

MINIMAL COLORING NUMBERS OF MINIMAL DIAGRAMS FOR \mathbb{Z} -COLORABLE LINKS

松土恵理 (日本大学大学院総合基礎科学研究科)
(市原一裕氏との共同研究)

本稿では、 \mathbb{Z} 彩色可能な絡み目の最少図式における最小彩色数についての結果を報告する。

1. 導入

L を絡み目、 D を L の正則射影図式とする。

写像 $\gamma: \{\text{arcs of } D\} \rightarrow \mathbb{Z}$ が、 D の任意の交点において上側を通る弧を a 、下側を通る弧を b, c とした時、 $2\gamma(a) = \gamma(b) + \gamma(c)$ を常に満たすとする。この時 γ を \mathbb{Z} 彩色と呼ぶ。また全ての弧に対応する値が等しい \mathbb{Z} 彩色を自明な \mathbb{Z} 彩色という。非自明な \mathbb{Z} 彩色を許容する図式 D が存在する時、絡み目 L を \mathbb{Z} 彩色可能な絡み目という。

以下 \mathbb{Z} 彩色 γ の $\text{Im}(\gamma)$ の集合の位数、即ち \mathbb{Z} 彩色された図式 D に現れる色数に着目する。

ある \mathbb{Z} 彩色可能な絡み目 L の図式が許容する自明でない \mathbb{Z} 彩色 γ の $\text{Im}(\gamma)$ のうち、最も小さい色数 (位数) を実現するものを最少 \mathbb{Z} 彩色数と呼び、 $\text{mincol}_{\mathbb{Z}}(L)$ と表す。

この最小 \mathbb{Z} 彩色数について、[2] にて次の結果を得ている。(市原一裕氏との共同研究)

定理 1.1. (1) 非自明かつ非分離な L において、 $\text{mincol}_{\mathbb{Z}}(L) \geq 4$ である。

(2) L を非分離な単純 \mathbb{Z} 彩色可能絡み目とする。この時 $\text{mincol}_{\mathbb{Z}}(L) = 4$ である。

(3) L を非分離な \mathbb{Z} 彩色可能な絡み目とする。色数が 5 である \mathbb{Z} 彩色 γ を L が許容するならば、 $\text{mincol}_{\mathbb{Z}}(L) = 4$ である。

単純 \mathbb{Z} -彩色とは、ある自然数 d に対し図式上の任意の交点の上弧と下弧の差が d または 0 となる \mathbb{Z} -彩色のことである。

また非分離な任意の絡み目の最少 \mathbb{Z} 彩色数は 2 である。

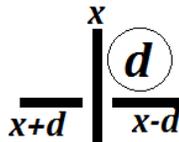
2. 先行結果

ここで自然な疑問として、任意の非分離な \mathbb{Z} -彩色可能な絡み目に対し、 $\text{mincol}_{\mathbb{Z}}(L) = 4$ であるかという問題が考えられるが、[3] にて次のことが示せた。

定理 2.1. 任意の非分離な \mathbb{Z} -彩色可能な絡み目の最少 \mathbb{Z} 彩色数は 4 である。

この結果は [4] において Meiqiao Zhang-Xian'an Jin-Qingying Deng によっても独立に証明されている。

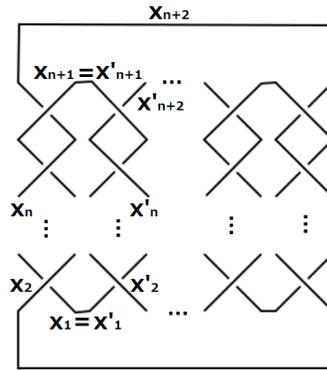
定理 2.1 の証明の概要. L を \mathbb{Z} -彩色可能な絡み目とする。上弧が x 、下弧が $x-d$ と $x+d$ で彩色されている交点を d -差交点と呼ぶ。



このとき単純 \mathbb{Z} -彩色は図式上で d -差交点または 0-差交点のみをもつ。

定理 3.1 の証明の概要. (1) の証明

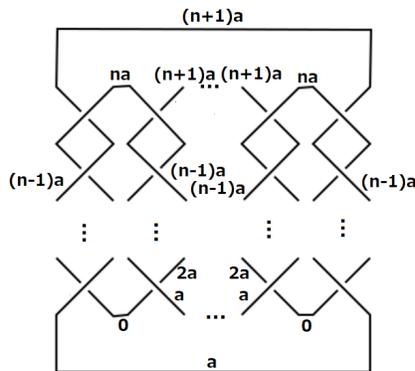
プレッツェル絡み目 $P(n, -n, \dots, n, -n)$ の図式 D が図 3 で表されているものとする.



この D は最小図式であることが知られている.

γ を D が許容する非自明な \mathbb{Z} -彩色とする. このとき D 上に現れる色の最小値は 0 としてよい.

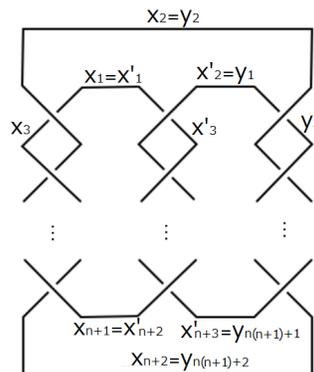
このとき \mathbb{Z} -彩色の交点条件より, すべての弧が 0 が対応する交点を除き, 0 が対応する弧は必ず下弧となる. そのため 0 が対応する弧は図 3 のようにしてよい. このとき γ の像は $\{0, a, 2a, \dots, (n+1)a\}$ となる.



これは D 上の最少 \mathbb{Z} -彩色数が $n+2$ であることを示している.

(2) の証明

プレッツェル絡み目 $P(-n, n+1, n(n+1))$ の図式 D が図 3 で表されているものとする.



この D は最小図式であることが知られている.

REFERENCES

- [1] R. H. Fox, A quick trip through knot theory, in *Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961)*, 120–167, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [2] K. Ichihara and E. Matsudo, Minimal coloring number for \mathbb{Z} -colorable links, *J. Knot Theory Ramifications* **26** (2017), no. 4, 1750018, 23 pp.
- [3] E. Matsudo, Minimal coloring number for \mathbb{Z} -colorable links II, preprint, arXiv:1705.07567v3 .
- [4] M. Zhang, X. Jin, and Q. Deng, The minimal coloring number of any non-splittable \mathbb{Z} -colorable link is four, to appear in *J. Knot Theory Ramifications*, online ready.

GRADUATE SCHOOL OF INTEGRATED BASIC SCIENCES, NIHON UNIVERSITY, 3-25-40 SAKURAJOSUI, SETAGAYA-KU, TOKYO 156-8550, JAPAN

E-mail address: cher16001@g.nihon-u.ac.jp