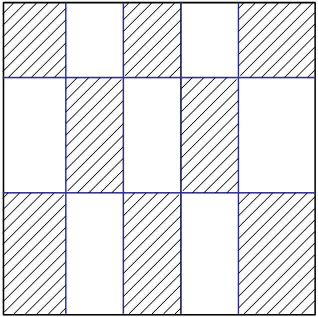


定義

devide P が **admissible** であるとは以下を満たすときをいう.

(i) P は connected.
(ii) P の interior region はすべて単連結.
(iii) P の各 exterior region は単連結か annulus.
(iv) P は checkerboard coloring できる.

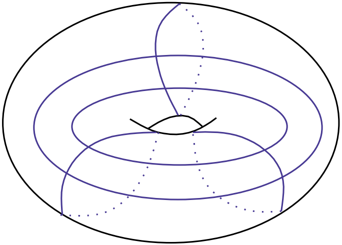


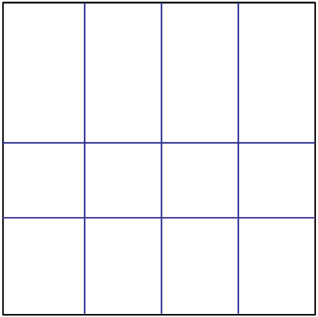


定義

devide P が **admissible** であるとは以下を満たすときをいう.

(i) P は connected.
(ii) P の interior region はすべて単連結.
(iii) P の各 exterior region は単連結か annulus.
(iv) P は checkerboard coloring できる.

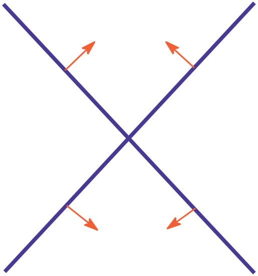




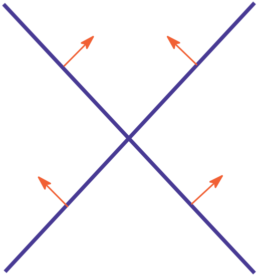
導入 (Eulerian coorientation)

divide をグラフとみなし, 各 edge に coorientation (法方向) を定める.

このとき, 各交点の周りで以下のどちらかになるように定めた coorientation を **Eulerian coorientation** という. 以下, divide P 上の Eulerian coorientation の集合を $\mathrm{Eul}(P)$ と表す.



alternating

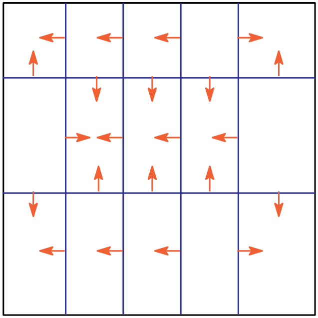


transparent

導入 (Eulerian coorientation)

divide をグラフとみなし, 各 edge に coorientation (法方向) を定める.

このとき, 各交点の周りで以下のどちらかになるように定めた coorientation を **Eulerian coorientation** という．以下, divide P 上の Eulerian coorientation の集合を $\mathrm{Eul}(P)$ と表す.

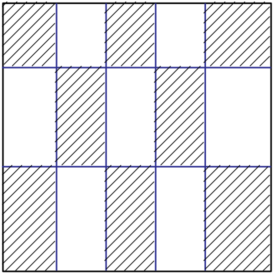


T^2

導入 (Eulerian coorientation)

divide をグラフとみなし, 各 edge に coorientation (法方向) を定める.

このとき, 各交点の周りで以下のどちらかになるように定めた coorientation を **Eulerian coorientation** という. 以下, divide P 上の Eulerian coorientation の集合を $\mathrm{Eul}(P)$ と表す.



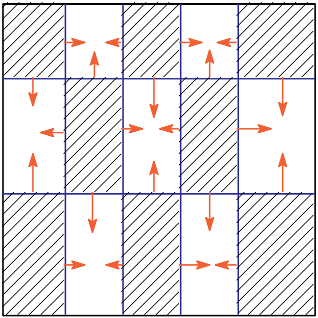
T^2

admissible という仮定より checkerboard coloring できる.

導入 (Eulerian coorientation)

divide をグラフとみなし, 各 edge に coorientation (法方向) を定める.

このとき, 各交点の周りで以下のどちらかになるように定めた coorientation を **Eulerian coorientation** という. 以下, divide P 上の Eulerian coorientation の集合を $\mathrm{Eul}(P)$ と表す.



T^2

この Eulerian coorientation を checkerboard coloring から得られる Eulerian coorientation という.

導入 (divide link)

$\Sigma_{g,n}$ にリーマン計量を入れる.

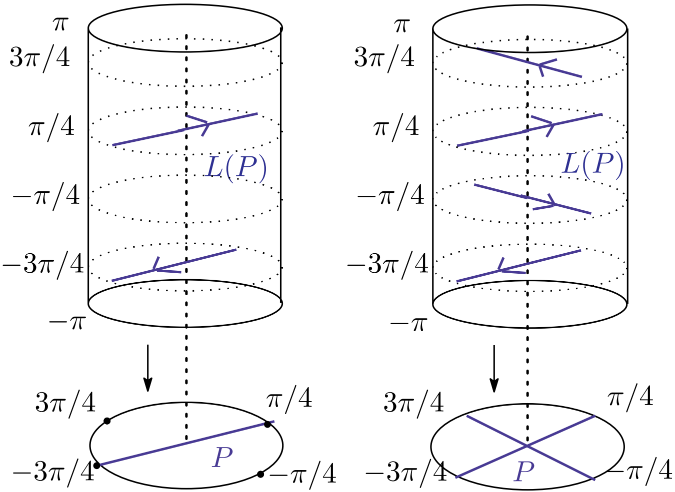
定義

P : $\Sigma_{g,n}$ 上の divide とする.

$L(P) := \{(x, u) \in UT(\Sigma_{g,n}) \mid x \in P, u \in T_xP\}$: **divide link.**

定義

$L(P) := \{(x,u) \in UT(\Sigma_{g,n}) \mid x \in P, u \in T_xP\}$.



導入 (BB-surface)

$\Sigma_{g,n}$ にリーマン計量を入れる．$\langle \ , \ \rangle$ を曲面上のリーマン計量とする．

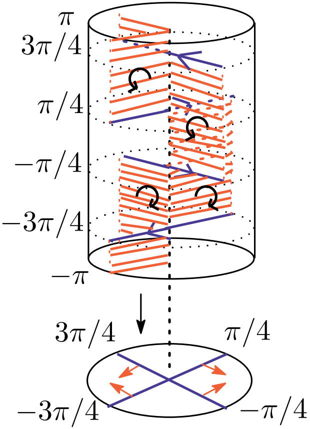
定義

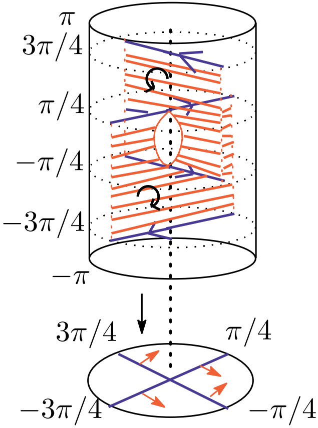
P : $\Sigma_{g,n}$ 上の divide, $\nu \in \mathrm{Eul}(P)$ とする．

$S_\nu(P) := \{(x,u) \in UT(\Sigma_{g,n}) \mid x \in P, \ \langle \nu, u \rangle \geq 0\}$ を必要ならば smoothing したもの : **BB-surface.**

定義

$S_\nu(P) := \{(x,u) \in UT(\Sigma_{g,n}) \mid x \in P,\ \langle \nu, u\rangle \geq 0\}$ を必要ならば smoothing したもの.





注意

$L(P)$ は $UT(\Sigma_{g,n})$ 内の oriented link であり, $S_\nu(P)$ は $L(P)$ の Seifert surface である.

定理 (A'Campo 1998, Hirasawa 2002)

$P \subset \Sigma_{0,1} = D^2$: divide,
$\nu \in \mathrm{Eul}(P)$: 各交点のまわりで transparent

$\Rightarrow S_\nu(P) \subset UT(D^2)$ $(= S^3)$ は $L(P)$ の fiber surface.

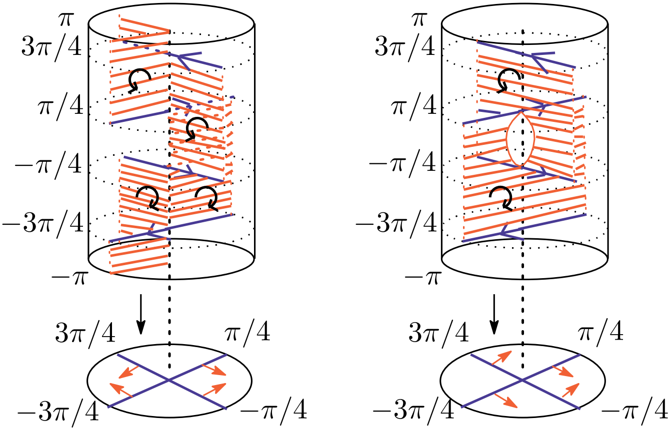
定理 (A'Campo 1998, Ishikawa 2004)

$P \subset \Sigma_{g,n}$: divide,
$\nu \in \mathrm{Eul}(P)$: checkerboard coloring から得られる Eulerian coorientation

$\Rightarrow S_\nu(P) \subset UT(\Sigma_{g,n})$ は $L(P)$ の fiber surface.

命題

$^\forall P \subset D^2$: divide, $^\forall \nu \in \mathrm{Eul}(P)$, $S_\nu(P)$: $L(P)$ の fiber surface.



$P \subset \Sigma_{g,0}$: divide を一つ固定する.

定義 (Cossarini-Dehornoy 2016)

1. 以下で定まる $\|\cdot\|_P : H_1(\Sigma_{g,0};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を **intersection norm** という.

   $\|x\|_P := \min_{[a]=x} |a \cap P|$ (ただし, a と P は一般の位置).

   また, 以下の集合を **norm ball** という.

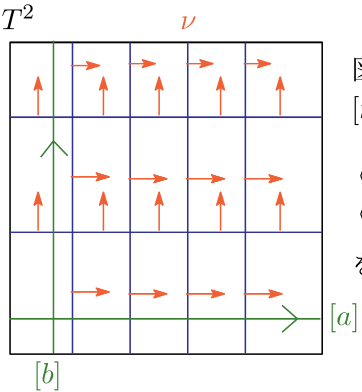
   $B_{\|\cdot\|_P} := \{x \in H_1(\Sigma_{g,0};\mathbb{R}) \mid \|x\|_P \leq 1\}$.

2. 以下で定まる $\|\cdot\|_P^* : H^1(\Sigma_{g,0};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を **dual norm** という.

   $\|\varphi\|_P^* := \max_{x \in B_{\|\cdot\|_P}} \varphi(x)$ (ただし $\varphi \in H^1(\Sigma_{g,0};\mathbb{R})$).

   また, 以下の集合を **dual ball** という.

   $B^*_{\|\cdot\|_P} := \{\varphi \in H^1(\Sigma_{g,0};\mathbb{R}) \mid \|\varphi\|_P^* \leq 1\}$.



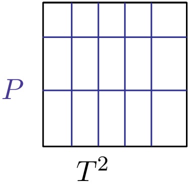
図の $\nu \in \mathrm{Eul}(T^2)$ から得られる
$[\nu] \in H^1(T^2; \mathbb{R})$ は

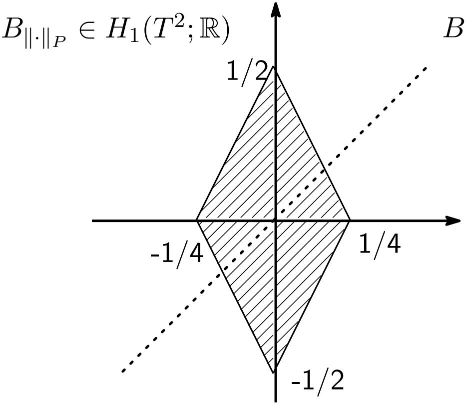
$$\langle [\nu], [a] \rangle = 4,$$
$$\langle [\nu], [b] \rangle = 2.$$

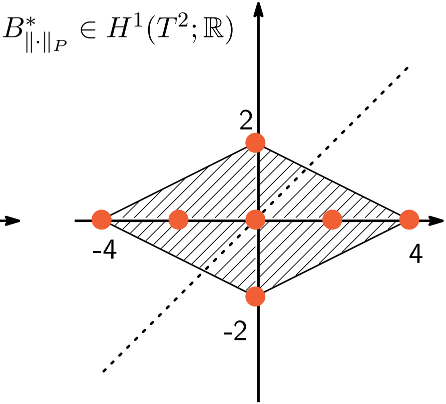
を満たす.

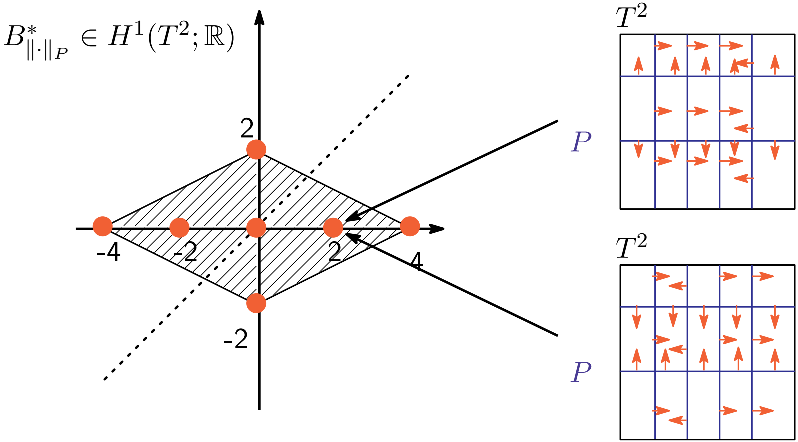
注意

任意の $\nu \in \mathrm{Eul}(P)$ に対して, $[\nu]$ は $B^*_{\|\cdot\|_P}$ 上の点である.


P
T^2


$B_{\|\cdot\|_P} \in H_1(T^2;\mathbb{R})$
1/2
-1/4
1/4
-1/2


$B^*_{\|\cdot\|_P} \in H^1(T^2;\mathbb{R})$
2
-4
4
-2


$B^*_{\|\cdot\|_P} \in H^1(T^2;\mathbb{R})$
2
-4
-2
2
4
-2
P
P
T^2
T^2

ここまでのまとめ

$P \subset \Sigma_{g,0}$: divide

$\rightsquigarrow$

- $L(P) \subset UT(\Sigma_{g,0})$: oriented link.
- $\| \cdot \|_P$: $H_1(\Sigma_{g,0};\mathbb{R})$ 上のノルム.
- $\| \cdot \|_P^*$: $H^1(\Sigma_{g,0};\mathbb{R})$ 上のノルム.

$\nu \in \mathrm{Eul}(P)$

$\rightsquigarrow$

- $S_\nu(P)$: $L(P)$ の Seifert surface.
- $[\nu] \in H^1(\Sigma_{g,0};\mathbb{R})$, 特に $[\nu] \in B^*_{\|\cdot\|_P}$.

定理 (Cossrarini-Dehornoy 2016)

$P \subset \Sigma_{g,0}$: divide, $\nu \in \mathrm{Eul}(P)$ とする.

- $B^*_{\|\cdot\|_P}$ 内の任意の偶数点 φ に対して $^\exists\nu \in \mathrm{Eul}(P)$ s.t. $[\nu] = \varphi$.
  逆に $\nu \in \mathrm{Eul}(P)$ に対して $[\nu]$ は $B^*_{\|\cdot\|_P}$ 内の偶数点に対応する.

$P \subset \Sigma_{g,0}$: geodesic divide, $\nu \in \mathrm{Eul}(P)$ とする.

- $S_\nu(P)$: geodesic flow $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ の Birkhoff cross section
  $\Leftrightarrow [\nu] \in \mathrm{Int}(B^*_{\|\cdot\|_P})$.
- $\nu_1, \nu_2 \in \mathrm{Eul}(P)$, $[\nu_1]$, $[\nu_2] \in \mathrm{Int}(B^*_{\|\cdot\|_P})$ とする.
  このとき $S_{\nu_1}(P) \approx S_{\nu_2}(P) \Leftrightarrow [\nu_1] = [\nu_2]$.

問題

$P \subset \Sigma_{g,0}$ が geodesic でない場合でも同様の事実は成立するのか?

明らかにしたこと

$P \subset \Sigma_{g,0}$: divide, ν_1, $\nu_2 \in \mathrm{Eul}(P)$ であるとする.

定理

$[\nu_1] = [\nu_2] \Leftrightarrow [S_{\nu_1}(P)] = [S_{\nu_2}(P)] \in H_2(UT(\Sigma_{g,0}), L(P); \mathbb{R})$.

系

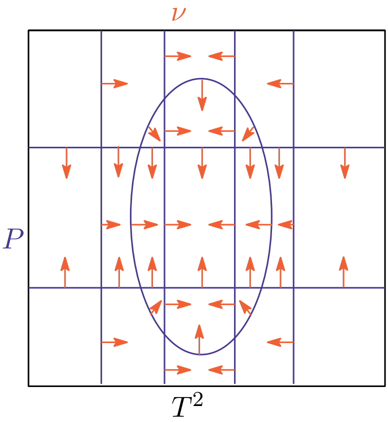
$S_{\nu_1}(P)$ が $L(P)$ の fiber surface であるとする.

$[\nu_1] = [\nu_2] \Rightarrow$

(i) $S_{\nu_2}(P)$ は $L(P)$ の fiber surface である.

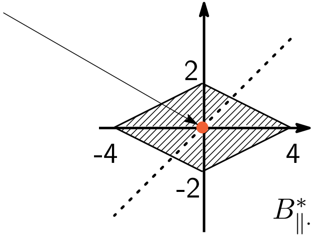
(ii) $S_{\nu_1}(P) \approx S_{\nu_2}(P)$.

特に $[\nu] = 0 \Rightarrow S_\nu(P)$: fiber surface である.



図の P は geodesic divide ではない.
また Eulerian coorientation ν は
checkerboard coloring からは得られない.

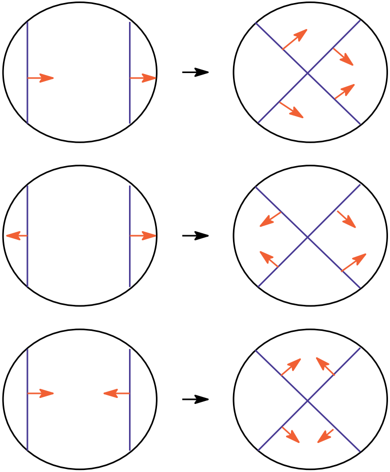
だが $[\nu] = 0$ であるので,
$S_\nu(P)$ は fiber surface である.



$B^*_{\|\cdot\|_P} \in H^1(T^2;\mathbb{R})$

fiber 性を変えない操作

次のような操作を考える.



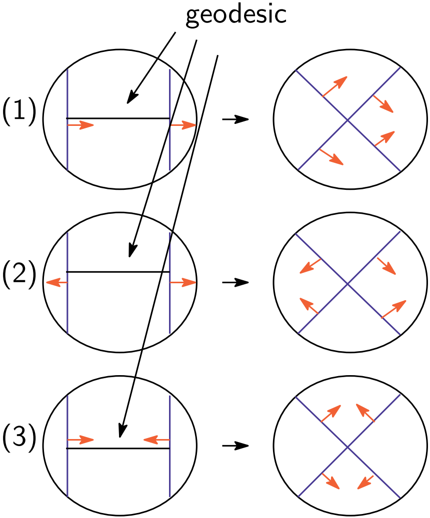
(1)

(2)

(3)

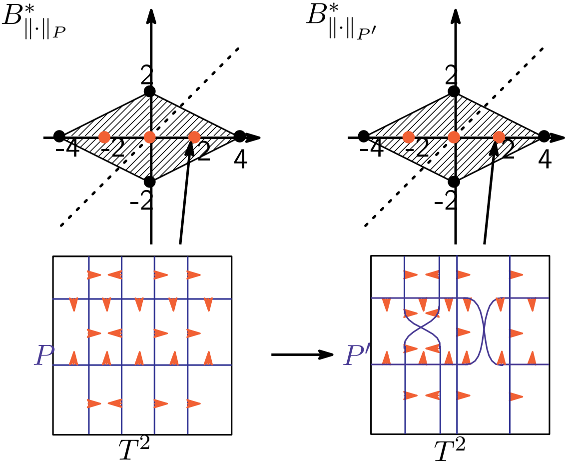
fiber 性を変えない操作

次のような操作を考える．



定理

P を geodesic divide, $\nu \in \mathrm{Eul}(P)$ を $[\nu] \in \mathrm{Int}(B^*_{\|\cdot\|_P})$ であるものとする．この操作を施した後の divide を P', Eulerian coorientation を ν' とする．このとき $^\exists(\phi'_t)_{t\in\mathbb{R}}$: $UT(\Sigma_{g,0})$ 上の flow s.t. $S_{\nu'}(P')$ は $(\phi'_t)_{t\in\mathbb{R}}$ の Birkhoff cross section である．特に $S_{\nu'}(P')$ は fiber surface である．



今後の課題

P : geodesic とは限らない divide に対して

1. dual ball の内部のすべての偶数点は fiber surface に対応するのか.
2. Reidemeister move のもとでの振る舞いはどうなっているのか.

1. 境界のある曲面にはめ込んだ場合.

1. 接触構造との関係.

ありがとうございました.