3 次元球面に埋め込まれたコンパクト曲面の全同位による分類について

松崎 尚作 (拓殖大学 工学部)

1　導入

結び目, 空間グラフ, ハンドル体結び目の全同位（アンビエントイソトピック）による分類問題を考える際, 不変量を用いる方法は最も基本的である. また, 不変量を構成する為の土台として, 結び目の局所変形による特徴づけ (ライデマイスター変形：結び目の組み合わせ構造を決定する変形 [3], [2], [1]) は重要であり, 実際にライデマイスター変形を基礎として, 現在までに様々な不変量が構成されている.

本研究の最終的な目標は, 空間曲面（3 次元球面 S^3 に埋め込まれたコンパクト曲面）の全同位による分類である. 3 次元空間に埋め込まれた閉曲面に関する研究は [5], [4] などがあるが, 分類を目標とするものではない. 本研究の具体的な研究方針としては, 空間曲面を何らかの図式で表す方法を導入し, その組み合わせ構造（ライデマイスター変形）を決定した上で, それをもとにして不変量を作っていくというものである. 不変量を構成する前段階である空間曲面の組み合わせ構造が決定できたので, 報告したい.

2　準備

定義 2.1. *3 次元球面 S^3 に局所平坦に埋め込まれた, 必ずしも連結でないコンパクト曲面を***空間曲面 (spatial surface)** *という. また, 境界を持たない空間曲面を***空間閉曲面***, 全ての連結成分が境界を持つ空間曲面を***空間境界付き曲面***と呼ぶことにする.*

まずは, あらゆる空間境界付き曲面を表す方法について述べる（向付け可能であってもなくても良い）. 本稿では, 全ての頂点における次数が 2 もしくは 3 である有限グラフを単にグラフといい, S^3 に局所平坦に埋め込まれたグラフを, 空間グラフという.

記号 2.2. G を空間グラフとし, D をその図式とする. また, $V_2(G)$ を G の 2 価頂点全体からなる集合とする.

1. 写像 $s : V_2(G) \to \{+1, -1\}$ を G の**符号**という. $V_2(G) = \emptyset$ の場合, 空写像 $0 : \emptyset \to \{+1, -1\}$ も G の符号とみなす. また, G の図式 D と, G の符号 s の対 (D, s) を**符号付き図式**と呼ぶ (図 1 参照).

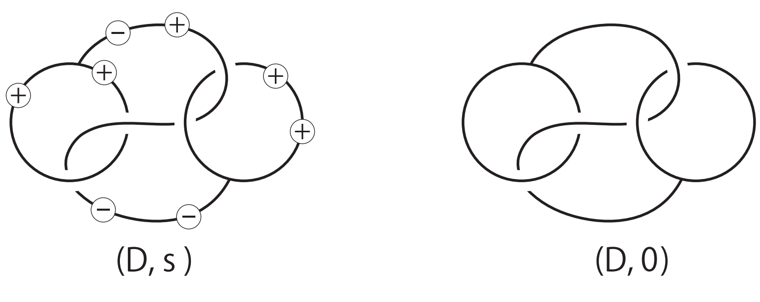

図 1　符号付き図式の例（+1, −1 の 1 は省いて書いてある）.

2. 符号付き図式 (D, s) に対して, 空間境界付き曲面 $F(D, s)$ を図 2 の要領で定める.

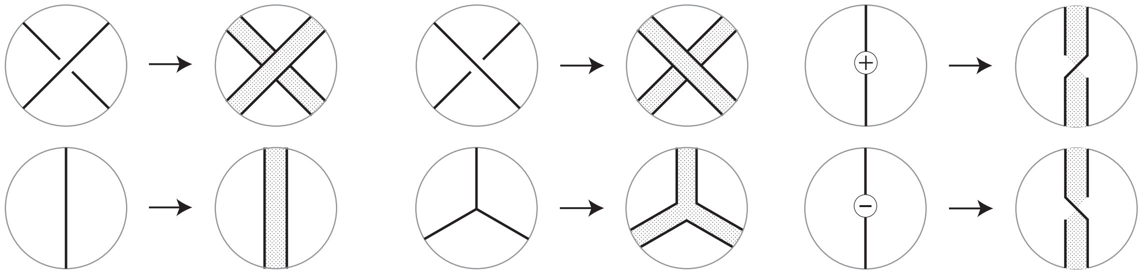

図 2　符号付き図式から, 空間境界付き曲面を得る手続き.

符号付き図式と, それから得られる空間境界つき曲面の例は, 図 3 を見よ.

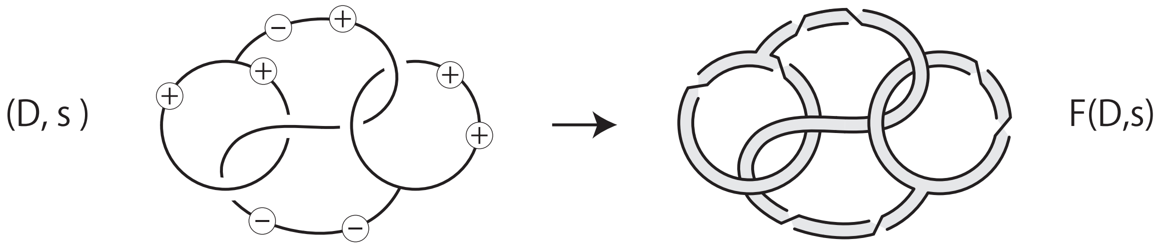

図 3　符号付き図式と, 空間境界付き曲面の例.

3. 符号付き図式 $(D, 0)$ に対して, 向き付け可能な空間境界付き曲面 $F(D, 0)$ が定まるが, これに対し図 5 の様に向きを定めた有向空間境界付き曲面を $\vec{F}(D, 0)$ と表す.

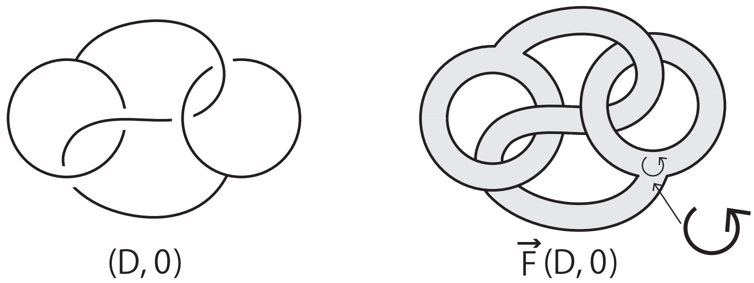

図 4　有向空間境界付き曲面の向きの付け方.

注意 2.3. どんな空間境界付き曲面も, 何らかの符号付き図式 (D, s) から得られる空間境界付き曲面 $F(D, s)$ と全同位であり, いかなる有向空間境界付き曲面も, 何らかの符号付き図式 $(D, 0)$ から得られる有向空間境界付き曲面 $\vec{F}(D, 0)$ と全同位である.

何故ならば, 空間境界付き曲面 F が与えられたとき, そのスパイン G を一つとり, F 上の, 十分細い G の正則近傍 F' をとる（F と F' は全同位である）. それを適当に摂動することによって, ある符号付き図式 (D, s) を用いて, $F(D, s)$ と F' が全同位となるようにできるからである.

定義 2.4. 符号付き図式に対して, ライデマイスター変形を図 5 の様に定める.

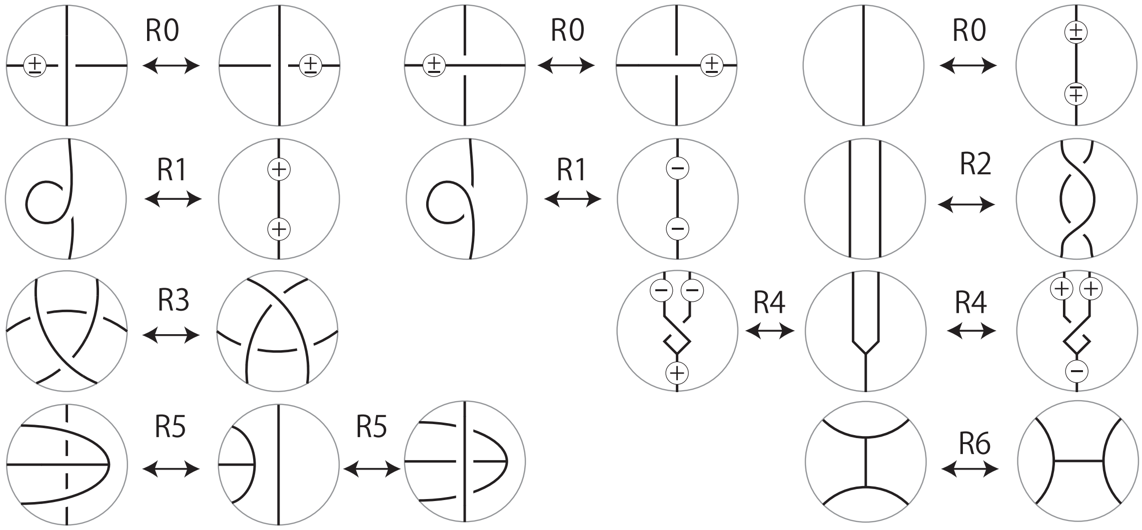

図 5　符号つき図式に関するライデマイスター変形（R2, R3, R5, R6 は, 符号がつかない）.

3　主定理

得られた結果を証明なしに述べる.

3.1　空間境界付き曲面の組み合わせ構造

二つの符号付き図式が, 上記のライデマイスター変形で移りあうときに, 得られる二つの空間境界付き曲面は全同位である. 変形に応じたアンビエントイソトピーを, 具体的に構成できるからである. この逆も正しいというのが定理 3.1 の主張である.

定理 3.1 (M)**.** 符号付き図式 (D, s), (D', s') に対し, 以下は同値である.

1. 符号付き図式 (D, s), (D', s') は, *R0, R1, R2, R3, R4, R5, R6* を有限回施して移りあう.
2. 空間境界付き曲面 $F(D, s)$, $F(D', s')$ は全同位である.

次の定理 3.2 は, 定理 3.1 の状況を有向空間境界付き曲面に制限したものである. 図式が平面ではなく球面上であることに注意されたい.

定理 3.2 (M)**.** 球面上の符号付き図式 $(D, 0)$, $(D', 0)$ に対し, 以下は同値である.

1. 符号付き図式 $(D, 0)$, $(D', 0)$ は, *R2, R3, R5, R6* を有限回施して移りあう.
2. 有向空間境界付き曲面 $\vec{F}(D, 0)$, $\vec{F}(D', 0)$ は, 向きも込めて全同位である.

3.2　空間閉曲面の表示方法

これまでは空間境界付き曲面のみに関する考察であったが, 次は空間閉曲面の表し方について述べたい. 空間閉曲面が与えられたとき, それぞれの成分から開円板を取り除くと, 空間境界付き曲面が得られるので符号付き図式で表すことができるが, 開円板を除いたことで元々の空間閉曲面の情報が減る可能性がある. つまり, 穴を開けた箇所にディスクを張り戻して空間閉曲面を復元する際に, ディスクの張り方が一意的でない可能性がある. しかし, 空間閉曲面が非分離的でありさえすれば, ディスクを取り除いて空間境界付き曲面として考えても全同位に関する情報は失われないというのが次の命題 3.3 である. ここで, 空間閉曲面 F が非分離的であるとは, F を分離する球面が存在しない時をいう.

命題 3.3 (M)**.** $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ を非分離的な n 成分をもつ空間閉曲面とし, $D_1, \ldots, D_n$ を $D_i \subset F_n$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満たすようなディスクとする. また, $D'_1, \ldots, D'_n$ を, $\partial D'_i = \partial D_i$ かつ $D'_i \cap (F \setminus \cup_{i=0}^{n} D_i) = \emptyset$ を満たすようなディスクとする. この時, 空間閉曲面 F と, $D'_i \cup (F \setminus \cup_{i=0}^{n} D_i)$ は全同位である.

この命題により, 非分離的な空間閉曲面の考察をする際は, 各成分から開円板を除いて得られる空間境界付き曲面を考えれば十分とわかる. なお, 分離的な場合はこの命題は成り立たない.

4　空間曲面の研究の結び目理論における位置付けと応用

空間境界付き曲面は, 結び目, ハンドル体結び目の自然な拡張になっており, それぞれを, 空間境界付き曲面に帰着させて研究できる. これについて説明したい. 結び目全体, ハンドル体結び目全体, 空間閉曲面全体, 向き付け可能な空間境界付き曲面全体の各集合を, それぞれ全同位で割って得られる集合を, $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ と書くことにすれば, 以下の写像は全て単射である.

1. $f_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \to \mathcal{H};\ K \mapsto$ (K の正則近傍として得られるハンドル体結び目)
2. $f_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathcal{C};\ H \mapsto$ (H の境界として得られる空間閉曲面)
3. $f_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{S};\ C \mapsto$ (C から開円板を取り除いて得られる空間境界付き曲面)

ここで 3. が単射であることは, 命題 3.3 による. また, 上記の写像はどれも全射ではない. なお, 成分数が複数個ある場合でも非分離的という条件を加えれば同様の結果が成り立つ.

参考文献

[1] A. Ishii, Moves and invariants for knotted handlebodies, Algebr. Geom. Topol. 8 (2008), 1403–1418.

[2] L. H. Kauffman, Invariants of Graphs in Theree-Space, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 311, No.2 (2008), 697–710.

[3] K. Reidemeister, Elementare Begrndung der Knotentheorie, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 5 (1), 24–32

[4] S. Suzuki, On a complexity of a surface in 3-sphere, Osaka J. Math. **11** (1974), 113–127

[5] Y. Tsukui, On surfaces in 3-space, The yokohama mathematical journal, 18(2) (1970), 93–104