3 次元多様体の face-pairing 表示と Turaev-Viro 不変量

永野　雄大

Turaev-Viro 不変量は 3 次元多様体の位相不変量であり, 1992 年に V.G.Turaev と O.Y.Viro による論文 [3] によって見出された. Turaev-Viro 不変量は通常, 単体分割と量子群 $\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ を用いて定義・計算されるが, J.Roberts による結果 [1] によれば線形スケインという手法を用いてハンドル分解から Turaev-Viro 不変量を与えることができる.

一方 Face-pairing 表示とは一つの多面体から, その面どうしの貼り合わせによって 3 次元多様体を表示することであり, これまで様々な観点から研究されてきた. 著者は Face-pairing 表示の一つの定式化の下で, 線形スケイン理論と [1] を用いて, 与えられた Face-pairing 表示に基づく Turaev-Viro 不変量の計算方法を導出したので, その概要について報告する.

本稿を通して r は 3 以上の整数とし, $A = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{4r}\sqrt{-1}}$ とする.

定義 1 (線形スケイン空間)**.** $\mathbb{R}^2$ 上の線形スケイン空間とは, $\mathbb{R}^2$ 上の有向枠付き絡み目図式の, イソトピー類によって張られる $\mathbb{C}$ 上の線形空間を, 以下のスケイン関係式で割って得られる商線形空間のことであり, これを $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ で表す.

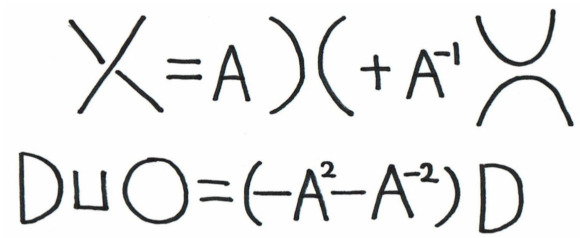

図 1　スケイン関係式

スケイン関係式の元で枠付き Reidemeister 移動は線形スケイン空間の元を変えない. またスケイン関係式は絡み目の解消操作を与えるので, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\emptyset\}$ が成り立つ. このとき空図式 $\emptyset$ の係数を対応させる線形写像

$$\langle\cdot\rangle : \mathcal{S}(S^3) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\emptyset\} \to \mathbb{C}$$

を Kauffman bracket という. さらに $\Delta_n = (-1)^n \dfrac{A^{2(n+1)} - A^{-2(n+1)}}{A^2 - A^{-2}}$ とする. Δ_n を用いた再帰式によって非負整数 n 各々に対して Jones-Wenzl べき等元と呼ばれる, 特別な線形スケイン空間の元が取れる. (線形スケイン理論の詳細については [2] が詳しい.)

定義 2 (r-許容的)**.** 3 つの整数の組 (i,j,k) が r-許容的であるとは, 以下の 3 条件を満たすことである.

- $0 \leq i,j,k \leq r-2$
- $i \leq j+k\ ,\ j \leq k+i\ ,\ k \leq i+j$
- $i+j+k$ は偶数であり, かつ $2(r-2)$ 以下である.

M を有向閉 3 次元多様体, $\mathcal{T}$ をその単体分割とする. $\mathcal{T}$ の頂点集合を V, 辺集合を E, 面集合を F, 四面体集合を T とおく. E から $\{0,1,\cdots,r-2\}$ への写像 λ を $\mathcal{T}$ の辺彩色といい, λ が r-許容的であるとは各面をなす 3 辺の色 (すなわち像) が r-許容的となることをいう. このとき

$$\mathrm{Adm}_r(\mathcal{T}) := \{\ r\text{-許容的な } \mathcal{T} \text{ の辺彩色全体}\ \}$$

と書き, 各面 $f \in F$ に対して θ-ネット $\theta(f;\lambda)$, 各四面体 $t \in T$ に対して四面体ネット $\tau(t;\lambda)$ と呼ばれる特別なスカラーを, Jones-Wenzl べき等元と Kauffman bracket を用いて対応させることができる. 四面体 $t \in T$ の 4 つの面を $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4 \in F$ とすると, t の重みを

$$\mathrm{W}(t;\lambda) := \frac{\tau(t;\lambda)}{\sqrt{\theta(f_1;\lambda)}\sqrt{\theta(f_2;\lambda)}\sqrt{\theta(f_3;\lambda)}\sqrt{\theta(f_4;\lambda)}}$$

で定める.

定理 3 (Turaev-Viro 不変量 [3])**.** $\mu = \sqrt{\dfrac{2}{r}}\sin\dfrac{\pi}{r}$ とする. 閉 3 次元多様体の Turaev-Viro 不変量 TV_r とは次のようなものである. これは単体分割の取り方によらず定める位相不変量である.

$$\mathrm{TV}_r(M) = \mu^{2|V|} \sum_{\lambda \in \mathrm{Adm}_r(\mathcal{T})} \prod_{e \in E} \Delta_{\lambda(e)} \prod_{t \in T} \mathrm{W}(t;\lambda)$$

次に閉球体上に組み合わせ的多面体としての構造を与えるグラフと, その面どうしの貼り合わせ方を定める同相写像の族によって, 有向閉 3 次元多様体の Face-pairing 表示を定式化する. $B^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 |\ |x| \leq 1\}$, $S^2 = \partial B^3$ は向きを固定して考える.

定義 4 (separating graph)**.** S^2 に埋め込まれたグラフ G で, S^2 を偶数個の円板に分割するようなものを separating graph という;

$$S^2 \text{上の偶数個の閉円板の集合 } F \text{ で, } S^2 \setminus G = \bigsqcup_{D \in F} \mathrm{int}(D) \text{ を満たすものが存在する.}$$

以降 separating graph を $G = (V,E)$ として, G によって分割される円板の個数を $2n$, その集合を F とする. 各円板には S^2 から定まる向きをつけておく.

定義 5 (pairing)**.** $F = \{f_1, f_2 \cdots, f_n\} \sqcup \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ として, 各 i に対して向きを逆にする同相写像 $\varphi_i : f_i \to g_i$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ をとる. $p = \{\varphi_i\}_{i=1,2,\cdots,n}$ が次の 2 条件を i), ii) を満たすとき, p を G の pairing という.

i) $\varphi_i|_{\partial f_i} : \partial f_i \to \partial g_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ はグラフとしての同型を導く.

任意の辺 $e \in E$ に対して, e で隣接する面は 2 つあるが, これを f_e, g_e $(\in F)$ と書くことにする. ただしこのとき写像 $\psi \in p$ または $\psi^{-1} \in p$ が存在し, $\psi : f_e \to g_{\psi(e)}$ となるように名付けておく. そうすれば有限列

$$f_e \xrightarrow{\psi_1} g_{\psi_1(e)},\ f_{\psi_1(e)} \xrightarrow{\psi_2} g_{\psi_2\circ\psi_1(e)}, \cdots, f_{\psi_{k-1}\circ\cdots\circ\psi_2\circ\psi_1(e)} \xrightarrow{\psi_k} g_{\psi_k\circ\cdots\circ\psi_2\circ\psi_1(e)} = g_e$$

として, $\psi_1(e) \neq e, \cdots, \psi_{k-1} \circ \cdots \circ \psi_2 \circ \psi_1(e) \neq e, \psi_k \circ \cdots \circ \psi_2 \circ \psi_1(e) = e$ を満たすものが取れるが, このような有限列に対して次が成り立つ.

ii) $\psi_k|_{\psi_{k-1}\circ\cdots\circ\psi_2\circ\psi_1(e)} \circ \cdots \circ \psi_2|_{\psi_1(e)} \circ \psi_1|_e = \mathrm{id}_e$

ii) は面の貼り合わせを考えるとき, それを辺上に制限しても貼り合わせが適切に定まっていることを要請している. B^3 上の同値関係 $\overset{p}{\sim}$ は p による面の貼り合わせの関係とする;

$$x, y \in B^3, x \overset{p}{\sim} y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x = y \\ \varphi_i(x) = y \text{ または } x = \varphi_i(y) \text{ を満たす } i \in \{1, 2, \cdots, n\} \text{ が存在する.} \end{cases}$$

定義 6 (face-pairing 表示)**.** separating graph G とその pairing p の組 (G, p) が, 有向閉 3 次元多様体 M の face-pairing 表示であるとは, 商空間 $B^3/_{\overset{p}{\sim}}$ が M に向きを保って同相となることである.

G を p で割って得られるグラフを $G_p = (V_p, E_p)$ と書く. また本質的に同等な face-pairing 表示は次の同型という概念の下, 同一視できる.

定義 7 (face-pairing 表示の同型)**.** 有向閉 3 次元多様体 M, N それぞれについて face-pairing 表示 $(G, p), (H, q)$ をとる. B^3 上の向きを保つ自己同相写像 Φ が次の 2 条件を満たすとき (G, p) から (H, q) への同型という.

i) $\Phi|_G : G \to H$ はグラフとしての同型を導く.
ii) 任意の $x, y \in B^3$ に対して, $x \overset{p}{\sim} y \Leftrightarrow \Phi(x) \overset{q}{\sim} \Phi(y)$.

これは p で貼り合わせてから Φ で移すことと, Φ で移してから q で貼り合わせることが同等であるということを意味する. このとき Φ は $M = B^3/_{\overset{p}{\sim}}$ から $N = B^3/_{\overset{q}{\sim}}$ への向きを保つ同相写像を導く.
さて G が分割する各面が三角形のとき (すなわち F の元がすべて三角形のとき) G は triangular であるという. G が triangular ならその双対グラフ G^* は trivalent graph である. 一般に face-pairing 表示 (G, p) は, 分割する各面を (pairing p による各ペアが張り合わせによって一致する仕方で) 三角形分割すれば, G をいつでも triangular なものに取り直すことができる. また (G, p) の辺彩色 $\lambda : E \to \{0, 1, \cdots, r-2\}$ とは,

$$\text{任意の } e, e' \in E \text{ に対して}, e \overset{p}{\sim} e' \Rightarrow \lambda(e) = \lambda(e')$$

を満たすものである．さらに G が triangular なとき辺彩色 λ が r-許容的であるとは, 各面をなす 3 辺の色が r-許容的であることをいう．このとき

$$\mathrm{Adm}_r(G,p) := \{\ r\text{-許容的な } (G,p) \text{ の辺彩色全体}\ \}$$

と書き, G が分割する各面 (のペアの内の一方) $f_i \in F$ と G 全体に対してそれぞれ θ-ネット $\theta(f;\lambda)$ とスカラー $\langle G^*;\lambda\rangle$ を対応させることができる．G の重みを $\mathrm{W}(G;\lambda) := \dfrac{\langle G^*;\lambda\rangle}{\prod_{i=1}^n \theta(f_i;\lambda)}$ と定める．また辺 $e \in E$ の p による同値類を $\hat{e} \in E_p$ で表す．次の定理が本稿の主定理である．

定理 8 (Turaev-Viro 不変量の計算公式)**.** 有向閉 3 次元多様体 M の face-pairing 表示 (G,p) が triangular なとき, 次式が成り立つ．

$$\mathrm{TV}_r(M) = \mu^{2|V_p|} \sum_{\lambda \in \mathrm{Adm}_r(G,p)} \left(\prod_{\hat{e} \in E_p} \Delta_{\lambda(e)} \right) \mathrm{W}(G;\lambda)$$

Poincaré ホモロジー球面の face-pairing 表示が, 正十二面体の各対面どうしを $\frac{\pi}{5}$ だけねじって貼り合わせることで得られるように, face-pairing 表示はある種の対称性を持つことがある．この対称性をとらえるために変換群という概念を導入する．

定義 9 (face-pairing 表示の変換群)**.** 有向閉 3 次元多様体 M の face-pairing 表示 (G,p) に対して $\mathrm{Aut}(G,p)$ を (G,p) の自己同型全体がなす群とする．
また R_G を (G,p) の自己同型のうち, それが導くグラフ G の自己同型が恒等写像に一致するもの全体がなす群とする．そうすれば $R_G \lhd \mathrm{Aut}(G,p)$ である．

$$\mathrm{Aut}(G,p)/R_G$$

を (G,p) の変換群という．

$\Phi, \Psi \in \mathrm{Aut}(G,p)$ が $\Phi\Psi^{-1} \in R_G$ を満たすことと, Φ と Ψ が導くグラフ G の自己同型が一致する, ということは同値である．従って変換群の各元に対してそれぞれグラフの同型が一つ定まり, この対応は単射である．このことから変換群は有限群である．さらに同型な face-pairing 表示は同型な変換群を持つこともすぐ分かる．
triangular face-pairing 表示 (G,p) の変換群を $\mathcal{K}$ とする．$\sigma \in \mathcal{K}, \lambda \in \mathrm{Adm}_r(G,p)$ に対して, $\sigma \cdot \lambda \in \mathrm{Adm}_r(G,p)$ を $e \in E \Rightarrow \sigma \cdot \lambda(e) = \lambda(\sigma^{-1}(e))$ と定義すれば, $\mathcal{K}$ は $\mathrm{Adm}_r(G,p)$ に作用する．このとき $\lambda \in \mathrm{Adm}_r(G,p)$ の $\mathcal{K}$-軌道を $\tilde{\lambda}$, 固定部分群を $\mathcal{K}_\lambda$ と書く．

定理 10. 有向閉 3 次元多様体 M の triangular face-pairing 表示 (G,p) に対して、その変換群を $\mathcal{K}$ とする．このとき次の等式が成り立つ．

$$\mathrm{TV}_r(M) = \mu^{2|V_p|} \sum_{\tilde{\lambda} \in \mathcal{K} \backslash \mathrm{Adm}_r(G,p)} [\mathcal{K} : \mathcal{K}_\lambda] \left(\prod_{\hat{e} \in E_p} \Delta_{\lambda(e)} \right) \mathrm{W}(G;\lambda)$$

参考文献

[1] J.Roberts. Skein theory and turaev-viro invariants. *Topology*, Vol. 34, No. 4, pp. 771–787, 1995.

[2] L.H.Kauffman and S.L.Lins. *Temperley-Lieb recoupling theory and invariants of 3-manifolds*. No. 134. Princeton University Press, 1994.

[3] V.G.Turaev and O.Y.Viro. State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols. *Topology*, Vol. 31, No. 4, pp. 865–902, 1992.