

具体的な折り目写像を通したいろいろな多様体の
表現

Naoki Kitazawa

January 22, 2018

導入と基本的定義

話すこと

- (可微分)多様体をその上の自身より高くない空間への良い可微分写像を用いて調べるということ。
 - 特に Morse 関数の理論とその自然な高次元化。
 - そういう良い写像で多様体を調べる、表現するという幾何学の基本的な問題。

可微分写像の 特異点; 微分が退化している点

⇒ 物体 (多様体) の写真 (写像の像) とくに輪郭 (特異点の像) から物体の元の形を知ろうという哲学。

話すこと(補足)

2015 年度幾何学賞受賞テーマ

佐伯 修氏 「安定写像と多様体のトポロジーの研究」

の内容に関する自らの試みの一部

⇒ 「結び目の数学 VIII」]内容と新たな内容

Morse 関数の理論と可微分多様体の(微分)位相幾何学への応用

Morse 関数; 多様体に**必ずしも豊富にある**良い関数。(閉多様体上であれば) **特異点は有限個**あり各特異点で値が異なるものが沢山あるとして良い。
⇒ 特異点から多様体の**ホモロジー群**や**一部のホモトピー的**な情報。
⇒ 20 世紀前半に登場し、1950–70 年代の自由度の高い高次元を中心とした多様体の(微分)位相幾何学で活躍。

今後多様体、部分多様体、多様体間の写像は基本全て**可微分**
(C^∞ 級)。

折り目写像の定義

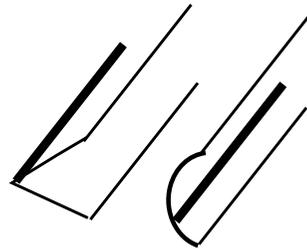
Definition 1. 任意の特異点 p の局所的な型が, ある整数 $0 \leq i(p) \leq \frac{m-n+1}{2}$ があって

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \sum_{k=n}^{m-i(p)} x_k^2 - \sum_{k=m-i(p)+1}^m x_k^2)$$

となるような可微分写像を 折り目写像 という。

$n = 1$: Morse 関数

$m = n = 2$: 紙をたるませ射影したときたるみとして特異点の集まり



太線が特異点の集まり

折り目写像の基本的な性質

Proposition 1. 折り目写像の各特異点 p で Definition 1 の局所的な表示

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \sum_{k=n}^{m-i(p)} x_k^2 - \sum_{m-i(p)+1}^m x_k^2)$$

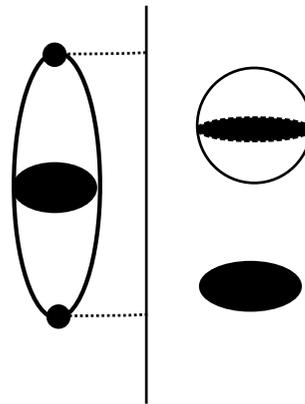
の $i(p)$ は一意 (p の 指数)。

⇒ 例えば指数 0 の点は極大極小にあたる点。

Proposition 2. (決まった指数の) 特異点全体の集合 (特異点集合) は $n-1$ 次元の閉部分多様体でそこへ制限するとはめ込み。基本的には 安定 なもの、より詳しくはこのはめ込みが **transversal** なのを考える。

(閉多様体上の) 折り目写像の存在と簡単な例

- ・ 値域が直線： **Morse 関数**に他ならず**必ずたくさん**存在。
 - ・ 値域が平面： オイラー数が偶数であることが存在の必要十分条件。
- ⇒ 前の Whitney や Thom、Levine らによる 1960 年代の研究。
- ・ 値域がより高次元の場合： 球面やその直積そしてかなり一般に安定平行化可能な多様体には存在する等簡単な部分は解決。
- ⇒ 1970 年代の Eliashberg の研究に始まり今に至るまで重要な問題。
- 最も簡単な例： 特異点が丁度 2 個からなる、ホモトピー球面を位相的に特徴づける Morse 関数 (Reeb の定理)
- 標準球面の射影



折り目写像の構成

多様体をみる、調べる上で基本的で重要な話。

- 低次元(3-4)
 - ある程度例えば 1-2 次元へのものが構成。
 - (近いところで、安定写像の定義はみたさないが) Lefschetz ファイブレーション等複素と相性の良いファイブレーションの構成等が活発)
- 一般次元
 - 前の特異点を丁度 2 個有する Morse 関数。
 - 7 次元ホモトピー球面上の写像の (Calabi、 Saeki、 Wrazidlo、 K) 等の研究。
 - **基本的な多様体**でも一般次元では**難しく謎が多い**という状況。

今回のテーマー一般次元多様体上の写像と定義域多様体の具体的構成ー

特別な(微分)位相幾何学的性質を有する折り目写像のクラスと構成

special generic 写像—

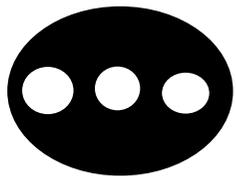
special generic 写像; 特異点の指数が常に 0 の折り目写像

⇒ 特異点が極大極小点にあたるもののみで制限は強いが、扱いやすく構成もある程度容易。

⇒ 佐伯修氏、佐久間一浩氏が 1990 年代以降盛んに研究したクラス (1970 年頃には登場)。

Example 1. 特異点が丁度 2 つあるホモトピー球面上の Morse 関数。単位球面の自然な射影。

Example 2 (Saeki (1993) 等). 二個の球面の直積 (Saeki 1993 他: 直積ではなく一般に捩じれた束の全空間のケースもある) の連結和として表現される多様体上の、像が標準球面と標準球体の直積の境界連結和として表現され特異点集合の像が境界に一致するもの。



Example 2 の写像の像 (k を 1 以上の整数とし像は $S^1 \times [-1, 1]$ の境界連結和で定義域は $S^1 \times S^k$ の連結和として表現される)

special generic 写像と微分構造

Fact 1 (Saeki (1993)). 平面への像が円板で特異点集合の像が円板の境界になるような折り目写像は、4次元のエキゾチック球面にはできないがそれ以外の2次元以上のホモトピー球面上に構成できる。逆にこのような折り目写像を許容する多様体はホモトピー球面。

Fact 2 (Saeki (1993)). 4次元以上の標準でないホモトピー球面は、次元差1–3のユークリッド空間への *special generic* 写像を許容しない。

Fact 3 (Wrazidlo (2017)). 7次元の向きづけられたホモトピー球面の型28個の14個の型のものは \mathbb{R}^3 への *special generic* 写像を許容しない。

Fact 4 (Saeki Sakuma (1990s–2000s)). 4次元多様体の組で以下を満たすものが存在。

- 双方 \mathbb{R}^3 への折り目写像を許容。
- 一方は *special generic* 写像を許容するが他方はしない。

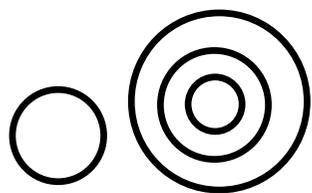
⇒ 値域が3次元以上では微分構造が写像により支配される。

折り目写像のクラス—同心円形折り目写像—

同心円形折り目写像 (round fold map); 特異点集合が標準球面の非交和で、特異値集合が同心円状であるような折り目写像

⇒ special generic 写像等の有する(微分)位相幾何学的な面白さに刺激を受け、**適当なクラスを導入し研究することが多様体の幾何学への応用で基本的で重要と考え、講演者により 2012 年ころに導入され研究された写像。**

⇒ 定義域多様体のホモロジー群やホモトピー群、位相型や微分同相型の研究(正則値の逆像が球面の非交和であるものや周辺を講演者は特によく研究)。



左は一番簡単な同心円形折り目写像(前の**標準球面の射影**等もこれ)、右は特異点集合の像が 3 成分からなる同心円形折り目写像(値域は平面)。

同心円形折り目写像の例

Theorem 1 (K (2013–4)). 整数 $m > n \geq 2$ をとる。 S^n 上の S^{m-n} -束の全空間の連結和になる多様体から \mathbb{R}^n への以下をみたす同心円形折り目写像 f がある。

- 正則値の逆像が標準球面の非交和で中へ行くほど成分が増える。
- 特異値集合の連結成分 C の閉管状近傍 $N(C)$ とする。任意の C で $f|_{f^{-1}(N(C))}$ は C 上の自明束とみなせる $N(C)$ のファイバーを L としたとき Morse 関数 $f|_{f^{-1}(L)}$ と $\text{id}_{S^{n-1}}$ の直積と見なせる。

Corollary 1 (K (2013–4)). 7 次元のすべてのホモトピー球面 (向きもこめ 28 個) は、 \mathbb{R}^4 へ前の定理のような写像で特異点全体の集合が 3 成分以下であるものを許容する。特に特異点集合の成分数について

1 個のもの: 標準球面のみ許容 2 個: 16 個が許容 3 個: 全てが許容

⇒ 写像の型が定義域多様体に精密な制限 (可微分構造に制限; special generic 写像でもあった現象を発掘

難(良)問: 全型を適当なクラスの写像で区別できるか)!

同心円形折り目写像の更なる例

Theorem 2 (K (2014)). 整数 $m > n \geq 2$ をとる。前 *Theorem* 同様の以下の条件(今後**特異値周辺自明性**と呼ぶ)をみたす同心円形折り目写像 f があるとする。

- 特異値集合の連結成分 C の閉管状近傍 $N(C)$ とする。任意の C で $f|_{f^{-1}(N(C))}$ は、 C 上の自明束とみなせる $N(C)$ のファイバーを L としたとき Morse 関数 $f|_{f^{-1}(L)}$ と $\text{id}_{S^{n-1}}$ の直積と見なせる。

もし M 上の閉多様体 F をファイバーとした束が各 $f^{-1}(N(C)) \subset M$ に制限して自明ならば、同様の性質をみたす \mathbb{R}^n への同心円形折り目写像が束の全空間にある。

Example 3 (K (2014–)). 例えば特異値周辺自明性を仮定し $F = S^1$ としたとき以下の状況で定理が適用可。

(1) $n \geq 4$ 。 (2) $n = 3$ で定義域多様体が連結で像が円板。 (3) $n = 2$ で「束が向きづけ可能である」または「像が円板」。

(3)(4) の場合一般に異なる定義域多様体の組が可算無限できることがある (Theorem 1 の例等が簡単な適用できる例)。

折り目写像のさらなる構成と定義域多 様体の表現

写像の構成と手術

手術：多様体や写像の一部を取り除き新たなものを貼りかえる操作

・ **多様体の手術**：20 世紀後半の高次元多様体の(微分)位相幾何学でも低次元多様体の位相幾何学でも基本。

・ 写像の手術

- Eliashberg の 1970 年代の研究。

⇒ 重要な理論だが今回とは別の色の内容。

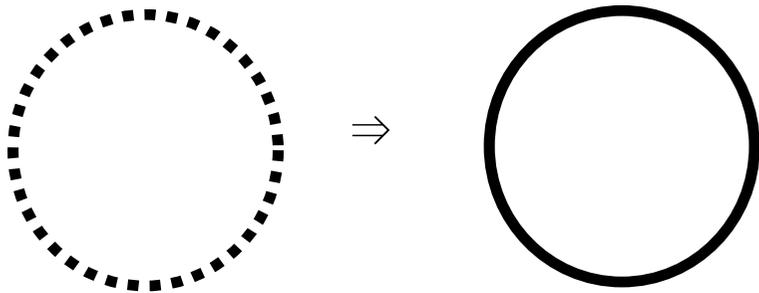
- 1990 年代以降の小林真人氏(秋田大学)による手術。

⇒ 扱いやすい写像を構成し多様体をみようと(さらに扱いやすい写像を用いて多様体を調べようと)、**講演者と独立に**扱いやすい写像を研究。手術を導入。

→ 2 次元以上の閉多様体から平面へのそれなりに扱いやすい安定写像を貼り換えて定義域多様体を変えずに変形する。 **R-operation** (Theorem 1 の写像の構成のヒントになった)、 bubbling surgery。

小林真人氏による bubbling surgery

bubbling surgery: 新たに特異点集合、特異値集合として球面を一つ増やす操作; 特異値集合の球面の内部は特異値を有さず、球面と内部以外の部分の逆像上では写像は変化しない。

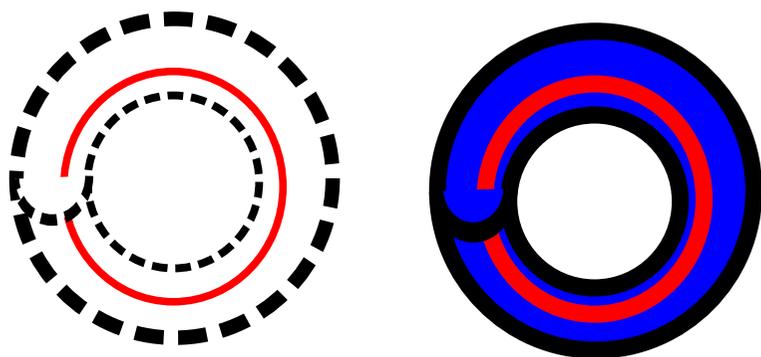


bubbling surgery で特異値集合が埋め込まれた球面 1 つ分追加

Example 4. Theorem 1 の写像; **標準球面の射影**で得られる同心円形折り目写像からはじめ有限回の点における bubbling surgery で得られる。

bubbling surgery の高次元化

以下のような操作を bubbling surgery (の特別なものの) 高次元化として提案 (K (2015))。



\mathbb{R}^3 中の自明な結び目 (赤) をとって青い部分の逆像を標準球面 1 個分増やす (黒の実線で印をつけられた境界のトーラスが新たな特異値の像)。

前の操作の導入における設定(これだけみても難しい
と思います)

M ; m 次元閉多様体 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$; 特異点集合 $S(f)$ に制限すると埋め
込みである折り目写像

$S \subset \mathbb{R}^n - f(S(f))$; $k < n$ 次元向きづけ可能閉連結部分多様体

$N_i(S) \subset N(S) \subset N_o(S)$; S の小さな閉管状近傍

Q ; $f^{-1}(N_o(S))$ の成分で $f|_Q$ は $N_o(S)$ 上の S^{m-n} -束

M' ; $M - \text{Int}Q$ を滑らかな部分多様体として含む m 次元閉多様体

これらの状況で次を満たす折り目写像 $f' : M' \rightarrow \mathbb{R}^n$ があるとする。

• $f|_{M - \text{Int}Q} = f'|_{M' - \text{Int}Q}$, f' の特異値集合は $f(S(f)) \sqcup \partial N(S)$ で f'
の特異点集合と $f'^{-1}(\partial N(S))$ の共通部分への制限は埋め込み。

• $f'|_{(M' - (M - Q)) \cap f'^{-1}(N_i(S))}$; 2 つの $N_i(S)$ 上の S^{m-n} -束を与える。

操作の定義

Definition 2. f から f' を構成する手続きを S における normal S-bubbling operation と呼ぶ。 S を (この操作の) 生成多様体 と呼ぶ。

⇒ 部分多様体のまわりとその逆像のみ変化; 正則値集合内の連結な部分多様体で各点の逆像が標準球面を含むものについて、標準球面 1 個分もとの標準球面の成分から分裂する形で増やす操作。

⇒ (安定) 折り目写像では必ず行える操作 (指数 0 の特異点の集合の像近くを考える)。

今後の表記と考える問題

$m > n$: 自然数 M : m 次元閉多様体 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$; (安定) 折り目写像
 $f' : M' \rightarrow \mathbb{R}^n$: f に normal S-bubbling operation を繰り返して得られる写像 (と定義域多様体)

W_f ($W_{f'}$) : f (resp. f') の逆像の連結成分を一点にした定義域多様体の商空間 (Reeb 空間) $\Rightarrow q_f : M \rightarrow W_f$ (resp. $q_{f'} : M \rightarrow W_{f'}$): 商写像

$\chi(X)$: 位相空間 X のオイラー数 R : 主イデアル整域

基本的で重要な問題 : この操作を最も簡単なもの例えば標準球面の射影や **special generic** 写像から繰り返してどれだけ多くの写像や定義域多様体ができるか?

\Rightarrow 一回または有限回のこの操作でどう写像 (の **Reeb space**) や定義域多様体に変化しうるか。

Proposition 3. f から S における normal S-bubbling operation で f' が得られるとき

- $H_k(W_{f'}; R)$ は $H_k(W_f; R) \oplus H_{k-(n-\dim S)}(S; R)$ と同型。
- $\chi(W_{f'}) = \chi(W_f) + (-1)^{n-\dim S} \chi(S)$ 。

定義域多様体と Reeb space をつなぐ命題

Proposition 4 (Saeki Suzuoka (2005) K (2013–2014)). 特異点の指数が 1 で $q_f : M \rightarrow W_f$ の特異点集合への制限が単射な折り目写像 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ について

- 正則値の逆像は全て 4 次元のエキゾチック球面以外のホモトピー球面
- $m - n = 1$ のとき M は向きづけ可能。

このとき商写像 $q_f : M \rightarrow W_f$ は $m - n - 1$ 次元以下のホモロジー群 (コホモロジー環ホモトピー群) の同型を導く。

- W_f が M の低次の代数的情報をそのまま。
- ⇒ 実はホモロジー群は一部の次元除き全ての次元についてある程度正確に計算可能 (最近理解)。
- special generic 写像や命題の f に normal S-bubbling operation を繰り返し得た f' が仮定を満たす。
- ⇒ 今後 f はこのような写像とし、また W_f の命題でも実質定義域 M に関する命題と考えてよい。

導入した操作の繰り返しで得られる写像

Theorem 3 (K (2015–2017)). $m > n$; 自然数

$\{G_j\}$; 主イデアル整域 R 上の自由な有限生成加群の列 ($0 \leq j \leq n$; 整数)

G_0 ; 自明 G_n ; 非自明

$$\sum_{j=1}^{n-1} \text{rank } G_j \leq \text{rank } G_n$$

とする。折り目写像 f に対し normal S-bubbling operation を繰り返して折り目写像 f' で $0 \leq j \leq n$ で

$$H_j(W_{f'}; R) \cong G_j \oplus H_j(W_f; R)$$

が成立するものが作れる。

更なる写像の例 (係数が整でホモロジー群に捩じれが有る場合)

Theorem 4 (K (2017)). $m > n \geq 5$; 自然数

$\{G_j\}$; 以下を満たす有限可換群の列 ($0 \leq j \leq n$; 整数)

- $3 \leq j \leq n - 2$ 以外で自明。
- G_j の $3 \leq j \leq n - 3$ の直和 ($n = 5$ の時は自明群と定義) が G_{n-2} の部分群とみなせる。

$\{h_j\}$: 以下を満たす非負整数の列 ($0 \leq j \leq n$; 整数)

- G_j が非自明なら h_{j-1} は正、 $h_0 = 0$ 、 $h_n \geq \sum_{j=0}^{n-1} h_j$ 。

とする。このとき折り目写像 f に対し normal S-bubbling operation を繰り返して折り目写像 f' で $0 \leq j \leq n$ で

$$H_j(W_{f'}; R) \cong G_j \oplus \mathbb{Z}^{h_j} \oplus H_j(W_f; R)$$

が成立するものが作れる。

⇒ (整係数) ホモロジー群に多くのねじれのある多様体上の具体的な折り目写像は系統的に得にくい中成功。

導入した操作の繰り返しで起こる制限

Proposition 5. 折り目写像 f に対し normal S-bubbling operation を繰り返してできる折り目写像 f' について $\{G_j\}$; R 上の有限生成加群の列 ($0 \leq j \leq n$; 整数) で G_0 ; 自明 G_n ; 非自明 であるようなものがある

$$H_j(W_{f'}; R) \cong G_j \oplus H_j(W_f; R)$$

となる。

Proposition 3 よりすぐわかる。今後 f 、 f' でこの定理の $\{G_j\}$ は断りなしに用いる。

導入した操作の繰り返しで起こるより具体的なオイラー数やホモロジー群の制限

Theorem 5 (K (2017)). $j_0 : G_j$ が自明でないような最小の $1 \leq j \leq n$ について

- $\text{rank } G_{j_0} \leq \text{rank } G_n$ で G_{j_0} は自由。
- 各回の操作で現れる生成多様体の最大次元は $n - j_0$ 。

Theorem 6 (K (2017)). 前定理で

n は 3 以上の偶数 (奇数) で $j_0 + 3$ 以下

$$\chi(W_{f'}) - \chi(W_f) < 0 \quad (\text{resp. } \chi(W_{f'}) - \chi(W_f) > 0)$$

$l : \frac{|\chi(W_{f'}) - \chi(W_f)|}{2}$ 以上の最小の整数

とする。このとき G_n の階数 $r \geq l$ 。

Theorem 7 (K (2017)). 前定理で

n は 6 以下の奇数 (偶数)

$$\chi(W_{f'}) - \chi(W_f) < -1 \text{ で奇数 (resp. } \chi(W_{f'}) - \chi(W_f) > 1 \text{ で奇数)}$$

このとき G_n の階数 $r \geq 2$ 。

今後の問題いくつか

- 基本的操作を繰り返してどれだけ写像や多様体を得られるか？
 - 写像を構成し多様体を得ること、結果として多様体を得写像で表現することは重要な課題。
 - 今回：基本的な操作を一つ考え有限回で写像や多様体にどんな位相的变化が起こるか例えばホモロジー群レベルを具体的に整理。
 - 進んだ課題：オイラー数やホモロジー群より精緻な情報(コホモロジー環、特性類、ホモトピー…)の扱い。
- ⇒ 適当な条件下の一般次元多様体の(微分)位相幾何学等へ。
- 高次元多様体の可視化による表現
 - 今回の研究で高次元多様体の写像による表現に成功したが、値域の次元が高すぎると見えない。
 - ⇒ 最近の数学の応用や産学連携ブームで、一連の可微分写像の理論のデータ可視化等への応用が佐伯氏らにより試みられているが、その中でも重要。
- ⇒ 値域 2-3 次元で満足のいく成果が得られるか？

ありがとうございました！