Extending homeomorphisms of the genus-2 surface over S^3

船吉 健太

広島大学

2017 年 12 月 24 日

定義

Σ_g: 種数 g の向き付け可能な閉曲面.

$f : \Sigma_g \to \Sigma_g$: 同相写像.

定義

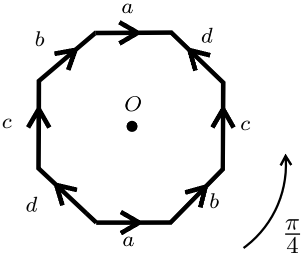
f は零同境である.
:$\Leftrightarrow$ $\exists\ M$: コンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体 s.t. $\partial M = \Sigma_g$,
$\exists\ \hat{f}$: $M \to M$: 同相写像.
s.t. $\hat{f}|_{\partial M} = f$.

定義

f は S^3 に拡張可能である.
:$\Leftrightarrow$ $\exists\ \iota : \Sigma_g \hookrightarrow S^3$: 埋め込み,
$\exists\ \hat{f} : (S^3, \iota(\Sigma_g)) \to (S^3, \iota(\Sigma_g))$: 同相写像,
s.t. $\hat{f} \circ \iota = \iota \circ f$.

例

- Σ_2 を図のように考える. O に関して Σ_2 を $\frac{\pi}{4}$ 回転させる写像は零同境でない.



定理 (Bonahon 1983, McCullough-Miller-Zimmermann 1989)

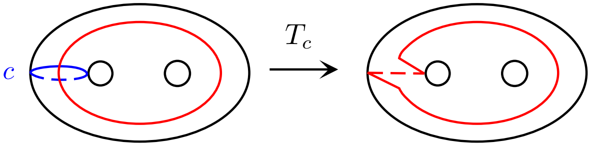
$g \geq 2$ に対し, 零同境有限位数写像 $f\colon \Sigma_g \to \Sigma_g$ の位数の最大値 n は

$$n = \begin{cases} 2g+2 & (g\colon \text{even}); \\ 2g & (g\colon \text{odd}) \end{cases}$$

となる.

例

- Σ_2 上の non-separating curve に関する Dehn ツイストは零同境であるが, S^3 に拡張可能ではない.

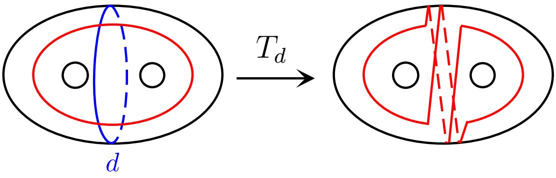


定理 (McCullough 2006)

M: コンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体.
c : ∂M 上の simple closed curve.
∂M 上で c に関する Dehn twist が存在するとき, c を境界にもつ M 内のディスクが存在する.

例

- Σ_2 上の separating curve に関する Dehn ツイストは零同境であり, S^3 にも拡張可能である.



先行研究

1. 零同境である同相写像について:

定理 (Bonahon 1983)

(1) $f : \Sigma_g \to \Sigma_g$: 向きを保つ有限位数の同相写像.
f が零同境ならば, f はハンドル体の有限位数の同相写像に拡張可能である.

(2) f: $\Sigma_2 \to \Sigma_2$: irreducible な同相写像.
f が零同境ならば, f はハンドル体の同相写像へと拡張可能である.

2. S^3 に拡張可能である同相写像について:
Bai, Guo, Robins, C. Wang, S. Wang, Zhang, Zimmermann らによる S^3 に "拡張可能" である有限部分群 $G < \mathrm{Homeo}(\Sigma_g)$ の分類に関する一連の仕事.
"多く" の場合は Heegaard surface を使って拡張している.

主定理

定義

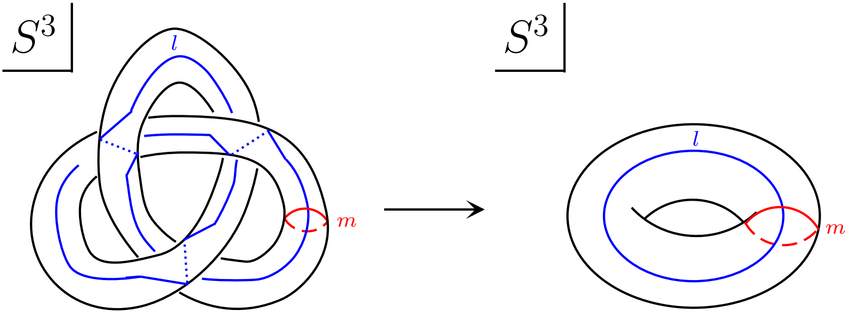
f は S^3 に **standard** に拡張可能である.
$:\Leftrightarrow \exists\, \iota\colon \Sigma_g \hookrightarrow S^3$: 埋め込み,
$\exists\, \hat{f}\colon (S^3, \iota(\Sigma_g)) \to (S^3, \iota(\Sigma_g))$: 同相写像,
s.t. $\begin{cases} \hat{f} \circ \iota = \iota \circ f; \\ \iota(\Sigma_g) \subset S^3 \text{ は Heegaard surface.} \end{cases}$

$$\{\text{ 零同境な同相写像 }\} \supsetneq \{S^3 \text{ に拡張可能な同相写像 }\} \supset \{S^3 \text{ に standard に拡張可能な同相写像 }\}$$

主定理

$f : \Sigma_2 \to \Sigma_2$: 同相写像.
f は S^3 に拡張可能である $\Leftrightarrow$ f は S^3 に standard に拡張可能である.

種数 1 の場合



証明の概要 (設定)

$\Sigma := \Sigma_2$, $f : \Sigma \to \Sigma$: 同相写像.

仮定 f は S^3 に拡張可能, i.e.

$\exists$ 埋め込み ι_0: $\Sigma \hookrightarrow S^3$, $\exists$ 同相写像 $\hat{f}_0$: $(S^3, \iota_0(\Sigma)) \to (S^3, \iota_0(\Sigma))$
s.t. $\hat{f}_0 \circ \iota_0 = \iota_0 \circ f$.

$S^3 = M_1 \cup_{\iota_0(\Sigma)} M_2$ とする.

証明の概要 (主張 1)

$$S^3 = M_1 \cup_{\iota_0(\Sigma)} M_2.$$

主張 1

以下のいずれかが成り立つ.

(1) f は S^3 に standard に拡張可能である, or

(2) $\exists\ \iota_1\colon \Sigma \hookrightarrow S^3$: 埋め込み,

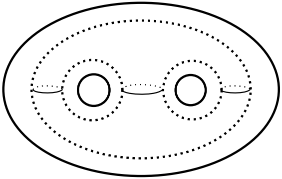
$\exists\ \hat{f}_1\colon (S^3, \iota_1(\Sigma)) \to (S^3, \iota_1(\Sigma))$: 同相写像

$$\text{s.t.} \begin{cases} \hat{f}_1 \circ \iota_1 = \iota_1 \circ f; \\ S^3 = V \cup_{\iota_1(\Sigma)} M; \\ V\colon \text{種数 2 のハンドル体}; \\ M\colon \partial\text{-irreducible.} \end{cases}$$

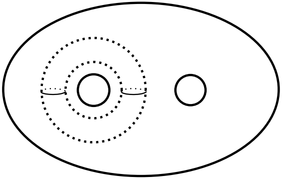
証明の概要 (主張 1: characteristic compression body)

$S^3 = M_1 \cup_{\iota_0(\Sigma)} M_2$.
M_i の characteristic compression body は以下の 4 つに分類される.

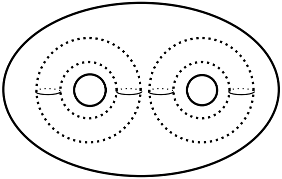
Type 1 (i.e. M_i は ∂-irreducible)



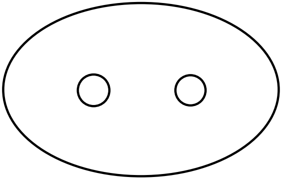
Type 2



Type 3



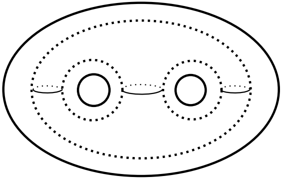
Type 4 (i.e. M_i はハンドル体)



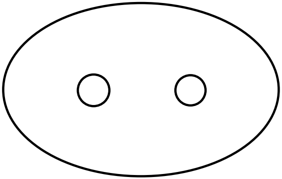
証明の概要 (主張 1: characteristic compression body)

$S^3 = M_1 \cup_{\iota_0(\Sigma)} M_2$.
M_i の characteristic compression body は以下の 4 つに分類される.

Type 1 (i.e. M_i は ∂-irreducible)



Type 4 (i.e. M_i はハンドル体)



証明の概要 (主張 2)

主張 2

以下のいずれかが成り立つ.

(1) f は S^3 に standard に拡張可能である, or

(2) $\exists\ \iota_2\colon \Sigma \hookrightarrow S^3$: 埋め込み,

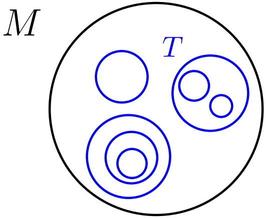
$\exists\ \hat{f}_2\colon (S^3, \iota_2(\Sigma)) \to (S^3, \iota_2(\Sigma))$: 同相写像

$$\text{s.t.} \begin{cases} \hat{f}_2 \circ \iota_2 = \iota_2 \circ f; \\ S^3 = V \cup_{\iota_2(\Sigma)} M; \\ V\colon \text{種数 2 のハンドル体}; \\ M\colon \partial\text{-irreducible, atoroidal}. \end{cases}$$

証明の概要 (主張 2: トーラス分解定理)

$S^3 = V \cup_{\iota_1(\Sigma)} M$.

M が atroidal でない場合, トーラス分解定理 (Jaco-Shalen 1979, Johannson 1979) より, ある essential torus の有限族 T が得られる.



この T を “取り除く” ように Σ を埋めなおすことができる.

よって主張 2 は成立する.

証明の概要 (主張 3)

現在の状況

$f:\Sigma \to \Sigma$: 同相写像.

$\exists\ \iota_2$: $\Sigma \hookrightarrow S^3$: 埋め込み, $\exists\ \hat{f}_2$: $(S^3, \iota_2(\Sigma)) \to (S^3, \iota_2(\Sigma))$: 同相写像

$$\text{s.t.} \begin{cases} \hat{f}_2 \circ \iota_2 = \iota_2 \circ f; \\ S^3 = V \cup_{\iota_2(\Sigma)} M; \\ V\text{: 種数 2 のハンドル体;} \\ M\text{: } \partial\text{-irreducible, atroidal.} \end{cases}$$

主張 3

f は S^3 に standard に拡張可能, または有限位数である.

証明の概要 (主張 3)

$S^3 = V \cup_{\iota_2(\Sigma)} M$.

以下のように場合分けして考える.
Case 1: M が essential annulus を含まないとき.
Case 2: M が essential annulus を含むとき.

<u>Case 1</u>: M が essential annulus を含まないとき.
M は essential annulus も essential torus も含まない.
$\rightsquigarrow$ M は hyperbolic structure with totally geodesic boundary を許容する.
$\rightsquigarrow$ $\hat{f}|_M$: 有限位数.
$\rightsquigarrow$ f: 有限位数.

証明の概要 (主張 3: W-system)

$S^3 = V \cup_{\iota_2(\Sigma)} M.$

Case 2: M が essential annulus を含むとき

定義 (Neumann-Swarup 1997)

M: ∂-irreducible な Haken 多様体.
S: M に埋め込まれた essential annulus または essential torus.
(1) S が M 内で **canonical である.**
:$\Leftrightarrow$ M 内に埋め込まれた任意の essential annulus または essential torus をイソトピーによって動かすことで, S と disjoint にできる.
(2) M 内のそれぞれ互いに共通部分を持たず，かつ平行でもない canonical 曲面の族のうち最大なものを **W-system** と呼ぶ.

注意 (Neumann-Swarup 1997)

W-system は有限集合かつ M のイソトピーを法として一意的に定まる.

証明の概要 (主張 3)

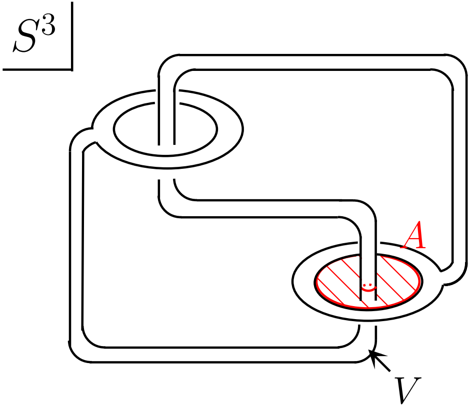
$S^3 = V \cup_{\iota_2(\Sigma)} M.$

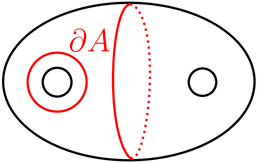
M に対して non-empty W-system が存在することは確認済み.
M の W-system は essential annulus のみからなり，しかも $\hat{f}_2$ によって保たれる.
種数 2 のハンドル体の S^3 における外部空間内の essntial annulus については Koda-Ozawa (2015) によって分類されている.
その分類に基づいて f が S^3 に standard に拡張可能であること, または有限位数であることが示される.

例

$S^3 = V \cup_{\iota_2(\Sigma)} M$, $\hat{f}_2$: $(S^3, \iota_2(\Sigma)) \to (S^3, \iota_2(\Sigma))$: 同相写像.

例: Type 2-2 annulus が M の W-system に含まれている場合

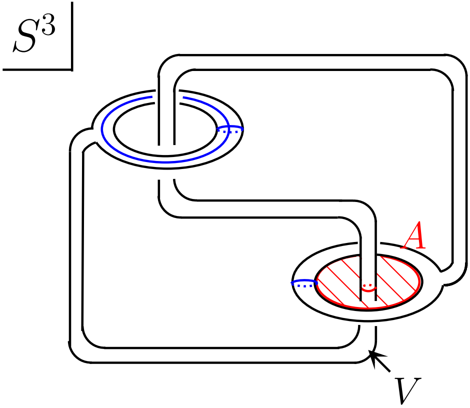


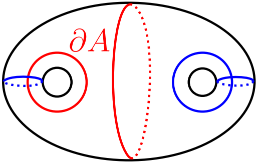


例

$S^3 = V \cup_{\iota_2(\Sigma)} M$, $\hat{f}_2$: $(S^3, \iota_2(\Sigma)) \to (S^3, \iota_2(\Sigma))$: 同相写像.

例: Type 2-2 annulus が M の W-system に含まれている場合





証明の概要 (有限位数の場合)

主張 4

f が有限位数のとき S^3 に standard に拡張可能である.

種数 2 の閉曲面上の有限位数の同相写像のうち S^3 に拡張可能なものは Guo-Wang-Wang-Zhang (2015) により 13 パターンに分類されている.
その全てのパターンで f が S^3 に standard に拡張可能であることがわかる.

ありがとうございました。