Certain right-angled Artin groups in mapping class groups

片山 拓弥　(広島大学)[*1]
久野 恵理香　(埼玉大学)[*2]

1. Right-angled Artin群と曲面の写像類群

本稿では，グラフと言えば単純グラフを指すものとする．Γ を有限グラフとし，$V(\Gamma) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を Γ の頂点集合，$E(\Gamma)$ を辺集合とする．このとき，Γ 上の **right-angled Artin 群**とは，次の群表示により与えられる群のことである:

$$A(\Gamma) = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \mid v_i v_j v_i^{-1} v_j^{-1} = 1 \text{ if } \{v_i, v_j\} \in E(\Gamma) \rangle.$$

$S_{g,p}$ を連結かつ向き付け可能であって種数 g, p 個穴あき (マークポイント付き) 曲面とする．曲面 $S_{g,p}$ の自己同相写像のアイソトピー類全体がなす群を $S_{g,p}$ の**写像類群**といい，$\mathrm{Mod}(S_{g,p})$ と記す．ここで自己同相写像は穴を集合として保つものとする．曲面 $S_{g,p}$ の**曲線グラフ** $\mathcal{C}(S_{g,p})$ とは，頂点集合を $S_{g,p}$ 上の本質的単純閉曲線のアイソトピー類全体と決め，2つの異なる頂点が辺を張るのは交わらないような代表をもつときかつそのときに限る，と定めて得られるグラフである．

Right-angled Artin 群と曲面の写像類群を明示的に，そして強固に結びつけた研究として Koberda の埋め込み定理 [6, Theorem 1.1] がある: 有限個の互いにアイソトピックでない本質的単純閉曲線による曲線族を与えたとき，それらに付随する Dehn twist は，十分大きな冪をとれば "期待" される right-angled Artin 群を生成する．ここで，単純閉曲線が**本質的である**とは，円盤を張らず，穴をまわらないときをいう．2つの互いにアイソトピックでない本質的単純閉曲線が交わらないとき，それらに付随する Dehn twist は階数2の自由アーベル群を生成する．この群は2つの元により生成され，それら生成元の交換子が単位元に等しく，それ以外には関係式は持たないという right-angled Artin 群としての表示をもつ．一方，2つの互いにアイソトピックでない本質的単純閉曲線の最小交点数が1以上のとき，十分大きな冪をとれば階数2の自由群を生成する．この群は2つの元により生成され，何も関係式を持たないという right-angled Artin 群としての表示を持っている．従って，飛躍ではあるが，有限個の互いにアイソトピックでない本質的単純閉曲線の曲線族を与えたときも，Dehn twist の十分大きな冪をとってそれらが生成する部分群を考えれば，非交和に実現できる曲線のペアに対応する Dehn twist の冪が可換であり，あとは一切非自明な関係式がないという right-angled Artin 群の群表示を "期待" できる—これが上の Koberda の埋め込み定理で述べた "期待" の意味である．また，Koberda の埋め込み定理は，right-angled Artin 群が曲面の写像類群の部分群として幾何的に自然に現れることも示している．さて，曲面 $S_{g,p}$ に対して，$S_{g,p}$ 上の曲線族からは上の意味では "期待" できない right-angled Artin 群 $A(\Gamma)$ を考えたと

キーワード：Right-angled Artin 群，曲面の写像類群
[*1] 〒739-8526 広島県東広島市鏡山 1-3-1　広島大学大学院理学研究科
e-mail: `tkatayama@hiroshima-u.ac.jp`
[*2] 〒338-8570　埼玉県さいたま市桜区下大久保 255　埼玉大学大学院理工学研究科
e-mail: `kuno.e.aa@m.titech.ac.jp`

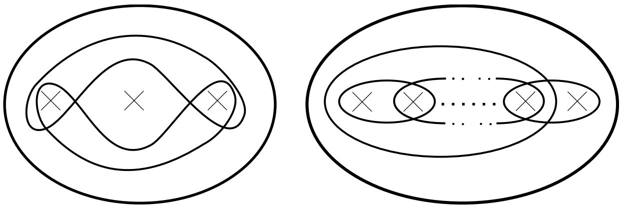

図 1:

き，$A(\Gamma)$ は $\mathrm{Mod}(S_{g,p})$ に埋め込まれるだろうか？という問題が自然に生ずる．この問題は，数学的には次のように述べられる．

問 1.1. Γ を曲線グラフ $\mathcal{C}(S_{g,p})$ のフル部分グラフとしては実現できない有限グラフとする．このとき，$A(\Gamma) \hookrightarrow \mathrm{Mod}(S_{g,p})$ だろうか？

曲面上に曲線族が与えられたとき，各曲線を抽象的な頂点と見て，曲線グラフの定義通りに辺を結びきって得られる部分グラフを**フル**部分グラフという．

問 1.1 については次のような結果が知られている．$S_{g,p}$ が "位相的複雑度 ≥ 4"，すなわち $3g-3+n \geq 4$ という条件を満たすときには答えが YES となるような Γ が存在することを Kim-Koberda [5, Theorem 3] は示している．一方，片山 [4, Corollary 1.6] は Γ が linear forest の補グラフのとき，任意の (g,p) に対して答えは NO であることを示した．現時点では，YES と NO の境界がどこにあるのか我々には分からない．しかし，答えが NO となるような有限グラフ Γ と自然数の組 (g,p) に対しては,「$A(\Gamma)$ から $\mathrm{Mod}(S_{g,p})$ へ埋め込みが存在するか」という代数的問題は,「Γ に対応する曲線族が $S_{g,p}$ 上に存在するか」という位相的問題に還元される．我々の研究では，道グラフの補グラフという特殊なクラスのグラフに対してこの位相的問題を解いた．本稿では，その結果と意義を解説する．

2. 主結果とその意義

主結果は，以下である．

主定理 2.1. $A(P_m^c) \hookrightarrow \mathrm{Mod}(S_{g,p})$ なるための必要十分条件は m が以下の不等式を満たすこと．

$$m \leq \begin{cases} 0 & ((g,p)=(0,0),(0,1),(0,2),(0,3)) \\ 2 & ((g,p)=(0,4),(1,0),(1,1)) \\ p-1 & (g=0,\ p\geq 5) \\ p+2 & (g=1,\ p\geq 2) \\ 2g+p+1 & (g\geq 2) \end{cases}$$

実際，最大の m を実現する曲線族は図 1, 2, 3, 4 によって与えられる．

ここで P_m^c は m 頂点の道グラフの補グラフである，すなわち，m 頂点の完全グラフから部分グラフとして含まれる m 頂点の道グラフの辺を削除して得られるグラフのことである．曲線族を与えれば，Koberda の埋め込み定理によって "期待" される right-angled Artin 群から写像類群に埋め込みを構成することができる，ということは前節で述べたとおりである．図 1 から図 4 までの曲線族は，曲線グラフの中で道グラフの補グラフを誘導することに注意しておこう．

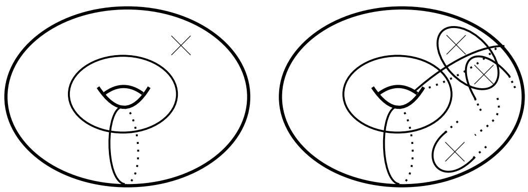

図 2:

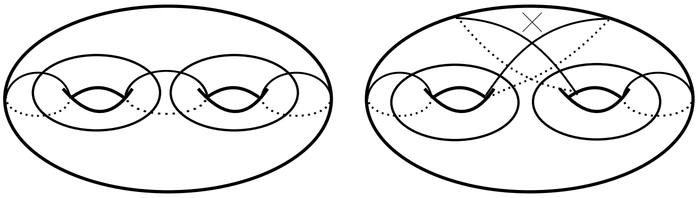

図 3:

問1.1からさらに一歩踏み込んで，主定理のような形の定理を導くことに一体どれぐらいの意義があるのだろうか？本節ではこれについて述べたい．まず，写像類群の間の埋め込みについて次の問がある．

問 2.2 (Farb–Margalit)**.** 写像類群の間の任意の埋め込みは “幾何的” だろうか？

残念ながら未だに “幾何的” の数学的意味が判然としていないようであるが，一つの候補として曲面の操作がある．Aramayona–Souto [1, Theorem 1.1] は種数に条件をつければ，“純” 写像類群の非自明な準同型は曲面の埋め込みから誘導されることを示した．また，曲面の characteristic covering が写像類群の埋め込みを誘導することはよく知られている．これら以外のどのような曲面の操作が写像類群の埋め込みを誘導するのだろうか？そこで，まずはどの写像類群の (順序付き) ペアに埋め込みがないかをはっきりとさせ，曲面の操作の候補を絞っていくことが重要である．Birman–Hilden Theory の結果 [3, Section 9] と主定理 2.1 を合わせると，次を証明できる．

系 2.3. $\mathrm{Mod}(S_{g,0})$ が $\mathrm{Mod}(S_{0,p})$ の指数有限部分群を少なくとも 1 つ含むための必要十分条件は，$p \leq 2g+2$ が成立することである．

この定理では曲面の二重分岐被覆をとって写像類群の埋め込みを構成するため，一般の場合に曲面の操作として分岐被覆が深く関わっていると推察されるが，これについては今後の研究が待たれる．いずれにせよ，$p \geq 2g+3$ のときは，どんな幾何的操作を使っても $\mathrm{Mod}(S_{0,p})$ の指数有限部分群から $\mathrm{Mod}(S_{g,0})$ への埋め込みは構成できないことが分かった．問1.1を研究するために候補を絞るという意味では，right-angled Artin 群の埋め込みを応用することには一定の意義があると思われる．「結び目の数学 X」の

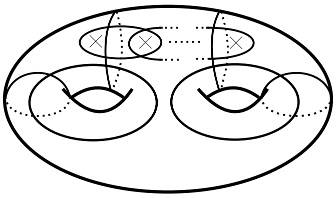

図 4:

講演時にはブレイド群についても話したので，主定理2.1のブレイド群への応用に興味がある方はスライドを参照されたい．

また，Birman–Lubotzky–McCarthy [2, Theorem A] と主定理2.1から次の系を導くこともできる．

系 2.4. g, g' を2以上の整数とする．もし $\mathrm{Mod}(S_{g,p})$ の指数有限部分群のうち少なくとも1つが $\mathrm{Mod}(S_{g',p'})$ に埋め込まれ，$\mathrm{Mod}(S_{g',p'})$ の指数有限部分群のうち少なくとも1つが $\mathrm{Mod}(S_{g,p})$ に埋め込まれるならば，$(g,p)=(g',p')$.

この主張の仮定において，埋め込みの像は指数有限である必要がない．この系や写像類群がco-Hopfianであるという古典的結果から，写像類群の間には強い代数的剛性があることが推察される．

最後に，"位相的複雑度 $(3g-3+p)=3$" のときの写像類群の間の埋め込みに言及して本稿を終える．位相的複雑度が3の曲面は3つあり，$S_{0,6}, S_{1,3}, S_{2,0}$ である．良く知られているように，これらのうち $\mathrm{Mod}(S_{0,6})$ と $\mathrm{Mod}(S_{2,0})$ の部分群のスペクトラムはほぼ同一である．最新の研究で次の結果が得られた．

定理 2.5. C_6^c を長さ6の巡回グラフの補グラフとする．$A(C_6^c)\hookrightarrow \mathrm{Mod}(S_{0,6})$, $A(C_6^c)\hookrightarrow \mathrm{Mod}(S_{2,0})$ であるが，$A(C_6^c)$ は $\mathrm{Mod}(S_{1,3})$ に埋め込まれない．結果として，$\mathrm{Mod}(S_{0,6})$ と $\mathrm{Mod}(S_{2,0})$ のどの指数有限部分群も $\mathrm{Mod}(S_{1,3})$ に埋め込まれない．

この系は，$\mathrm{Mod}(S_{1,3})$ の部分群のスペクトラムは他の2つの群のものと大きく異なりうるということを示唆している．位相的複雑度で写像類群を階層分けしたとき，位相的複雑度が2以下のところでは本質的に1種類ずつしか群がない．初めて本質的に2種類現れるのは，今述べた位相的複雑度3の階である．この階をもっと詳しく調べることで，より高い階に現れる違いを嗅ぎ取ることができないだろうか．

3. 謝辞

研究集会「結び目の数学 X」のお世話をしてくださり，また著者に講演の機会をくださった大山淑之先生，新國亮先生に厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] J. Aramayona and J. Souto, *Homomorphisms between mapping class groups*, Geom. Topol. **16** (2012), no. 4, 2285–2341.

[2] J. S. Birman, A. Lubotzky, and J. McCarthy, *Abelian and solvable subgroups of the mapping class groups*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 4, 1107–1120.

[3] B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, Princeton Mathematical Series, **49**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.

[4] T. Katayama, *Right-angled Artin groups and full sub graphs of graphs*, J. Knot Theory Ramifications **26** (2017), no. 10, 1750059, 22pp.

[5] S. Kim and T. Koberda, *Right-angled Artin groups and finite subgraphs of curve graphs*, Osaka J. Math. 53 (2016), no. 3, 705–716.

[6] T. Koberda, *Right-angled Artin groups and a generalized isomorphism problem for finitely generated subgroups of mapping class groups*, Geom. Funct. Anal. **22** (2012), 1541–1590.