

# $E_8$ 部分因子環の平面代数に由来する, 3次元多様体の状態和不変量について

岡崎 建太

## 概要

本稿では, 平面代数および3次元多様体の状態和不変量について復習したのち,  $E_8$  部分因子環から定まる状態和不変量を, 平面代数を用いて組み合わせ的に再構成する方法について紹介する. 更に  $6j$  記号の値を計算し, レンズ空間の状態和不変量の値に対して計算例を与える.

## 1 導入

状態和不変量 (state sum invariant) とは, 3次元多様体の単体分割上の状態和によって定義される3次元多様体の位相不変量である. Turaev と Viro は状態和不変量を量子群から得られる  $6j$  記号を用いて定義した [9]. Ocneanu はこの構成を, 部分因子環 (subfactor) から得られる  $6j$  記号を用いたものに一般化した [8]. しかし, 個別の部分因子環が与えられたときに, 対応する状態和不変量を具体的に調べることは困難である. 例えば  $E_8$  部分因子環から得られる状態和不変量については, 非自明な計算例はもとより,  $6j$  記号の値も知られていなかった. 一方で, (ある特定のクラスの) 部分因子環を組み合わせ的に取り扱える道具として平面代数 (planar algebra) がある [3]. 具体的には, 「hyperfinite な  $II_1$  型の因子環からなる, 深さ有限, 指数有限な部分因子環全体」の集合と, 「深さ有限で, 部分因子環的な平面代数 (subfactor planar algebra) の全体」の集合の間には1対1写像が存在することが知られている ([3, 2, 4] などを見よ).

本稿では,  $E_8$  部分因子環から定まる状態和不変量を, 平面代数を用いて (部分因子環の知識を用いずに) 組み合わせ的に再構成する. この平面代数から出発して, 様々な関係式を示すことで, 状態和不変量の位相不変性を再証明することができる. 更に  $6j$  記号の値を計算し, レンズ空間の状態和不変量の値に対して数値的に計算を行う.

本稿の構成は以下の通りである. まず第2節で一般の平面代数の定義およびその諸性質を復習し, 平面代数の具体例をいくつか与える. そして第3節で  $E_8$  状態和不変量 ( $E_8$  部分因子環から得られる状態和不変量) を平面代数を用いて組み合わせ的に構成し, 第4節で  $6j$ -記号の一覧を与え, 一部のレンズ空間に対して  $E_8$  状態和不変量の数値的な計算を行う.

## 2 平面代数とその諸性質

本節では一般の平面代数の定義, およびその諸性質について復習する. 平面代数が部分因子環的になるための条件は, 3次元多様体の状態和不変量の不変性のために必要なものである. より詳しくは, [3, 4, 6]などを参照されたい.

## 2.1 平面代数

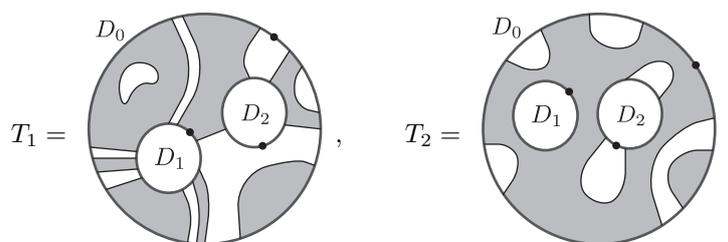
定義 2.1 (平面タングル). 平面タングル は以下のデータで構成される.

- 平面  $\mathbb{R}^2$  内の外部円盤  $D_0$ .
- $D_0$  内のいくつかの (0 個でもよい) 非交和な内部円盤  $D_1, \dots, D_n$ .
- 外部円盤の境界  $\partial D_0$  内の  $2k_0$  個の 固定された点, および各内部円盤の境界  $\partial D_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 内のいくつかの (0 個でもよい) 固定された点.
- $D_0 \setminus \cup_i D_i$  内のいくつかの (0 個でもよい) 閉じた曲線と開いた曲線. ただし開いた曲線の端点の集合は固定された点の集合と一致するものとする.
- $D_0 \setminus \cup_i D_i \setminus \{ \text{閉じた曲線と開いた曲線} \}$  の連結成分に黒か白の shading を与える. ただし各曲線を跨いだとき, shading は常に変化するものとする.
- 各々の円盤  $D_i$  について,  $D_i \setminus \{ \text{固定された点} \}$  の連結成分の中から 1 つ選んで  $\bullet$  で印を付け,  $\bullet$ -辺と呼ぶ.

2 つの  $E_8$  planar tangle が  $\mathbb{R}^2$  の向きを保つ微分同相によって互いに写り合い, しかも内部円盤の番号, shading,  $\bullet$ -辺がその微分同相を通じて合致するとき, 両者を同じものとみなす.

$\text{Col} = \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \{+, -\}$  とおく. 平面タングル  $T$  が与えられたとき, 各円盤  $D$  の color  $(k, \varepsilon) \in \text{Col}$  を,  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  は  $\partial D$  上の固定された点の数の半分,  $\varepsilon \in \{+, -\}$  は  $D$  の  $\bullet$ -辺に接する領域の shading が白のときに  $+$ , 黒のときに  $-$ , で定め,  $\text{col}(D) = (k, \varepsilon)$  と書く. また, 平面タングルの color を, その外部円盤の color として定める. color  $(k, \varepsilon)$  を持つ平面タングルのことを, 短く  $(k, \varepsilon)$ -タングルと呼ぶことがある.

例 2.2. 次の  $T_1, T_2$  はそれぞれ  $(8, +)$ -タングル,  $(5, -)$ -タングルである.



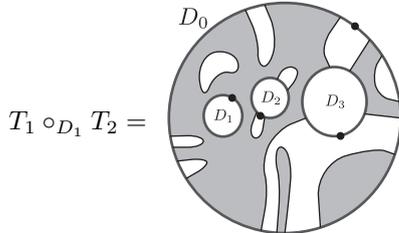
平面タングル  $T$  で  $\text{col}(D_i) = (k_i, \varepsilon_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) であるような外部円盤  $D_0$  と内部円盤  $D_1, \dots, D_n$  を持つものを,  $T = T_{(k_1, \varepsilon_1), \dots, (k_n, \varepsilon_n)}^{(k_0, \varepsilon_0)}$  と表すことがある. 以下では表記の簡便のため, 平面タングルの外部円盤を長方形で描くことがある. また外部円盤を描くのを省略することもあるが, その際は外部円盤の  $\bullet$ -辺は必ず左上にあるものと約束する.

定義 2.3.  $n$  個の内部円盤を持つ平面タングル  $T$  と  $n$  次対称群の元  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して,  $T$  の番号の付け替え  $\sigma(T)$  を,  $T$  の各内部円盤  $D_i$  を  $D_{\sigma(i)}$  に置き換えた平面タングルとして定義する.

定義 2.4. 2 つの平面タングル  $T, \tilde{T}$  について,  $T$  の  $i$  番目の内部円盤  $D_i$  の color と  $\tilde{T}$  の外部円盤の color が一致するとき,  $T$  と  $\tilde{T}$  の  $D_i$  における合成  $T \circ_{D_i} \tilde{T}$  を,  $T$  における  $D_i$  に  $\tilde{T}$  を  $\bullet$ -辺が合致するように「はめ込んで」できる planar tangle と定める. ただし,  $T$  の内部円盤を  $D_1, \dots, D_n$ ,  $\tilde{T}$  の内部円盤を  $\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_{\tilde{n}}$

とすると、 $T \circ_{D_i} \tilde{T}$  の内部円盤は  $D_1, \dots, D_{i-1}, \tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_{\tilde{n}}, D_{i+1}, \dots, D_n$  を  $D_1, \dots, D_{n+\tilde{n}-1}$  に置き換えたものとする。

例 2.5.  $T_1, T_2$  を例 2.2 の平面タングルとすると、



となる。

以下ではベクトル空間は複素数体  $\mathbb{C}$  上のものであるとする。

定義 2.6. 平面代数は次のデータから構成される。

- ベクトル空間の族  $P = \{P_{(k,\varepsilon)}\}_{(k,\varepsilon) \in \text{Col}}$ .
- 平面タングル  $T = T_{(k_1,\varepsilon_1), \dots, (k_n,\varepsilon_n)}^{(k_0,\varepsilon_0)}$  に対して線形写像

$$Z_T = Z_T^P : P_{(k_1,\varepsilon_1)} \otimes \cdots \otimes P_{(k_n,\varepsilon_n)} \longrightarrow P_{(k_0,\varepsilon_0)}$$

を与える対応  $T \mapsto Z_T$ .

これらは次の公理を満たす。

- 番号の付け替えに関する整合性: 平面タングル  $T = T_{(k_1,\varepsilon_1), \dots, (k_n,\varepsilon_n)}^{(k_0,\varepsilon_0)}$  と  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対して次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} P_{k_1,\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes P_{k_n,\varepsilon_n} & \xrightarrow{Z_T} & P_{k_0,\varepsilon_0} \\ \downarrow u_\sigma & \nearrow Z_{\sigma(T)} & \\ P_{k_{\sigma^{-1}(1)},\varepsilon_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes P_{k_{\sigma^{-1}(n)},\varepsilon_{\sigma^{-1}(n)}} & & \end{array}$$

ただし、 $u_\sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(n)}$  と定めた。

- 合成に関する整合性: 2 つの平面タングル  $T = T_{(k_1,\varepsilon_1), \dots, (k_n,\varepsilon_n)}^{(k_0,\varepsilon_0)}$ ,  $\tilde{T} = \tilde{T}_{(\tilde{k}_1,\tilde{\varepsilon}_1), \dots, (\tilde{k}_{\tilde{n}},\tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}})}^{(\tilde{k}_0,\tilde{\varepsilon}_0)}$  について、 $T$  の  $i$  番目の内部円盤  $D_i$  における合成  $T \circ_{D_i} \tilde{T}$  が定義できるとき、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{\lambda=1}^{i-1} P_{(k_\lambda,\varepsilon_\lambda)} \otimes \bigotimes_{\tilde{\lambda}=1}^{\tilde{n}} P_{(\tilde{k}_{\tilde{\lambda}},\tilde{\varepsilon}_{\tilde{\lambda}})} \otimes \bigotimes_{\lambda=i+1}^n P_{(k_\lambda,\varepsilon_\lambda)} & \xrightarrow{Z_{T \circ_{D_i} \tilde{T}}} & P_{(k_0,\varepsilon_0)} \\ \downarrow \text{id} \otimes Z_{\tilde{T}} \otimes \text{id} & \nearrow Z_T & \\ \bigotimes_{\lambda=1}^{i-1} P_{(k_\lambda,\varepsilon_\lambda)} \otimes P_{(\tilde{k}_0,\tilde{\varepsilon}_0)} \otimes \bigotimes_{\lambda=i+1}^n P_{(k_\lambda,\varepsilon_\lambda)} & \xlongequal{\quad} & \bigotimes_{\lambda=1}^n P_{(k_\lambda,\varepsilon_\lambda)} \end{array}$$

- 非退化性: 恒等タングル  $I_{(k,\varepsilon)}^{(k,\varepsilon)}$  に対して、 $Z_{I_{(k,\varepsilon)}^{(k,\varepsilon)}} = \text{id}_{P_{(k,\varepsilon)}}$ .

例えば  $T_1, T_2$  を例 2.2 の平面タンゲルとすると、平面代数  $P$  は線形写像

$$Z_{T_1} : P_{(5,-)} \otimes P_{(2,+)} \rightarrow P_{(8,+)},$$

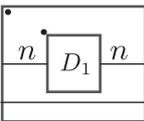
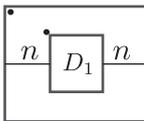
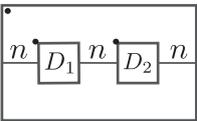
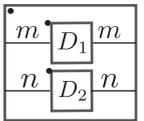
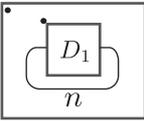
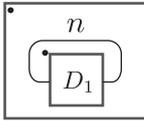
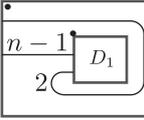
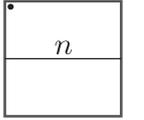
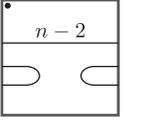
$$Z_{T_2} : P_{(0,-)} \otimes P_{(2,+)} \rightarrow P_{(5,-)}$$

を定める. さらに, 合成に関する整合性により次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} P_{(0,-)} \otimes P_{(2,+)} \otimes P_{(2,+)} & \xrightarrow{Z_{T_1 \circ D_2 T_2}} & P_{(8,+)} \\ \downarrow Z_{T_2} \otimes \text{id} & \nearrow Z_{T_1} & \\ P_{(5,-)} \otimes P_{(2,+)} & & \end{array}$$

平面タンゲル  $T$  が内部円盤を持たないとき,  $Z_T : \mathbb{C} \rightarrow P_{(k_0, \varepsilon_0)}$  である. このとき,  $T$  を  $Z_T(1_{\mathbb{C}}) \in P_{(k_0, \varepsilon_0)}$  と同一視することにする.

例 2.7. 以下に基本的な平面タンゲルの例を挙げる. ただし, 曲線に非負整数  $k$  が乗っているものは,  $k$  本の平行な曲線を表すものとする. また, shading は適切に与えられているものとする.

$I_{(n,\varepsilon)}^{(n+1,\varepsilon)}$		: 包含	$I_{(n,\varepsilon)}^{(n,\varepsilon)}$		: 恒等
$M_{(n,\varepsilon),(n,\varepsilon)}^{(n,\varepsilon)}$		: 積	$T_{(m,\varepsilon),(n,(-1)^m\varepsilon)}^{(m+n,\varepsilon)}$		: テンソル積
$TR_{(n,\varepsilon)}^{(0,\varepsilon)}$		: 右トレース	$TR'_{(n,\varepsilon)}^{(0,\varepsilon)}$		: 左トレース
$R_{(n+1,\varepsilon)}^{(n+1,\varepsilon)}$		: 回転	$\mathbf{1}_{(n,\varepsilon)}$		: 積の単位元
$E^{(n,\varepsilon)}$		: Jones 射影			

例 2.7 の平面タンゲルを用いることで, 平面代数  $P$  には様々な代数的演算が自然に定義できる. 例えば積タンゲル  $M = M_{(n,\varepsilon),(n,\varepsilon)}^{(n,\varepsilon)}$  は各  $P_{(n,\varepsilon)}$  に積構造

$$\begin{array}{ccc} Z_M : P_{(n,\varepsilon)} \otimes P_{(n,\varepsilon)} & \longrightarrow & P_{(n,\varepsilon)} \\ \in & & \in \\ x \otimes y & \longmapsto & xy \end{array}$$

を定め,  $P_{(n,\varepsilon)}$  は単位元  $I_{(n,\varepsilon)}^{(n,\varepsilon)}$  ( $= Z_{I_{(n,\varepsilon)}^{(n,\varepsilon)}}(1_{\mathbb{C}})$ ) を持つ多元環になる.

## 2.2 部分因子環的な平面代数

定義 2.8. 平面代数  $P$  が連結であるとは,  $\dim P_{(0,\pm)} = 1$  が成り立つことである.

平面代数  $P$  が連結のとき, ベクトル空間の同型  $\langle \cdot \rangle_{\pm} : P_{(0,\pm)} \rightarrow \mathbb{C}$  で, 空タングル  $\emptyset_{\pm}$  を  $1_{\mathbb{C}}$  に送るようなものが一意に存在する (これを分配関数 (partition function) という). この分配関数を通じて,  $P_{(0,\pm)} = \mathbb{C}$  とみなすことにする.

定義 2.9. 平面代数  $P$  がモジュラス (modulus)  $\delta \in \mathbb{C}$  を持つとは, 次が成り立つことである:  $T'$  を閉曲線  $c$  を含む平面タングル,  $T$  を  $T'$  から  $c$  を取り除いてできた平面タングルとすると,  $Z_{T'} = \delta Z_T$ .

定義 2.10. 平面タングル  $T$  に対して,  $T$  の随伴  $T^*$  を,  $\mathbb{R}^2$  上の向きを逆にする微分同相写像  $\varphi$  によって  $T$  (および shading などの付随する  $T$  のデータ) を写した平面タングルと定める. 平面タングルの定義から,  $T^*$  は  $\varphi$  の取り方に依らない. ゆえに  $\varphi$  として例えば  $x$  軸に関する鏡映などを取ってよい.

定義 2.11. 平面代数  $P$  が  $*$ -平面代数であるとは, 各  $(k, \varepsilon) \in \text{Col}$  に対して写像  $*$  :  $P_{(k,\varepsilon)} \rightarrow P_{(k,\varepsilon)}$  が定まっています, 以下を満たすことである.

- $*$  は共役線形である.
- $*$  は対合である. つまり,  $*^2 = \text{id}$ .
- $Z_T(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)^* = Z_{T^*}(x_1^* \otimes \cdots \otimes x_n^*)$ . ここで  $T$  は内部円盤を  $n$  個持つ平面タングル.

$P$  が  $*$ -平面代数のとき, 各  $P_{(k,\varepsilon)}$  は自然に  $*$ -代数の構造を持つことが確認できる. またこのとき包含写像  $Z_{I_{(k,\varepsilon)}^{(k+1,\varepsilon)}} : P_{(k,\varepsilon)} \rightarrow P_{(k+1,\varepsilon)}$  は  $*$ -準同型である.

定義 2.12.  $P$  を, モジュラス  $\delta \neq 0$  を持つ連結な平面代数とする.  $P$  のトレース  $\tau : P_{(k,\varepsilon)} \rightarrow P_{(0,\varepsilon)} = \mathbb{C}$  を

$$\tau(x) = \delta^{-k} Z_{TR_{(k,\varepsilon)}^{(0,\varepsilon)}}(x)$$

で定める.

この  $\tau$  は先述の包含写像と整合していることが確かめられる. さらに  $P$  が  $*$ -平面代数のとき,  $\langle x, y \rangle = \tau(x^*y)$  によって  $P_{(k,\varepsilon)}$  に内積を定めることができる.

定義 2.13. 平面代数  $P$  が部分因子環的であるとは, 以下を満たすことである.

- $P$  は連結である. つまり,  $\dim P_{(0,\pm)} = 1$  が成り立つ.
- $P$  は有限次元である. つまり, 任意の  $(k, \varepsilon)$  に対して,  $P_{(k,\varepsilon)}$  は有限次元である.
- $P$  は  $*$ -平面代数である.
- $P$  は正のモジュラス  $\delta > 0$  を持つ.
- $P$  は球面的である.
- 各  $(k, \varepsilon)$  に対し,  $P$  のトレース  $\tau : P_{(k,\varepsilon)} \rightarrow \mathbb{C}$  は非負かつ忠実である. つまり, 任意の  $x \in P_{(k,\varepsilon)}$  に対して  $\tau(xx^*) \geq 0$  であり, 等号が成り立つのは  $x = 0$  のときに限る.

### 2.3 生成元と関係式による平面代数の構成

$L = \coprod_{(k,\varepsilon) \in \text{Col}} L_{(k,\varepsilon)}$  を、添字付きの集合とする. いくつかの (あるいは全ての)  $L_{(k,\varepsilon)}$  は空であってもよい. この集合  $L$  から平面代数  $P(L)$  を構成する.

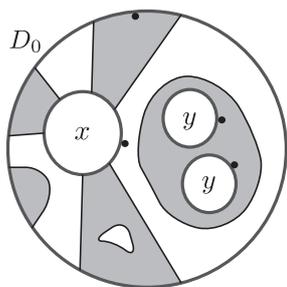
定義 2.14.  $L$  でラベル付けられた平面タングルとは、内部円盤  $D_1, \dots, D_n$  を持つ平面タングル  $T$  と、写像

$$f : \{1, \dots, n\} \rightarrow L$$

で  $D_{f(i)} \in L_{(k_i, \varepsilon_i)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を満たす  $f$  の組  $(T, f)$  のことである. ただし  $\text{col}(D_i) = (k_i, \varepsilon_i)$  とおいた.

$L$  でラベル付けられた平面タングルにおいては、内部円盤の番号付けの情報を忘れることにする. つまり、任意の  $\sigma \in S_n$  に対して、 $(T, f)$  と  $(\sigma(T), f \circ \sigma^{-1})$  を同一視する.

例えば  $L = L_{(3,+)} \sqcup L_{(0,-)}$ ,  $L_{(3,+)} = \{x_1, x_2\}$ ,  $L_{(0,-)} = \{y\}$  とするとき、次図は  $L$  でラベル付けられた  $(4, -)$  タングルの例を与える.



定義 2.15. 上述の  $L$  に対して、平面代数  $P(L) = \{P(L)_{(k,\varepsilon)}\}_{(k,\varepsilon) \in \text{Col}}$  を

$$P(L)_{(k,\varepsilon)} = \text{span}_{\mathbb{C}} \{ L \text{ でラベル付けられた } (k, \varepsilon)\text{-タングル} \}$$

で定める.

このとき、任意の  $(k, \varepsilon)$  に対して  $P(L)_{(k,\varepsilon)}$  は無限次元になってしまう. 実際、任意の平面タングル  $T$  に対し、 $\{ T \text{ に閉曲線を } n \text{ 個加えたもの} \mid n = 0, 1, 2, \dots \}$  は一次独立である. ゆえに  $P(L)$  は部分因子環的な平面代数とはかけ離れている. そこで、 $P(L)$  をある“関係式”  $R$  で割ったもの  $P(L, R)$  を以下に構成しよう.

定義 2.16.  $P = \{P_{(k,\varepsilon)}\}_{(k,\varepsilon) \in \text{Col}}$  を平面代数とする.  $I = \{I_{(k,\varepsilon)}\}_{(k,\varepsilon) \in \text{Col}}$  が  $P$  の平面イデアル (planar ideal) であるとは、各  $(k, \varepsilon) \in \text{Col}$  に対して  $I_{(k,\varepsilon)}$  は  $P_{(k,\varepsilon)}$  の部分空間であり、任意の平面タングル  $T = T_{(k_1, \varepsilon_1), \dots, (k_n, \varepsilon_n)}^{(k_0, \varepsilon_0)}$  が定める線形写像

$$Z_T : P_{(k_1, \varepsilon_1)} \otimes \cdots \otimes P_{(k_n, \varepsilon_n)} \longrightarrow P_{(k_0, \varepsilon_0)}$$

と  $x_i \in P_{(k_i, \varepsilon_i)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) について、少なくとも1つの  $x_i$  が  $I_{(k_i, \varepsilon_i)}$  の元であるならば  $Z_T(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \in I_{(k_0, \varepsilon_0)}$  が成り立つことである.

このとき特に各  $(k, \varepsilon) \in \text{Col}$  に対して、 $I_{(k,\varepsilon)}$  は  $P_{(k,\varepsilon)}$  の (環としての) イデアルになっている.

定義 2.17.  $P$  を平面代数、 $I$  を  $P$  のイデアルとする. このとき、 $P/I = \{P_{(k,\varepsilon)}/I_{(k,\varepsilon)}\}_{(k,\varepsilon) \in \text{Col}}$  には自然に平面代数の構造が入ることが知られている. こうして得られた平面代数  $P/I$  を、 $P$  の  $I$  による商という.

定義 2.18.  $P = \{P_{(k,\varepsilon)}\}_{(k,\varepsilon) \in \text{Col}}$  を平面代数とする.  $R$  を  $P$  の部分集合とする. つまり,  $R = \{R_{(k,\varepsilon)}\}_{(k,\varepsilon) \in \text{Col}}$  で, 各  $(k,\varepsilon) \in \text{Col}$  に対して  $R_{(k,\varepsilon)}$  が  $P_{(k,\varepsilon)}$  の部分集合であるとする. このとき  $I(R)_{(k,\varepsilon)}$  を,  $R_{(k,\varepsilon)}$  を含む  $P_{(k,\varepsilon)}$  のイデアルの中で最小のものと定める. 具体的には

$$I(R)_{(k,\varepsilon)} = \bigcap \{J \mid R_{(k,\varepsilon)} \subset J, J \text{ は } P_{(k,\varepsilon)} \text{ のイデアル}\}$$

とおいてやればよい. このとき,  $I(R) = \{I(R)_{(k,\varepsilon)}\}_{(k,\varepsilon) \in \text{Col}}$  は  $P$  の平面イデアルであることが確かめられる.  $I(R)$  を,  $R$  によって生成された  $P$  のイデアルという.

定義 2.19. 添字付きの集合  $L = \coprod L_{(k,\varepsilon)}$  と  $P(L)$  の部分集合  $R$  が与えられたとき,  $P(L, R) := P(L)/I(R)$  を生成元  $L$  と関係式  $R$  によって定まる平面代数と呼ぶ.

生成元と関係式による平面代数の構成を用いると, 様々な平面代数を定義することが出来る.

定義 2.20.  $P$  を平面代数,  $x \in P_{(n,\varepsilon)}$  とする.  $x$  が射影 (projection) であるとは,  $xx = x$  が成り立つことである.

定義 2.21 (Hom 空間と合成).  $P$  を平面代数,  $x \in P_{(l,\varepsilon)}$ ,  $y \in P_{(m,\varepsilon)}$  を射影とする.  $l+m$  は偶数であるとする. このとき,

$$\text{Hom}(x, y) = \left\{ Z_{J_{l,m;\varepsilon}}(x \otimes a \otimes y) \in P_{\left(\frac{l+m}{2}, \varepsilon\right)} \mid a \in P_{\left(\frac{l+m}{2}, \varepsilon\right)} \right\}$$

と定める. ただし,

$$J_{l,m;\varepsilon} = \begin{array}{c} \bullet \\ \hline l \quad \boxed{D_1} \quad l \quad \boxed{D_2} \quad m \quad \boxed{D_3} \quad m \\ \hline \end{array} .$$

また, さらに  $z \in P_{(n,\varepsilon)}$  を射影,  $f = Z_{J_{l,m}}(x \otimes a \otimes y) \in \text{Hom}(x, y)$ ,  $g = Z_{J_{m,n}}(y \otimes b \otimes z) \in \text{Hom}(y, z)$  とするとき,  $f$  と  $g$  の合成  $g \circ f$  を

$$g \circ f = Z_{J_{l,m,n;\varepsilon}}(x \otimes a \otimes y \otimes b \otimes z)$$

と定める. ただし,

$$J_{l,m,n;\varepsilon} = \begin{array}{c} \bullet \\ \hline l \quad \boxed{D_1} \quad l \quad \boxed{D_2} \quad m \quad \boxed{D_3} \quad m \quad \boxed{D_4} \quad n \quad \boxed{D_5} \quad n \\ \hline \end{array} .$$

特に  $\text{Hom}(x, x) = xP_{(l,\varepsilon)}x$  であり, これは  $P_{(l,\varepsilon)}$  の部分多元環になっている.

定義 2.22. 射影  $x$  が単純 (simple) であるとは,  $\text{Hom}(x, x)$  が 1 次元となることである.

定義 2.23 (射影の同型).  $P$  を平面代数,  $x, y_1, \dots, y_n$  を射影とする.  $x$  と  $y_1, \dots, y_n$  の形式的な直和  $y_1 \oplus \dots \oplus y_n$  が同型であるとは, ある  $f_i \in \text{Hom}(x, y_i)$  と  $g_i \in \text{Hom}(y_i, x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) が存在して

$$f_i \circ g_j = \begin{cases} y_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{かつ} \quad \sum_{i=1}^n g_i \circ f_i = x$$

を満たすことである。このとき、 $x \cong y_1 \oplus \cdots \oplus y_n$  と表す。特に射影  $x$  と  $y$  が同型である  $x \cong y$  とは、ある  $f \in \text{Hom}(x, y)$  と  $g \in \text{Hom}(y, x)$  が存在して  $f \circ g = y$ ,  $g \circ f = x$  が成り立つことである。

**定義 2.24 (半単純).** 平面代数  $P$  が半単純であるとは、任意の射影  $x$  に対して、ある有限個の (重複を許す) 単純射影  $y_1, \dots, y_n$  が存在して  $x \cong y_1 \oplus \cdots \oplus y_n$  を満たすことである。

**定義 2.25 (主要グラフ).**  $P$  を半単純な平面代数とする。  $P$  の主要グラフ (principal graph) を以下で定める。主要グラフの頂点集合は  $P$  の単純射影の同型類全体とする。また、2 つの単純射影  $x$  と  $y$  (の同型類) は  $\dim \text{Hom}(x \otimes X, y)$  本の辺で繋がっていると定める。ここで  $X = \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \end{array} \in P_{(1, \varepsilon)}$ 。  $\dim \text{Hom}(x \otimes X, y)$  は、 $x \otimes X$  の直和分解の中に現れる  $y$  の数とも言える。

**定義 2.26.** 半単純な平面代数  $P$  が深さ有限であるとは、  $P$  の単純射影の同型類が高々有限個であることである。これは、  $P$  の主要グラフが有限グラフであると言い換えることもできる。

## 2.4 平面代数の具体例

**定義 2.27.** unshaded な平面タングル  $T$  とは、平面タングルにおいて shading の情報を忘れたものである。  $T$  の外部円盤または内部円盤  $D$  の color を  $\text{col}(D) = \frac{1}{2} \# \{ \partial D \text{ 上の固定された点} \}$  と定める。  $T$  の外部円盤を  $D_0$ , 内部円盤を  $D_1, \dots, D_n$ ,  $\text{col}(D_i) = k_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) とするとき、  $T = T_{k_1, \dots, k_n}^{k_0}$  と表記する。

**定義 2.28.** unshaded な平面代数  $P$  とは、平面代数から shading の情報を忘れたものである。つまり、  $P$  はベクトル空間の族  $\{P_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  と、 unshaded な平面タングル  $T = T_{k_1, \dots, k_n}^{k_0}$  に対して線形写像

$$Z_T : P_{k_1} \otimes \cdots \otimes P_{k_n} \rightarrow P_{k_0}$$

を与える対応  $T \mapsto Z_T$  から成り、番号付け替え、合成と整合しており、非退化なものである。

unshaded 平面タングル  $P$  が与えられたとき、  $P_{(k, \pm)} = P_k$  とおくことで  $P$  は自然に平面代数だと思いうことができる。また、前節の平面代数  $P(L, R)$  は unshaded な場合においても全く同様に構成することができる。以下では unshaded な平面代数のみを考えることにする。

**定義 2.29.**  $L = \emptyset$ ,  $R_\delta = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \bigcirc \\ \hline \end{array} - \delta \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right\}$  ( $\delta \in \mathbb{C}$ ) としたときの  $P(\emptyset, R_\delta)$  を、  $\delta$  をパラメータを持つ Temperley-Lieb 平面代数といい、  $PTL(\delta)$  と表す。

内部円盤と閉曲線を持たない平面タングルのことを Temperley-Lieb 平面タングルという。 color が  $k$  の Temperley-Lieb 平面タングル (Temperley-Lieb  $k$ -タングルと呼ぶ) はちょうどカタラン数  $C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$  個だけあることが (帰納法などにより) 確認できる。定義から  $PTL(\delta)$  はモジュラス  $\delta$  を持つので、  $PTL(\delta)_k$  は、 (ベクトル空間としては) Temperley-Lieb  $k$ -タングル全体で生成されることがわかる。

整数  $n \geq 2$ ,  $1 \leq i \leq n-1$  に対して  $e_i = e_i^n = \sum_{n-i-1}^{i-1} \in PTL(\delta)_n$  と定める。  $PTL(\delta)_n$  は (多元環としては)  $\{1^n, e_1, \dots, e_{n-1}\}$  で生成されていることがわかる。

定義 2.30 (量子整数). 複素数  $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  と整数  $n$  に対して量子整数  $[n]_q$  を

$$[n]_q = q^{n-1} + q^{n-3} + \cdots + q^{-(n-3)} + q^{-(n-1)} = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$$

で定める.

定義 2.31 (Jones-Wenzl 射影).  $n$  を正の整数,  $q \in \mathbb{C}$  とする.  $q^2$  は  $k = 1, 2, \dots, n$  に対し, 1 の  $k$  乗根でないとする.  $\delta = [2]_q = q + q^{-1}$  とおく. このとき, 以下の条件を満たす  $f^{(n)} = \begin{array}{c} n \\ | \\ n \end{array} \in PTL(\delta)_n$  が一意的に存在する (例えば [5] などを見よ).  $f^{(n)}$  を Jones-Wenzl 射影という.

- $f^{(n)} \neq 0$  である.
- $f^{(n)} e_i = 0 = e_i f^{(n)}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) が成り立つ.
- $f^{(n)}$  は射影である. つまり,  $f^{(n)} f^{(n)} = f^{(n)}$  を満たす.

また,  $f^{(0)} = \emptyset$  とおく. Jones-Wenzl 射影は次の漸化式を満たすことが知られている.

$$\begin{array}{c} n \\ | \\ n \end{array} = \frac{n-1}{[n]_q} \begin{array}{c} n-1 \\ | \\ n-1 \end{array} - \frac{[n-1]_q}{[n]_q} \begin{array}{c} n-1 \\ | \\ n-2 \\ | \\ n-1 \end{array} \quad (n \geq 2).$$

例えば  $n = 1, 2, 3$  のとき,  $f^{(n)}$  は次のように表せる.

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} 1 \\ | \\ 1 \end{array} &= \text{---}, \\ \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 2 \end{array} &= \text{=} - \frac{1}{[2]_q} \supset \subset, \\ \begin{array}{c} 3 \\ | \\ 3 \end{array} &= \text{=} - \frac{[2]_q}{[3]_q} (\supset \subset + \overline{\supset \subset}) + \frac{1}{[3]_q} (\supset \subset + \supset \subset). \end{aligned}$$

定義 2.32 ( $A_n$  平面代数).  $n$  を 2 以上の整数とする.  $q = \exp(\pi\sqrt{-1}/n)$  とおく. このとき, 生成元  $L = \emptyset$  と関係式

$$\left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \square \\ \circ \end{array} - [2]_q \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array}, f^{(n)} \right\}$$

によって定まる平面代数を  $PA_n$  と表す.  $PA_n$  は部分因子環的であり, その主要グラフは次の  $A_n$  型 Dynkin 図形になることが知られている.

$$f^{(0)} \text{ --- } f^{(1)} \text{ --- } f^{(2)} \text{ --- } \cdots \text{ --- } f^{(n-1)}$$

定義 2.33 ( $D_{2n}$  平面代数, [6]).  $n$  を 2 以上の整数とする.  $q = \exp(\frac{\pi\sqrt{-1}}{4n-2})$  とおく. このとき, 生成元  $L = L_{2n-2} = \{S\}$  と関係式

$$\left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \square \\ \circ \end{array} - [2]_q \begin{array}{c} \bullet \\ \square \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \square \\ \circ \\ S \end{array} - \sqrt{-1} \begin{array}{c} \bullet \\ \square \\ \circ \\ S \end{array} \right\},$$



$$h^{(3)} = g^{(3)} - f^{(3)},$$

$$g^{(4)} = f^{(4)} - \frac{1}{[2]_q^2 [4]_q} \boxed{\begin{array}{c} \bullet \\ 4 \quad S \quad 2 \quad S \quad 4 \end{array}}.$$

定理 2.37.  $P^{E_8}$  は部分因子環的であり, その主要グラフは次の  $E_8$  型 Dynkin 図形になる.

$$f^{(0)} \text{ --- } f^{(1)} \text{ --- } f^{(2)} \text{ --- } f^{(3)} \text{ --- } f^{(4)} \text{ --- } g^{(5)} \text{ --- } g^{(6)}$$

$\swarrow$   
 $h^{(5)}$

ただし,

$$g^{(5)} = \frac{[2]_q [5]_q}{[3]_q [6]_q} f^{(5)} - \frac{[2]_q [5]_q}{[3]_q [6]_q} S,$$

$$h^{(5)} = g^{(5)} - f^{(5)},$$

$$g^{(6)} = f^{(6)} - \frac{1}{[2]_q^2 [3]_q [6]_q} \boxed{\begin{array}{c} \bullet \\ 6 \quad S \quad 4 \quad S \quad 6 \end{array}}.$$

### 3 $E_8$ 状態和不変量

定理 2.37 で得られた  $P^{E_8}$  の単純射影の偶数部分を  $\mathcal{M} = \{f^{(0)}, f^{(2)}, f^{(4)}, g^{(6)}\}$  とおく. 本節では  $\mathcal{M}$  を用いて  $6j$ -記号を定義し, 閉 3 次元多様体の  $E_8$  状態和不変量を構成する. 不変量の構成及び不変性の証明については  $P^{E_6}$  の場合 [7] と共通する部分も多い.

表記の簡単のため,  $\mathcal{M}$  を集合  $\{0, 2, 4, 6\}$  と同一視する. また, 灰色の箱  $\begin{array}{c} n \\ \text{---} \\ n \end{array}$  は  $n = 0, 2, 4$  のとき  $f^{(n)}$  を,  $n = 6$  のとき  $g^{(6)}$  を表すものとする.

定義 3.1. 3 つ組  $i, j, k \in \mathcal{M}$  に対し, インタートワイナー空間  $H(i, j, k)$  を

$$H(i, j, k) = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \begin{array}{c} i \quad i \quad k \quad k \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ x \\ \diagup \quad \diagdown \\ j \quad j \end{array} \\ \text{---} \\ j \end{array} \middle| x \in P_{\frac{i+j+k}{2}}^{E_8} \right\}$$

で定める.

命題 3.2. インタートワイナー空間について,

$$H(i, j, k) \cong H(j, k, i) \cong H(k, i, j)$$

が成り立つ.  $H(i, j, k)$  は以下のように直交基底が定められる.

- $(i, j, k) = (4, 4, 4)$  のとき,

$$H(4, 4, 4) = \mathbb{C}\varphi_0 \oplus \mathbb{C}\varphi_2 \oplus \mathbb{C}\varphi_3$$

- $\{i, j, k\} = \{4, 4, 2\}$  のとき,

$$H(4, 4, 2) = \mathbb{C}\varphi_0 \oplus \mathbb{C}\varphi_1$$

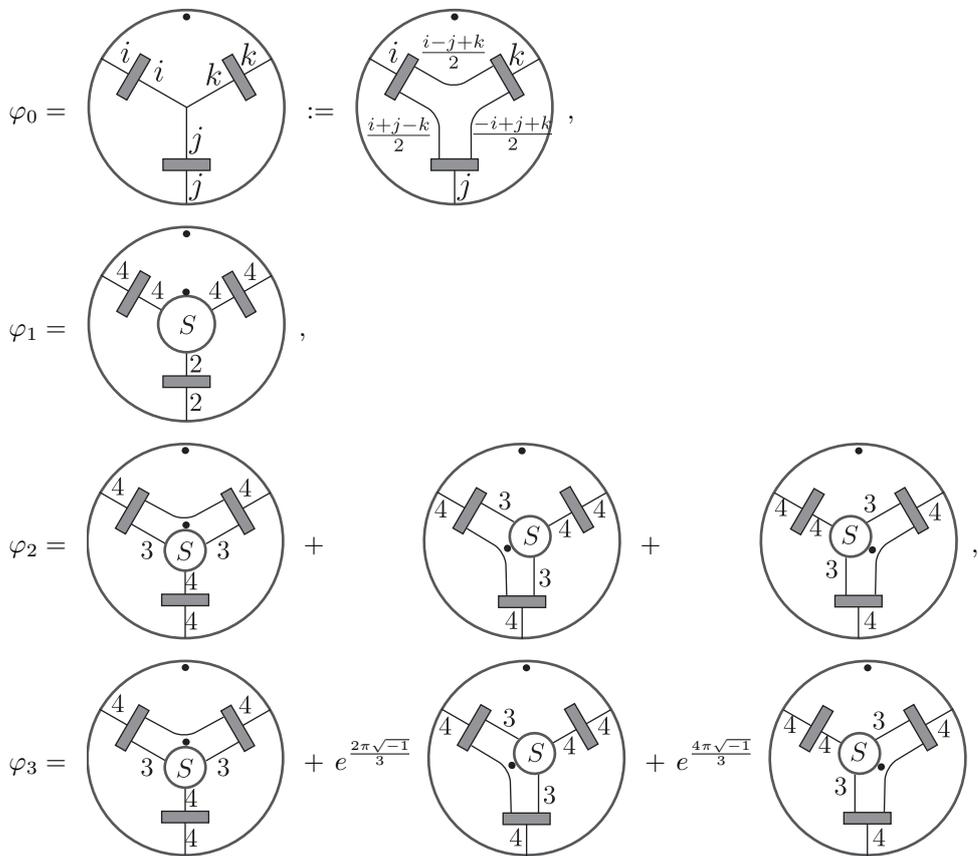
$H(4, 2, 4), H(2, 4, 4)$  についても同様.

- $\{i, j, k\} = \{i, 0, 0\}$  ( $i = 0, 2, 4, 6$ ),  $\{2, 2, 2\}$ ,  $\{2, 2, 4\}$ ,  $\{2, 4, 6\}$ ,  $\{2, 6, 4\}$ ,  $\{4, 4, 6\}$ ,  $\{6, 6, 4\}$  のとき,

$$H(i, j, k) = \mathbb{C}\varphi_0$$

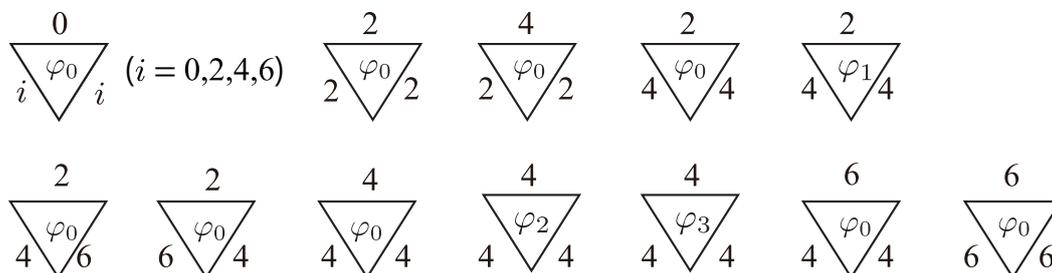
- それ以外のときは  $H(i, j, k) = 0$  である. 例えば,  $H(6, 6, 6) = 0$ .

ただし,  $\{i, j, k\} = \{a, b, c\}$  は  $(i, j, k)$  が  $(a, b, c)$ ,  $(b, a, c)$ ,  $(c, a, b)$  のいずれかに等しいことを意味するものとした. また, 以下のように定めた.



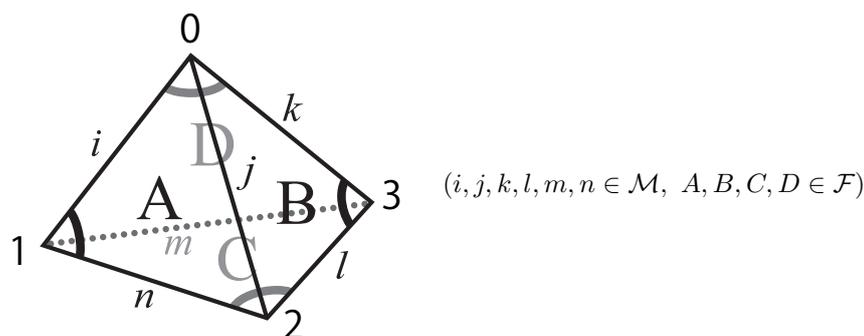
$M$  を閉有向 3 次元多様体とし,  $M$  の単体分割を 1 つ固定する.  $M$  の marking を,  $M$  の各面に対して 1 つの角を選ぶ選択とする. 選ばれた角には  のように印をつけておくことにする.  $\mathcal{F} = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  とおく.  $M$  の coloring を,  $M$  の辺全体から  $\mathcal{M}$  への写像と,  $M$  の面全体から  $\mathcal{F}$  への写像の組のこととする.  $M$  の coloring が許容的であるとは,  $(M, \mathcal{T})$  の各面について, coloring が (回転を除いて) 次のいずれかで塗ら

れていることとする.



許容的であることの条件は、命題 3.2 の結果と対応している.

閉 3 次元多様体  $M$  に単体分割, marking, 許容的な coloring  $\lambda$  が与えられたとき,  $M$  の各 4 面体  $T$  に対して次のように  $6j$ -記号を定める.  $T$  に, 次図のように coloring と marking が与えられていたとする. ただし各頂点に付いている全順序  $0 < 1 < 2 < 3$  は, 単体  $|0123|$  が,  $M$  の向きから定まる  $T$  の向きと整合しているようにとったものとする.



このとき, 対応する  $6j$ -記号 ( $6j$ -symbol) を次で定める.

$$|(T, \lambda)| = \left| \begin{array}{c} \text{tetrahedron diagram} \end{array} \right| = \frac{\langle \text{graphical symbol} \rangle}{\sqrt{\theta(i, j, n, A) \theta(j, k, l, B) \theta(l, m, n, C) \theta(i, k, m, D)}}.$$

ただし  $\langle \cdot \rangle : P_0^{Es} \rightarrow \mathbb{C}$  は分配関数であり,  $\theta(i, j, k, A) = \langle \text{graphical symbol} \rangle$  とおいた. また, marking の位置は

•-辺の位置と対応しており, もし違う場所に marking が付いている場合は右辺の •-辺の位置もそれに対応した場所に変更する.

以上の準備の元で, 状態和不変量を定義する.  $M$  を閉有向 3 次元多様体とする.  $M$  に単体分割と marking

が与えられているとき,  $M$  の  $E_8$  状態不変量  $Z^{E_8}(M)$  を次で定義する.

$$Z^{E_8}(M) = w^{-v} \sum_{\lambda} \prod_E d_{\lambda(E)} \prod_T |(T, \lambda)|.$$

ただし  $\lambda$  は許容的な coloring 全体を,  $E$  は  $M$  の辺全体を,  $T$  は  $M$  の 4 面体全体を走るものとする. また,  $v$  は  $M$  の頂点の個数を表し,

$$d_n = \left\langle \text{---} \bigcirc n \right\rangle \quad (n = 0, 2, 4, 6),$$

$$w = d_0^2 + d_2^2 + d_4^2 + d_6^2$$

とおいた.  $d_n = [n+1]$  ( $n = 0, 2, 4$ ),  $d_6 = [5]/[3]$  であることが確かめられる.

次が今回のもう 1 つの主結果である.

**定理 3.3.**  $Z^{E_8}(M)$  は, 単体分割や marking のとり方によらない閉有向 3 次元多様体の位相不変量である.

## 4 計算例

本節では  $P^{E_8}$  から定義される  $6j$ -記号の一覧を与え, さらに一部のレンズ空間に対し,  $E_8$  状態不変量の計算例を紹介する.

**定理 4.1** ( $6j$ -記号の一覧).

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} i & j & k & A & B \\ l & m & n & C & D \end{array} \right| := \left| \begin{array}{c} \text{---} \triangle \text{---} \\ \text{---} \triangle \text{---} \\ \text{---} \triangle \text{---} \\ \text{---} \triangle \text{---} \end{array} \right|$$

と表記する.  $P^{E_8}$  から定義される  $6j$ -記号の値は以下で与えられる. ただし,  $q = \exp(\pi\sqrt{-1}/30)$ ,  $[n] = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$ ,  $d_n = [n+1]$  ( $n = 0, 2, 4$ ),  $d_6 = [5]/[3]$  とする.

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 0 & i & i & A & B \\ k & j & j & C & D \end{array} \right| = \delta_{AB} \cdot \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}},$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & 2 & \varphi_0 & \varphi_0 \\ 4 & 4 & 4 & \varphi_1 & \varphi_1 \end{array} \right| = -\sqrt{\frac{[2]}{[3][5][6]}},$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 4 & 4 & 2 & \varphi_1 & \varphi_1 \\ 2 & 4 & 2 & \varphi_0 & \varphi_0 \end{array} \right| = -\frac{q^{-6}}{[5]},$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & 2 & \varphi_3 & \varphi_0 \\ 4 & 4 & 4 & \varphi_1 & \varphi_0 \end{array} \right| = \frac{q^{-8}}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{[3][4][5]}},$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & 2 & \varphi_2 & \varphi_0 \\ 4 & 4 & 4 & \varphi_1 & \varphi_1 \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt[4]{3} \cdot [2]} \sqrt{\frac{[3]}{[2][4][5][6]}},$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 4 & \varphi_1 & \varphi_1 \\ 2 & 4 & 4 & \varphi_0 & \varphi_0 \end{array} \right| = -\frac{[4]}{[5][6]},$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 4 & \varphi_0 & \varphi_1 \\ 2 & 4 & 4 & \varphi_1 & \varphi_1 \end{array} \right| = \frac{[5]}{[2][3][6]} \sqrt{\frac{[5]}{[2][3][4]}},$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & 2 & \varphi_1 & \varphi_0 \\ 4 & 4 & 4 & \varphi_1 & \varphi_1 \end{array} \right| = \frac{1}{[3]\sqrt{[4][6]}},$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & 2 & \varphi_2 & \varphi_0 \\ 4 & 4 & 4 & \varphi_1 & \varphi_0 \end{array} \right| = \frac{q^{12}[2]}{\sqrt[4]{3} \cdot [5]\sqrt{[6]}},$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & 2 & \varphi_0 & \varphi_0 \\ 4 & 4 & 4 & \varphi_1 & \varphi_1 \end{array} \right| = \frac{1}{[2][4]} \sqrt{\frac{[5]}{[2][3][6]}},$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & 2 & \varphi_3 & \varphi_0 \\ 4 & 4 & 4 & \varphi_1 & \varphi_1 \end{array} \right| = \frac{[5]}{\sqrt[4]{3} \cdot [3]^2 [4] \sqrt{[2]}},$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 4 & \varphi_1 & \varphi_0 \\ 2 & 4 & 4 & \varphi_1 & \varphi_0 \end{array} \right| = \frac{q^6 [2]}{[5][6]},$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 4 & \varphi_1 & \varphi_1 \\ 2 & 4 & 4 & \varphi_1 & \varphi_1 \end{array} \right| = \frac{[5]}{[3]^2 [4][6]},$$



$$\begin{array}{ll}
\left| \begin{array}{ccc} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \end{array} ; \begin{array}{cc} \varphi_2 & \varphi_2 \\ \varphi_0 & \varphi_0 \end{array} \right| = -\frac{[3]^2([4] - \sqrt{3})}{\sqrt{3} \cdot [2][5]^2[6]}, & \left| \begin{array}{ccc} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \end{array} ; \begin{array}{cc} \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_0 & \varphi_0 \end{array} \right| = \frac{[3]^2}{\sqrt{3} \cdot [5]^2} \sqrt{\frac{[3][4]}{[5][6]}}, \\
\left| \begin{array}{ccc} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \end{array} ; \begin{array}{cc} \varphi_3 & \varphi_3 \\ \varphi_0 & \varphi_0 \end{array} \right| = \frac{[3]}{\sqrt{3} \cdot [2]^2[4]}, & \left| \begin{array}{ccc} 6 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{array} ; \begin{array}{cc} \varphi_0 & \varphi_0 \\ \varphi_0 & \varphi_0 \end{array} \right| = -\frac{q^{-14}}{[5]}, \\
\left| \begin{array}{ccc} 6 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \end{array} ; \begin{array}{cc} \varphi_0 & \varphi_0 \\ \varphi_0 & \varphi_0 \end{array} \right| = \frac{q^8}{[5]}, & \left| \begin{array}{ccc} 6 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \end{array} ; \begin{array}{cc} \varphi_0 & \varphi_0 \\ \varphi_0 & \varphi_0 \end{array} \right| = -\frac{1}{[2][4]}, \\
\left| \begin{array}{ccc} 6 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \end{array} ; \begin{array}{cc} \varphi_0 & \varphi_0 \\ \varphi_0 & \varphi_0 \end{array} \right| = -\frac{\sqrt{[3]}}{[2][4]}, & \left| \begin{array}{ccc} 6 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 2 \end{array} ; \begin{array}{cc} \varphi_0 & \varphi_0 \\ \varphi_0 & \varphi_0 \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{[2][4]}}, \\
\left| \begin{array}{ccc} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{array} ; \begin{array}{cc} \varphi_0 & \varphi_0 \\ \varphi_0 & \varphi_0 \end{array} \right| = -\frac{[3]}{[2][4]}. & 
\end{array}$$

定理 4.2. レンズ空間  $L(4, 1)$ ,  $L(5, 1)$ , 及び  $L(5, 2)$  の状態和不変量の値 (数値計算) は以下の通りである.

$$\begin{aligned}
Z^{E^8}(L(4, 1)) &\approx 0.248015\dots \\
Z^{E^8}(L(5, 1)) &\approx 0.5 + \sqrt{-1} \cdot 0.288675\dots \\
Z^{E^8}(L(5, 2)) &\approx 0
\end{aligned}$$

## 参考文献

- [1] S. Bigelow, *Skein theory for the ADE planar algebras*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010) 658–666.
- [2] S. Bigelow, E. Peters, S. Morrison, and N. Snyder, *Constructing the extended Haagerup planar algebra*, Acta Math. **209** (2012), no. 1, 29–82.
- [3] V. Jones, *Planar algebras, I*, arxiv.org:math/9909027v1[math.QA].
- [4] Vijay Kodiyalam, V.S. Sunder, *From subfactor planar algebras to subfactors*. Internat. J. Math., **20** (10) (2009), 1207–1231.
- [5] W. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Graduate Texts in Math. **175**, Springer-Verlag, 1997.
- [6] S. Morrison, E. Peters, N. Snyder, *Skein theory for the  $D_{2n}$  planar algebras*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010) 117–139.
- [7] K. Okazaki, *The state sum invariant of 3-manifolds constructed from the  $E_6$  linear skein*, Algebraic and Geometric Topology **13** (2013) 3469–3536.
- [8] A. Ocneanu, *Chirality for operator algebras*, Subfactors (Proc. Taniguchi Symposium in 1993). World Scientific, Singapore, 1994.
- [9] V. Turaev, O. Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*, Topology **31** (1992) 865–902.