結び目群の副有限完備化が Alexander多項式を決定すること

The profinite completions of knot groups determine the Alexander polynomials

植木 潤　(東京大学大学院数理科学研究科)*

平成 30 年 1 月 28 日

概　要

本稿では研究集会「結び目の数学 X」での講演内容の詳細を述べる。内容は preprint[Uek17b] の和訳に [Uek18] の予告を加えたものである。

まず、完備群環 $\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ と結び目の完備 Alexander 加群について幾つかの性質を調べる。然る後に、2 つの結び目 J, K の結び目群の副有限完備化たちが同型であるならば、J と K の Alexander 多項式 $\Delta_J(t)$ と $\Delta_K(t)$ が一致することを示す。後半では、結び目群の代数体の S 整数環 O に値をもつ表現に付随する捻れ Alexander 多項式について、少なくとも有限の不定性を除いて同様の性質があることを述べ、証明の概略を与える。

目　次

1. Introduction と定理 1.1

2 つの結び目を区別するにあたって、その上の有限次分岐被覆のホモロジー群の torsion を比較することがしばしば有効であることが、経験的に知られている (e.g., [Per74], [KS92])。有限次被覆のホモロジー群の torsion は結び目群の副有限完備化によって決まる (cf. Remark 4.2)。なので、結び目群の副有限完備化（の位相同型類）が如何なる幾

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 57M27, Secondary 20E18, 20E26, 57M12.
キーワード：profinite completion, profinite group ring, knot, branched covering.
* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: uekijun46@gmail.com

何学を知っているか、という問は興味深い。これは言い換えると、結び目群の有限商の全体（が成す逆系）は何を知っているか、という問である。

本稿の第一の目的は、任意の結び目について、結び目群の副有限完備化がその Alexander 多項式を決定すること（定理 1.1 の意味で）を示すことである。

一般に 3 次元多様体の基本群 π はその副有限完備化 $\widehat{\pi}$ に自然に包含される (Hempel [Hem87] + Perelman [Per02], [Per03b], [Per03a])。Grothendieck は有限生成で（有限表示を持ち）かつ剰余有限な群がその副有限完備化から決まるかどうかは興味深い問題であると述べていたが ([Gro70])、近年になって有限型であるような否定的な具体例が与えられた (Bridson–Grunewald [BG04])。なお有限表示を持つと限らない否定的具体例は Platonov–Tavgen ([PT86]) によって与えられていた。

どのような幾何学的性質が $\widehat{\pi}$ によって決定されるのかは、非常に微妙な問題であり、まだまだ解明されていない。これについて Section 2 で詳しい背景と関連する話題を述べる。

主結果の先行研究を振り返る: Bridson と Reid は八の字結び目群の完備化を他の 3 次元多様体のそれと区別した ([BR15])。これより八の字結び目の Alexander 多項式はその $\widehat{\pi}$ で決まる。Boileau と Friedl は様々な条件下で考察を行い、特に Alexander 多項式が 1 の冪根を根に持たないような結び目のクラスに対して、その Alexander 多項式が $\widehat{\pi}$ によって決まることを示した ([BF15, Proposition 4.10])。その証明は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 被覆に対する Fox の公式 ([Fox56]) と Fried の命題 ([Fri88]) を併せることで与えられた。我々の定理は彼らの結果を完全に一般化する。本稿表題にある主張の正確な意味は次の定理によって与えられる:

定理 1.1 J, K を S^3 内の結び目とし、結び目群の副有限完備化上の同型 $\widehat{\pi}_1(S^3-J) \xrightarrow{\cong} \widehat{\pi}_1(S^3-K)$ が与えられていたとする。このとき Alexander 多項式について $\Delta_J(t) \doteq \Delta_K(t)$ である。ここに $\doteq$ は $\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$ の単数倍を除いて等しいことを意味する。

証明のアイディアは、[BF15] を改良することである。我々は群の位数を比較するだけでなく、完備群環 $\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ 上の完備 Alexander 加群の同型を導き、その Fitting イデアルを比較する。そのために、まず Section 3 で、$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ の性質を調べる。これは分岐 $\widehat{\mathbb{Z}}$ 被覆の研究や数論等への応用 (e.g., [Uek17a], [Asa08]) も期待する。特に、完備群環 $\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ において、任意の元 $0 \neq f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ は非零因子であることを示す (Lemma 3.3)。次に Section 4 で、結び目の分岐 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 被覆の逆系を考えて、完備群環 $\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ のイデアルの等式を得る。また結び目の完備 Alexander 加群を定義して調べる。以上を踏まえて、Section 5 で我々の定理 1.1 の証明を与える。Section 6 では捻れ Alexander 多項式への拡張について論じる。

なお本論文では $\widehat{\mathbb{Z}}$ で完備整数環 $\varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を、また各素数 p に対して $\mathbb{Z}_p$ で p 進整数環 $\varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ を表す。

2. 一般的な背景

この節では、本研究の一般的な背景、関連する結果、また先の見通しについて概説する。以下のうち、副有限完備化の定義以外は後の節で用いない。なお副有限群に関する基礎文献は [RZ10] である。

離散群 π に対して、その副有限完備化 $\widehat{\pi}$ とは、まず Γ が π の指数有限正規部分群を走るときの逆極限 $\varprojlim_\Gamma \pi/\Gamma$ で定義される群を考え、そこに各 Γ に対し自然な射影の核

$\mathrm{Ker}(\widehat{\pi} \to \pi/\Gamma)$ が開部分群となるような最弱の位相を備えさせることで得られる、位相群である。

離散群 π が剰余有限とは、各 $g \in \pi$ に対して、π の有限商であって g の像が非自明なものが存在することをいう。この条件は、副有限完備化への自然な射 $\pi \to \widehat{\pi}$ が単射であることと同値である。

剰余有限な離散群 π が Grothendieck rigid であるとは、どの部分群 $\Gamma < \pi$ も包含写像が副有限完備化の同型 $\widehat{\Gamma} \overset{\cong}{\to} \widehat{\pi}$ を導かないことをいう。有限表示を持った有限生成群はいつでもこの性質を満たすか？という Grothendieck の問題 ([Gro70]) があったが、[BG04] でその反例が与えられた。

このように、剰余有限を課しても、群の完備化は群の情報を一定の度合いで忘れる。そしてその度合には、俄には分からない微妙さがある。

Hempel の結果 ([Hem87]) と Perelman による幾何化予想の解決 ([Per02], [Per03b], [Per03a]) を合わせると、任意のコンパクトな 3 次元多様体は基本群が剰余有限である。また Long–Reid([LR11]) によると、幾何構造を持った閉 3 次元多様体の基本群は Grothendieck rigid である。加えて、最近 Boileau–Friedl([BF17]) によって、トーラスを境界に持つ有向 compact 既約 3 次元多様体の基本群は Grothendieck rigid であることが示された。しかし、異なる 2 つの結び目の群の副有限完備化が同型となりうるか否かは、未だに知られていないように思われる。

次に 3 次元多様体群の副有限完備化 $\widehat{\pi}$ が 3 次元多様体のどのような位相幾何的情報を知っているかという問題に焦点を移す。本稿では「$\widehat{\pi}$ が性質 P を決める」と言ったら次を意味する：「M と N が 3 次元多様体であって $\widehat{\pi}_1(M) \cong \widehat{\pi}_1(N)$ を満たすとき、M が性質 P を持つことと N が性質 P を持つことは論理同値である。」（別の文脈では、M が性質 P を持つか否かを $\widehat{\pi}_1(M)$ から明示的に判定できることを意味する可能性がある。）

Wilton–Zalesskii([WZ17]) によると、閉 3 次元多様体が双曲的であるか否か、また Seifert fibered であるか否かが決定される。一方 Funar([Fun13]) や Hempel([Hem14]) によれば、区別のつかないトーラス束の組、また区別の付かない Seifert 多様体の組がある。双曲的な 3 次元多様体については未解決である。

とくに結び目補空間については、次のような結果がある。Bridson–Reid([BR15]) は八の字結び目群の完備化を他の 3 次元多様体のそれと区別した。また Boileau–Friedl([BF15]) は各トーラス結び目および八の字結び目の群の完備化を、他の全ての結び目のそれと区別できることを示した。加えて、Bridson–Reid–Wilton([BRW16]) は、1st Betti 数が 1 であるコンパクト 3 次元多様体に対してファイバー性が基本群の副有限完備化で決まることを示した。

なお結び目群の副有限完備化 $\widehat{\pi}$ から Alexander 多項式を具体的に記述する方法については Hillar の研究 [Hil05] があり、多項式が 1 の冪根を根に持たないとき、次数が分かっていれば、その巡回終結式の値たちから多項式を再構成するアルゴリズムが与えられている。本稿の結果の後にも、根に関するを外した次の問題が残る：「結び目補空間 $X = S^3 - K$ 上の n 次巡回被覆 $\{X_n \to X\}_n$ について、群の族 $\{\widehat{H}_1(X_n)\}$ から結び目 K の Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ を再構成するアルゴリズムを与えよ。」

基本群の副有限完備化（副 sol 完備化）が効果的に応用された最も重要な例としては、捻れ Alexander 多項式が 3 次元多様体の fiber 性を決定するという Friedl–Vidussi の定理 ([FV11b]) がある。なお [BF15] ではこれを用いて $\widehat{\pi}$ が結び目群の fiber 性を決定するこ

とが示されていた。

最後に、素数と結び目の類似性について言及したい。代数体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大を扱う岩澤理論と、結び目補空間の巡回被覆列を扱う Alexander–Fox 理論の間には、思想的に密接な関係があることが、Mazur によって初めに指摘された ([Maz64])。後年、Kapranov・Reznikov・森下氏らによって、代数的整数論と低次元トポロジーの間の類似性が体系的に記述され、その研究は数論的位相幾何学と呼ばれている (cf.[Mor12])。

基礎となる類似の一つは、3 次元多様体 M の基本群 $\pi_1(M)$ と、代数体 k の整数環 $\mathcal{O}_k$ のエタール基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\mathcal{O}_k)$ であるが、このうち後者はもともと副有限群である。なので、3 次元多様体の副有限剛性の研究は、数論的位相幾何学に一つの視点を与える ([Maz12, p.6] にも言及がある)。

切り口の候補として、例えば Alexander–Fox 理論については、ある種の副有限環上の表現に付随する捻れ不変量への拡張が肥田 Mazur 理論（ガロア変形理論）の観点から調べられている (e.g., [MTTU17], [KMTT17])。また双曲体積が現れるホモロジー漸近公式の研究があるが (e.g., [BV13], [Le16])、Lück の L^2-torsion に関する "楽観的予想" から双曲体積の副有限剛性が従うという話題と同じ系統に思われる。

加えて、数論側の「遠アーベル幾何学」においては、数論的基本群から対象を再構成する研究が行われている。中でも、望月氏によって導入されたと思しき「mono/bi-anabelian」という用語は、このような再構成問題の定式化の区別を意図しているものと見受けられ、興味深い (cf. [Moc15, Remarks 3.7.3, 3.7.5])。

3. 代数的な補題

まずは言葉を確認してから、本節で用いる結果を 2 つ復習し、然る後に完備群環 $\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ について調べていく。

次数 d の多項式 $f(t)=\sum_{0\le i\le d} a_i t^{d-i}\in\mathbb{Z}[t]$ が相反（reciprocal, palindromic とも言う）であるとは、$a_i=a_{d-i}$ が全ての i に対して成り立つことをいう。

2 つの多項式 $f(t)=\sum_{0\le i\le d} a_i t^{d-i}$ と $g(t)=\sum_{0\le j\le e} b_j t^{e-j}\in\mathbb{Z}[t]$（$d=\deg f(t)$, $e=\deg g(t)$）に対し、終結式 $R(f(t),g(t))\in\mathbb{Z}$ とは、次の行列の行列式のことである:

$$\mathrm{Syl}(f(x),g(x))=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & a_0 & a_1 & & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & b_0 & b_1 & & \cdots & b_n \end{pmatrix}\in\mathrm{M}_{d+e}(\mathbb{Z}).$$

この行列は f と g の Sylvester 行列と呼ばれ、多項式の係数 a_i, b_i たちを成分に持つので、終結式の値は係数環 $\mathbb{Z}$ に入る。$\mathbb{Q}$ の代数閉体 $\overline{\mathbb{Q}}$ において α_i と β_j が $f(t)$ と $g(t)$ の根を走る時、$R(f(t),g(t))=a_0^e b_0^d\prod_{i,j}(\alpha_i-\beta_j)$ が成立つ。

Fried の命題は次のように述べられる:

命題 3.1 (Fried [Fri88, Proposition]) 相反多項式 $f(t)\in\mathbb{R}[t]$ と t^n-1 の終結式 $R(f(t),t^n-1)$ について、もし全ての $n\in\mathbb{N}_{>0}$ に対して $R(f(t),t^n-1)\neq 0$ ならば、列 $\{|R(f(t),t^n-1)|\}_n$ は $f(t)$ を決定する。

これは Artin–Mazur([AM65]) による力学系のゼータ関数 $B(z)=\sum_{n=1}^{\infty}|R(f(t),t^n-1)|\frac{z^n}{n}$ を考察することで示された。この $B(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理関数に解析接続され、そこ

に $f(t)$ の根の情報が現れる。この命題において $R(f(t), t^n-1) \neq 0$ の仮定を外すことはできない。実際、例3.7の Fried's pair などがある。なお Hillar([Hil05, Lemma 3.2]) によれば $R(f(t), t^n-1) \neq 0$ を課さずとも $B(z)$ は有理関数である。このゼータ関数についての最新の進捗として Bräunling の研究 ([Bra17]) がある。

次の命題は Fox の公式 ([Fox56]) の部分的な代数的抽象化・一般化である。

命題 3.2 (Weber [Web79]) 多項式 $0 \neq f(t), g(t) \in \mathbb{Z}[t]$ について、$g(t)$ の最高次係数と定数項が ± 1 であるとする。$f(t)$ と $g(t)$ が $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ に共通根を持たない時、$\mathbb{Z}[t]/(f(t), g(t))$ は有限群であり、その位数は $|R(f(t), g(t))|$ である。

なお $R(f(t), t^n-1) = 0$ であることは、$m|n$ であるようなある $m \in \mathbb{N}$ に対して $f(t)$ が 1 の原始 m 乗根を根に持つことと等価である。1 の原始 m 乗根の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $\Phi_m(t)$ を m-th 円分多項式と呼ぶ。これは定義から 1 の原始 m 乗根を根にもつ $\mathbb{Q}$ 上既約な monic 多項式であるが、その性質として、1 の原始 m 乗根を全て根に持ち、相反であり、係数は整数である。また $\prod_{m|n} \Phi_m(t) = t^n - 1$ を満たす。$\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ を固定し、各 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ に対して 1 の原始 n 乗根 $\zeta_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ を取っておく。

完備群環 $\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ は $\varprojlim_n \widehat{\mathbb{Z}}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$ によって定義され、$\varprojlim_n \widehat{\mathbb{Z}}[t]/(t^n-1)$ とも同一視される。合成 $\widehat{\mathbb{Z}}[t^{\mathbb{Z}}] \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]] \to \widehat{\mathbb{Z}}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$ は自然な全射なので、各階への射影 $\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]] \twoheadrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$ は全射である。$\mathbb{Z}[t]$ を自然に $\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ の部分環とみなす。自然な分解 $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \prod_p \mathbb{Z}_p$ と $\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]] \cong \prod_p \mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ がある。実際、各 $m \in \mathbb{N}$ の素因数分解 $m = \prod_i p_i^{e_i}$ を考えると中国剰余定理による同型 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \prod_i \mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z}$ があり、よって各 $n \in \mathbb{N}$ に対し係数の分解 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}] \cong \prod_i (\mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}])$ がある。逆極限は各階の直積と整合的なので、完備群環の自然な分解を得る。$\widehat{\mathbb{Z}}$ は整域ではないが $\mathbb{Z}_p$ は整域であるため、$\mathbb{Z}_p$ 係数に落とすと議論がしやすい。各素数 p に対して p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の完備化を $\mathbb{C}_p$ とし、埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ を固定する。

各 $\mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ の元 g には 1 の冪根を代入できることを説明する。まず各 m に対して自然な写像 $\mathrm{mod}\,\Phi_m : \mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p[t]/(\Phi_m(t))$ がある。実際、$m|n$ なる各 n に対して自然な写像 $\mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}] \cong \mathbb{Z}_p[t]/(t^n-1) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p[t]/(\Phi_m(t))$ を考える。$\{\mathbb{Z}_p[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]\}_n$ が逆系を成すことから、この射は n に依らない。

$\mathbb{Z}_p[t]$ において円分多項式 $\Phi_m(t)$ は既約とは限らない。例えば $m|(p-1)$ ならば $\mathbb{Z}_p$ は 1 の原始 m 乗根を持つことが知られている。これは主に Hensel の補題による ([Gou97, p.112])。いま $\phi(t) \in \mathbb{Z}_p[t]$ を $\Phi_m(t)$ の既約因子とし、$\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$ を $\phi(t)$ の根とすると、自然な同型 $\mathbb{Z}_p[t]/(\phi(t)) \cong \mathbb{Z}_p[\zeta]$ がある。各 $g \in \widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ の写像 $\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p[t]/(\Phi_m(t)) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p[t]/(\phi(t)) \cong \mathbb{Z}_p[\zeta]$ による像を $g(\zeta)$ と書く。

補題 3.3 完備群環 $\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ において、任意の元 $0 \neq f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ は零因子でない。

証明. 各既約元 $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ について示せば良い。分解 $\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]] \cong \prod_p \mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ を考える。$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ の元の各 $\mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ での像を同じ文字で表す。もし $g \in \widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ に対して $f(t)g = 0$ ならば、各 p に対して $\mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ での像について再び $f(t)g = 0$ である。各 $\mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ において $f(t) \neq 0$ であるから、各 $\mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ において $f(t)$ が零因子でないことを示せば良い。

$\boxed{\textbf{Case 1.}}$ まず $f(t)$ が円分多項式でない場合を考える。まず $\mathbb{Z}_p$ は一意分解整域なので、Gauss の補題により $\mathbb{Z}_p[t]$ も一意分解整域である。$\mathbb{Z}_p[t]$ における素元分解 $t^n - 1 = \prod_\mu \phi_\mu(t)$ を考え、各 μ に対し $\phi_\mu(t)$ の根 ζ_μ を取る。$\mathbb{Z}_p[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$ において $\cap_\mu (\phi_\mu(t)) = 0$ な

ので、自然な単射$\mathbb{Z}_p[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}] \hookrightarrow \prod_\mu \mathbb{Z}_p[t]/(\phi_\mu(t)) \cong \prod \mathbb{Z}_p[\zeta_\mu]$がある。各直積成分$\mathbb{Z}_p[\zeta_\mu]$は整域であり、そこでの$f(t)$の像は$f(\zeta_\mu)$で与えられる。このように$\mathbb{Z}_p[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$から整域たちの直積への単射があり、行き先の各直積成分での像は零でない。よって$f(t)$の各$\mathbb{Z}_p[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$での像は零因子でなく、よって$\mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$においても零因子でない。

$\boxed{\textbf{Case 2.}}$ 今度は、各$m \in \mathbb{N}_{>0}$に対して$f(t) = \Phi_m(t)$が$\mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$の零因子でないことを、3つのStepに分けて示す。

Step 1. まず各$k \in \mathbb{N}$に対して零化イデアルの包含$\mathrm{Ann}(\Phi_m(t)^k) \subset (\Phi_m(t))$があることを、i) $\mathrm{Ann}(\Phi_m(t)^k) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{mod}\,\Phi_m(t))$, ii) $\mathrm{Ker}(\mathrm{mod}\,\Phi_m(t)) = (\Phi_m(t))$の順で示す:

i) $\Phi_m(t)^k g = 0$なる$g \in \mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$を取る。1の各原始$m$乗根$\xi$に対して$g(\xi) = 0$を言う。$\xi = \zeta_m$として良い。$g = (g_n(t) \bmod (t^n - 1))_n, g_n(t) \in \mathbb{Z}_p[t]$と書く。特に$n = mp^r$なる各$r, n \in \mathbb{N}$を考える。$\Phi_m(t)^k g_n(t) = 0 \bmod (t^n - 1)$より、$g_n(t)$は$\Psi_{n,m}(t) := (t^n - 1)/\Phi_m(t) \in \mathbb{Z}_p[t]$を因子にもつ。$\zeta_m$を代入した値について$|\Psi_{n,m}(\zeta_m)|_p \leq |n|_p = |p^r|_p$が成り立つ。$q_n(t) := g_n(t)/\Psi_{n,m}(t) \in \mathbb{Z}_p[t]$なので$|q_n(\zeta_m)|_p \leq 1$である。値$g_n(\zeta_m) = g(\zeta_m)$は$n$に依らない。$\lim_{r\to\infty} |p^r|_p = 0$だから、$g(\zeta_m) = 0$である。

ii) いま$\mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$の位相としてイデアルの族$\{\mathrm{Ker}(\mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}])\}_{s,n\in\mathbb{N}}$を0の基本近傍系とするものを考える。写像$\mathrm{mod}\,\Phi_m(t) : \mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p[t]/(\Phi_m(t))$ のKerは閉集合であって$(\Phi_m(t))$を稠密部分集合に持つ。いま$\mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$はcompactかつHausdorffな位相空間である。$\Phi_m(t)$倍写像はその上の連続写像であるから、閉写像である。よってその像であるイデアル$(\Phi_m(t))$は閉集合であり、$(\Phi_m(t)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{mod}\,\Phi_m(t))$となる。

Step 2. 次に“$M \subset IM$” 型の包含を用意する。いま$\mathrm{Ann}(\Phi_m(t)^k)$の元$g$を取ると、上で示した包含により$g = \Phi_m(t)h$なる元$h$がある。$\Phi_m(t)^k g = \Phi_m(t)^{k+1}h = 0$より$h \in \mathrm{Ann}(\Phi_m(t)^{k+1})$である。よって$\mathrm{Ann}(\Phi_m(t)^k) \subset \Phi_m(t)(\mathrm{Ann}(\Phi_m(t)^{k+1}))$を得る。ここで$\{\mathrm{Ann}(\Phi_m(t)^k)\}_k$は包含に関する増大列を成すので、$\cup_k$を取ると次を得る:

$$\cup_k \mathrm{Ann}(\Phi_m(t)^k) \subset \Phi_m(t)(\cup_k \mathrm{Ann}(\Phi_m(t)^k)).$$

Step 3. さて、$g \in \mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$について$\Phi_m(t)g = 0$を仮定する。各$n$に対し、環$A := \mathbb{Z}_p[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$における$\cup_k \mathrm{Ann}(\Phi_m(t)^k)$の像を$M$、$(\Phi_m(t))$の像を$I$とし、$g$の$M$での像を再び$g$と書く。$A$はNoether環であり$M \subset A$なので、$M$は有限生成$A$加群である。また今見たように$M \subset IM$である。よって良く知られたNAK（中山, 東屋, Krull）の補題の変種 (cf. [AM69, Corollary 2.5])により、ある$\alpha \in A$について$\alpha - 1 \in I$かつ$\alpha M = 0$である。$\alpha - 1 = \beta\Phi_m(t)$なる$\beta \in A$がある。$g \in M$ゆえ$\alpha g = (1 + \beta\Phi_m(t))g = 0$となる。仮定$\Phi_m(t)g = 0$から$g = 0$ in Aを得る。以上から$g = 0$ in $\mathbb{Z}_p[[t^{\hat{\mathbb{Z}}}]]$である。

以上で$f(t) = \Phi_m(t)$が$\mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$の零因子でないことが示された。よって補題も示された。■

補題 3.4 各円分多項式$\Phi_m(t)$および単数$v \in \widehat{\mathbb{Z}}$に対して、$\Phi_m(t^v)/\Phi_m(t)$なる$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$の元が定まり、これは$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$の単数である。

証明. 環$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$は$\{\mathrm{Ker}(\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}}]\}_{n_1,n_2}$を0の基本近傍系とする位相についてcompact Hausdorff位相環である。$\mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$の場合と同様の議論により、自然な射$\mathrm{mod}\,\Phi_m(t) : \widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]] \twoheadrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}[t]/(\Phi_m(t))$があり、また$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$のイデアルの等式$(\Phi_m(t)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{mod}\,\Phi_m(t))$がある。$\Phi_m(t^v) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{mod}\,\Phi_m(t))$なので、$\Phi_m(t^v) \in (\Phi_m(t))$である。

よって$\Phi_m(t^v)=\Phi_m(t)f$なる$f\in\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$がある。また$s=t^v$とおくと、同様の議論によって、$\Phi_m(t)=\Phi_m(s^{-v})\in\mathrm{Ker}(\mathrm{mod}\,\Phi_m(s))=(\Phi_m(s))=(\Phi_m(t^v))$となる。よって$\Phi_m(t)=\Phi_m(t^v)g$なる$g\in\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$がある。いま$\Phi_m(t)=\Phi_m(t)fg$である。$\Phi_m(t)$は補題3.3により零因子でないので、$1-fg=0$となり、$f=\Phi_m(t^v)/\Phi_m(t)$は$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$の単数である。■

補題 3.5 多項式$f(t),g(t)\in\mathbb{Z}[t]$と$\widehat{\mathbb{Z}}$の単数$v$に対して、$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$のイデアルとして$(f(t))=(g(t^v))$と仮定する。このとき各$m$-th円分多項式$\Phi_m(t)$について、$\Phi_m(t)|f(t)$と$\Phi_m(t)|g(t)$は等価である。また$\Phi_m(t)|f(t)$のとき、$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$のイデアルとして$(f(t)/\Phi_m(t))=(g(t^v)/\Phi_m(t^v))$が成り立つ。

証明. 1の原始m乗根ζ_mと$\widehat{\mathbb{Z}}$の単数vに対してζ_m^vが定義され、これは再び1の原始m乗根である。よって2つの等式$g(\zeta_m)=0$と$g(\zeta_m^v)=0$は等価である。

pを勝手な素数とし、$\mathrm{mod}\,\Phi_m(t)$または$\mathrm{mod}(t-\zeta_m)$による射影$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]\twoheadrightarrow\mathbb{Z}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]\twoheadrightarrow\mathbb{Z}_p[t]/(\Phi_m(t))\twoheadrightarrow\mathbb{Z}_p[\zeta_m]$を考える。$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$のイデアルの等式$(f(t))=(g(t^\nu))$から、$\mathbb{Z}_p[\zeta_m]$のイデアルの等式$(f(\zeta_m))=(g(\zeta_m^v))$を得る。

いま$f(t)$が$\Phi_m(t)$を因子に持つと仮定すると、$f(\zeta_m)=0$であるから$g(\zeta_m^v)=0$である。よって$g(\zeta_m)=0$であり、$g(t)$も$\Phi_m(t)$を因子に持つ。補題3.3により、$\Phi_m(t)$は$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$において零因子ではない。補題3.4より、$\Phi_m(t^v)/\Phi_m(t)$は単数である。以上から$(f(t)/\Phi_m(t))=(g(t^\nu)/\Phi_m(t))=(g(t^\nu)/\Phi_m(t^v))$という完備群環$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$のイデアルの等式を得る。■

補題 3.6 相反多項式$f(t),g(t)\in\mathbb{Z}[t]$と$\widehat{\mathbb{Z}}$の単数$v$に対して、$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$のイデアルとして$(f(t))=(g(t^v))$と仮定する。このとき$\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$の単数倍を除き$f(t)$と$g(t)$は一致する。

証明. 補題3.5によって$f(t)$と$g(t)$の共通因子である円分多項式を全てキャンセルすることができる。相反多項式たちの商として得られる多項式もまた相反であることに気をつける。残ったイデアルの等式について、[BF15, Proposition 4.10]と同様にして多項式の一致が従う。実際、円分多項式を因子に持たない多項式$f(t),g(t)\in\mathbb{Z}[t]$ついて、$(f(t))=(g(t^v))$のとする。Weberの命題（[Web79]）により、$\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]/(f(t))$は有限群であり、その位数は終結式を用いて$|R(f(t),t^n-1)|$で与えられる。よって$\widehat{\mathbb{Z}}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]/(f(t))=\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]/(f(t))$である。いま$v=(v_n\,\mathrm{mod}\,n)_n$, $v_n\in\mathbb{Z}$と書くと、終結式について$|R(f(t),t^n-1)|=|R(g(t^{v_n}),t^n-1)|=|R(g(t),t^n-1)|$となる。よってFriedの命題(命題3.1)によって結論を得る。■

円分多項式をキャンセルすることは、特定の階を見ているだけではうまくいかない。逆極限を考えることが本質的に必要である。一方、完備群環$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$の元に「代入」できるのは1の冪根だけなので、円分多項式でない多項式については、$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$のイデアルの一致から多項式の一致を同じ方法で言うことはできない。Friedの命題もまた、本質的に用いる必要がある。

例 3.7 p,qを相異なる素数とするとき、Fried's pair $(F(t),G(t))$は次で与えられる:

$$F(t)=\Phi_{pq}(t)\Phi_{p^2q}(t)\Phi_{pq^2}(t),G(t)=\Phi_{p^2q^2}(t)\Phi_{pq}(t)\Phi_{pq}(t).$$

これらは全てのnに対して等しいn次巡回終結式を持つ([Fri88])。

加えて、$f(t) = F(t)^2G(t)$, $g(t) = F(t)G(t)^2$ とおくと、これらも同じ巡回終結式を持つが、こられは更に、根の集合も等しい。我々の議論によって、$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ のイデアルとして、任意の $v \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$ に対し、$(F(t)) \neq (G(t^v))$、また $(f(t)) \neq (g(t^v))$ である。よってこれらは、商の族 $(\widehat{\mathbb{Z}}[[s^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]/(F(s), s^n - 1))_n$ 等を考えることで区別可能である。

4. 幾何的な補題

離散群 π に対して副有限完備化と Abel 化は可換である。π の副有限完備化の Abel 化を $\widehat{\pi}^{\mathrm{ab}}$ と書く。もし π が有限生成 Abel 群 (加法群) ならば $\widehat{\pi} \cong \pi \otimes \widehat{\mathbb{Z}}$ である。もし π が有限群ならば $\widehat{\pi} \cong \pi$ である。ネーター環 R と有限生成 R 加群 M に対して、Fitting イデアルを $\mathrm{Fitt}_R(M) \subset R$ と書く。

次の補題は、結び目補空間の有限次被覆の基本群の副有限完備化が、結び目群の副有限完備化から決まることを説明する。

補題 4.1 π を有限生成離散群とし、有限群への全射 $\widehat{\pi} \twoheadrightarrow G$ を取り、導かれる全射 $\pi \twoheadrightarrow G$ を考える。$B := \ker(\widehat{\pi} \twoheadrightarrow G)$, $\Gamma := \ker(\pi \twoheadrightarrow G)$ とおくと、包含写像 $\Gamma \hookrightarrow B$ は副有限完備化の同型 $\widehat{\Gamma} \overset{\cong}{\to} B$ を導く。

証明. 群 π の指数有限正規部分群の全体 $\mathcal{P}$ は、包含と逆向きの向きについて可算有向集合である。実際、$P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ を取ると $P_1 \cap P_2 \in \mathcal{P}$ である。

いま Γ は π の指数有限な正規部分群である。Γ の指数有限正規部分群の全体を $\mathcal{G}$ と置く。$\mathcal{P}' := \mathcal{G} \cap \mathcal{P}$ と置く。$\mathcal{P}$ の任意の元 P に対して $P' \subset P$ なる $P' \in \mathcal{P}'$ が存在する。実際、$P' = P \cap \Gamma$ とすれば良い。また $\mathcal{G}$ の任意の元 P に対して $P' \subset P$ なる $P' \in \mathcal{P}'$ が存在する。実際、P の π 共役の全体の交わりを P' とすれば良い。これらより、$\varprojlim_{P \in \mathcal{P}'} \Gamma/P \cong \varprojlim_{P \in \mathcal{G}} \Gamma/P = \widehat{\Gamma}$、また $\varprojlim_{P \in \mathcal{P}'} \pi/P \cong \varprojlim_{P \in \mathcal{P}} \pi/P = \widehat{\pi}$ という自然な同型がある。各 $P \in \mathcal{P}'$ に対して $\Gamma/P = \ker(\pi/P \twoheadrightarrow G)$ なので自然な同型 $\widehat{\Gamma} \overset{\cong}{\to} B$ がある。■

注 4.2 補題4.1によって、基本群の副有限完備化と有限次被覆のホモロジー群の torsion との関係が説明される: 2つの結び目群 π, π' および完備化上の同型 $\widehat{\pi}' \overset{\cong}{\to} \widehat{\pi}$、また有限群への全射 $\pi \twoheadrightarrow G$ があったとする。導かれる全射 $\pi \hookrightarrow \widehat{\pi} \twoheadrightarrow G$ と $\pi' \hookrightarrow \widehat{\pi}' \overset{\cong}{\to} \widehat{\pi} \twoheadrightarrow G$ に対応する被覆 $X_G \to S^3 - J$ と $Y_G \to S^3 - K$ を考える。すると同型 $\widehat{\pi}_1(X_G) \overset{\cong}{\to} \widehat{\pi}_1(Y_G)$ が導かれる。ここで副有限完備化と abel 化は可換であり、また有限生成 abel 群に対して副有限完備化は $\mathbb{Z}$-torsion を保つので、$\mathbb{Z}$-torsion 上の同型 $H_1(X_G)_{\mathrm{tor}} \overset{\cong}{\to} H_1(Y_G)_{\mathrm{tor}}$ が導かれる。

これより特に、結び目群の完備環上の表現に付随する有限次被覆の逆系を考えた時、その1次ホモロジー群の $\mathbb{Z}$-torsion たちは、$\widehat{\pi}$ から決まる。なので、非アーベル被覆に付随する不変量についても、副有限剛性を議論することが可能と見られる。

さて次に、定理の証明を与えるために、完備 Alexander 加群たちの間に完備群環 $\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ 上の加群としての同型を導き、イデアルの等式を得る:

補題 4.3 J, K を S^3 内の結び目とし、結び目群の副有限完備化上の同型 $\varphi : \widehat{\pi}_1(S^3 - J) \overset{\cong}{\to} \widehat{\pi}_1(S^3 - K)$ が与えられていたとする。このとき、ある $\widehat{\mathbb{Z}}$ の単数 v があって $\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ のイデアルとして $(\Delta_J(t^v)) = (\Delta_K(t))$ である。

証明. まず J,K の補空間の基本群の Abel 化の元として J,K のメリディアンを取り s,t と書く。すると $\pi_1(S^3-J)^{\mathrm{ab}}=s^{\mathbb{Z}}$, $\pi_1(S^3-K)^{\mathrm{ab}}=t^{\mathbb{Z}}$ である。また Abel 化と副有限完備化は可換なので、完備基本群の同型が導く同型 $\varphi:\widehat{\pi}_1(S^3-J)^{\mathrm{ab}}\overset{\cong}{\to}\widehat{\pi}_1(S^3-K)^{\mathrm{ab}}$ がある。$\widehat{\pi}_1(S^3-J)^{\mathrm{ab}}=s^{\widehat{\mathbb{Z}}}$, $\widehat{\pi}_1(S^3-K)^{\mathrm{ab}}=t^{\widehat{\mathbb{Z}}}$ である。φ による t の逆像 $\varphi^{-1}(t)$ をまた t と書くと、$s=t^v$ なる $\widehat{\mathbb{Z}}$ の単数 v がある。

次に各 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 被覆 $X_n\to S^3-J$, $Y_n\to S^3-K$ を考える。またその Fox 完備化を $M_n\to S^3$, $N_n\to S^3$ とする ([Fox57])。いま同型 $\widehat{\pi}_1(S^3-J)^{\mathrm{ab}}\overset{\cong}{\to}\widehat{\mathbb{Z}}; s\mapsto v$ と $\widehat{\pi}_1(S^3-K)^{\mathrm{ab}}\overset{\cong}{\to}\widehat{\mathbb{Z}}; t\mapsto 1$、及び完備基本群上の同型が導く同型 φ は次の可換図式をなす:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\pi}_1(S^3-J) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\varphi"', "\cong"] & \widehat{\pi}_1(S^3-J)^{\mathrm{ab}} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\varphi"', "\cong"] & \widehat{\mathbb{Z}} \arrow[d, equal] \\
\widehat{\pi}_1(S^3-K) \arrow[r, two heads] & \widehat{\pi}_1(S^3-K)^{\mathrm{ab}} \arrow[r, "\cong"] & \widehat{\mathbb{Z}}
\end{tikzcd}$$

一行目と自然な射影 $\widehat{\mathbb{Z}}\twoheadrightarrow\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の合成を考えると、補題 4.1 により自然な同型 $\widehat{\pi}_1(X_n)\cong\ker(\widehat{\pi}_1(S^3-J)\to\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ がある。Hurewicz 同型、Mayer–Vietoris 完全列、および Wang 完全列が導く、良く知られた自然な同型 $\widehat{\pi}_1(X_n)^{\mathrm{ab}}\cong\widehat{H}_1(X_n)$ および完全列 $0\to s^{n\widehat{\mathbb{Z}}}\to\widehat{H}_1(X_n)\to\widehat{H}_1(M_n)\to 0$ がある。ここに共役作用が導く s の自然な作用があって $\widehat{H}_1(M_n)\cong\widehat{H}_1(X_n)/s^{n\widehat{\mathbb{Z}}}$ は $\widehat{\mathbb{Z}}[s^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$ 加群となる。同様にして、$\widehat{H}_1(N_n)$ は $\widehat{\mathbb{Z}}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$ 加群となる。

いま各 n に対し同型 $\widehat{\pi}_1(S^3-J)\cong\widehat{\pi}_1(S^3-K)\twoheadrightarrow\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ がある。よって注意 4.2 の議論によって、補題 4.1 から同型 $\widehat{\pi}_1(X_n)\cong\widehat{\pi}_1(Y_n)$ を得る。アーベル化と副有限完備化は可換なので、Hurewicz 同型から $\widehat{H}_1(X_n)\cong\widehat{H}_1(Y_n)$ を得る。同型 $s^{n\widehat{\mathbb{Z}}}\cong t^{n\widehat{\mathbb{Z}}}$ は他の同型と可換であるから、群としての自然な同型 $\varphi:\widehat{H}_1(M_n)\cong\widehat{H}_1(X_n)/s^{n\widehat{\mathbb{Z}}}\overset{\cong}{\to}\widehat{H}_1(Y_n)/t^{n\widehat{\mathbb{Z}}}\cong\widehat{H}_1(N_n)$ を得る。

導かれる同型 $\varphi:s^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\overset{\cong}{\to}t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}; s\mapsto t^{v \bmod n}$ によって、$s^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ 加群 $\widehat{H}_1(M_n)$ を $\widehat{\mathbb{Z}}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$ 加群と見る。このとき、導かれる群同型 $\varphi:\widehat{H}_1(M_n)\overset{\cong}{\to}\widehat{H}_1(N_n)$ が $t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ 同変であることを確かめよう。横向きの完全列と導かれる同型が成す次のような可換図式があることに留意しておく:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_n(J) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"', "\cong"] & \widehat{\pi}_1(S^3-J) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"', "\cong"] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_n(K) \arrow[r] & \widehat{\pi}_1(S^3-K) \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

$s^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ と $t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ の作用は元の持ち上げの共役作用によって定義されるのだった。群の元 a,b に対して $a^b:=b^{-1}ab$ と書く。完備基本群の同型が導く同型 $\varphi:\widehat{\pi}_1(X_n)\overset{\cong}{\to}\widehat{\pi}_1(Y_n)$ を考える。$\widehat{H}_1(M_n)$ の元の $\widehat{\pi}_1(X_n)\subset\widehat{\pi}_1(S^3-J)$ への持ち上げ x,y と $\widehat{\pi}_1(S^3-K)^{\mathrm{ab}}$ の元の $\widehat{\pi}_1(S^3-J)$ への持ち上げ $\varphi^{-1}(r),\varphi^{-1}(u)$（$r,u\in\widehat{\pi}_1(S^3-K)$ とする）に対して、$\varphi(x^{\varphi^{-1}(r)}y^{\varphi^{-1}(u)})=\varphi(x)^r\varphi(y)^u$ である。これより、$\bar{x},\bar{y}\in\widehat{H}_1(M_n)$ と $\bar{r},\bar{u}\in t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ に対して $\varphi(\bar{r}\bar{x}+\bar{u}\bar{y})=\bar{r}\varphi(\bar{x})+\bar{u}\varphi(\bar{y})$ である。以上により $\varphi:\widehat{H}_1(M_n)\overset{\cong}{\to}\widehat{H}_1(N_n)$ は $\widehat{\mathbb{Z}}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$ 加群の同型である。

ところで、$\mathbb{Z}$ 被覆 $X_\infty\to S^3-J$ について Alexander 加群 $H_1(X_\infty)$ は有限生成 $\mathbb{Z}[s^{\mathbb{Z}}]$ 加群であり、その Fitting ideal は $\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[s^{\mathbb{Z}}]}(H_1(X_\infty))=(\Delta_J(s))\subset\mathbb{Z}[s^{\mathbb{Z}}]$ である。つまり Alexander 加群の有限表示（完全列）$\mathbb{Z}[s^{\mathbb{Z}}]^q\xrightarrow{Q}\mathbb{Z}[s^{\mathbb{Z}}]^q\to H_1(X_\infty)\to 0$ ($q\in\mathbb{N}$, $Q\in$

$\mathrm{M}_q(\mathbb{Z}[s^{\mathbb{Z}}])$があって$(\det Q)=(\Delta_J(s))$ in $\mathbb{Z}[s^{\mathbb{Z}}]$が成り立つ(cf. [Rol90, Corollary 8.C.4])。Wang完全列による$\mathbb{Z}[s^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$加群の同型$H_1(M_n)\cong H_1(X_\infty)/(s^n-1)H_1(X_\infty)$がある。これより各階の表示$\mathbb{Z}[s^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]^q\xrightarrow{Q_n}\mathbb{Z}[s^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]^q\to H_1(M_n)\to 0$, $Q_n=Q\,\mathrm{mod}(s^n-1)\in\mathrm{M}_q(\mathbb{Z}[s^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}])$を得る。よって$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[s^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]}(H_1(M_n))=(\det Q_n)=(\Delta_J(s)\,\mathrm{mod}(s^n-1))$ in $\mathbb{Z}[s^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$である。同様にして$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]}(H_1(N_n))=((\Delta_K(t)\,\mathrm{mod}(t^n-1))$ in $\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$である。

同一視$\widehat{\mathbb{Z}}[s^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]\cong\widehat{\mathbb{Z}}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]; s\mapsto t^{v\,\mathrm{mod}\,n}$を考える。先程の$\widehat{\mathbb{Z}}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$加群の同型$\widehat{H}_1(M_n)\cong\widehat{H}_1(N_n)$から、Fittingイデアルの等式

$$(\Delta_J(s)\,\mathrm{mod}(s^n-1))=(\Delta_J(t^v)\,\mathrm{mod}(t^n-1))=(\Delta_K(t)\,\mathrm{mod}(t^n-1))$$

in $\widehat{\mathbb{Z}}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$を得る。

一般に$f\in\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$に対して自然な同型$(f)\cong\varprojlim_n(f\,\mathrm{mod}(t^n-1))$がある。実際、各$n$に対して、$K_n$を自然な全射の制限$\mathrm{mod}(t^n-1):(f)\twoheadrightarrow(f\,\mathrm{mod}(t^n-1))$のKernelとする。$n$は順序集合$\mathbb{N}':=\{m!\mid m\in\mathbb{N}\}$を走るとして良い。このとき逆系$\{K_n\}_n$は全射逆系ゆえ、Mittag–Leffler条件を満たし、よって$\varprojlim^1_n K_n=0$である。また$\varprojlim_n K_n=0$であるから、期待の同型を得る(e.g. [Jan88, Section 1])。

よってFittingイデアルの等式においてnについての逆極限を取ると、完備群環$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$のイデアルの等式$(\Delta_J(t^v))=(\Delta_K(t))$を得る。■

以下の議論は定理の証明には必要ないが、補題4.3に解釈を与える。補題4.3の記号のもと、結び目$J\subset S^3$の完備Alexander加群を$\mathcal{H}_J:=\varprojlim\widehat{H}_1(M_n)$で定める。

補題 4.4 完備Alexander加群$\mathcal{H}_J$は有限生成$\widehat{\mathbb{Z}}[[s^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$加群であり、そのFittingイデアル$\mathrm{Fitt}_{\widehat{\mathbb{Z}}[[s^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]}\mathcal{H}_J$は$(\Delta_J(s))\subset\widehat{\mathbb{Z}}[[s^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$である。

証明. 前補題の証明における記号を用いる。$H_1(M_n)$の$Q_n\in\mathrm{M}_q(\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}])$による有限表示を考える。$\widehat{\mathbb{Z}}$は$\mathbb{Z}$上平坦であるから、$\otimes\widehat{\mathbb{Z}}$は加群の完全列を保つ。よって$\widehat{H}_1(M_n)$の表示$\widehat{\mathbb{Z}}[s^{\mathbb{Z}/n}]^q\xrightarrow{\widehat{Q}_n}\widehat{\mathbb{Z}}[s^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]^q\to\widehat{H}_1(M_n)\to 0$を得る。ここに行列としては$\widehat{Q}_n=Q_n$である。

nは$\mathbb{N}'=\{m!\mid m\in\mathbb{N}\}$を走るとして良い。逆極限を取ると$\widehat{\mathbb{Z}}[[s^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]^q\xrightarrow{\widehat{Q}}\widehat{\mathbb{Z}}[[s^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]^q\to\mathcal{H}_J\to\varprojlim^1_n\mathrm{Ker}\,\widehat{Q}_n$, $\widehat{Q}=(Q_n)_n\in\mathrm{M}_q(\widehat{\mathbb{Z}}[[s^{\widehat{\mathbb{Z}}}]])$という完全列を得る。$\{\mathrm{Ker}\,\widehat{Q}_n\}_n$は全射系なので$\varprojlim^1_n\mathrm{Ker}\,\widehat{Q}_n=0$である。こうして$\mathcal{H}_J$の表示を得る:

$$\widehat{\mathbb{Z}}[[s^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]^q\xrightarrow{\widehat{Q}}\widehat{\mathbb{Z}}[[s^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]^q\to\mathcal{H}_J\to 0.$$

これより特に$\mathcal{H}_J$は有限生成$\widehat{\mathbb{Z}}[[s^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$加群である。(このことは位相的中山の補題を用いて抽象的に示す事もできる。)

いま$(\det Q_n)=(\Delta_J(s)\,\mathrm{mod}(s^n-1))$ in $\widehat{\mathbb{Z}}[s^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}]$なので、$\widehat{\mathbb{Z}}[[s^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$のイデアルの等式$\mathrm{Fitt}_{\widehat{\mathbb{Z}}[[s^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]}\mathcal{H}_J=(\det\widehat{Q})=\varprojlim_n(\det Q_n)=(\Delta_J(s))$を得る。■

同一視$\widehat{\mathbb{Z}}[[s^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]\cong\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]; s\mapsto t^v$によって$\mathcal{H}_J$は$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$加群である。同型$\widehat{H}_1(M_n)\cong\widehat{H}_1(N_n)$は$n$を動かしたときの逆系と整合的なので、完備Alexander加群$\mathcal{H}_J$と$\mathcal{H}_K:=\varprojlim_n\widehat{H}_1(N_n)$の間に$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$加群の同型$\mathcal{H}_J\overset{\cong}{\to}\mathcal{H}_K; t\mapsto t$が導かれる。補題4.3で得られたイデアルの等式は、これらのFittingイデアルの等式である。

5. 定理1.1の証明

定理1.1の証明. Alexander多項式は$\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$の単数倍を除き相反なので、定理は 補題3.6と補題4.3から即座に従う。■

一般に完備基本群の同型$\widehat{\pi}_1(S^3-J)\to\widehat{\pi}_1(S^3-K)$が与えられていたとき、これを取り替えて$J$のメリディアンを$K$のメリディアンに送るような射を得られるとは限らない。また相反多項式$g(t)\in\mathbb{Z}[t]$と$\widehat{\mathbb{Z}}$の単数vに対して、$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$のイデアルの等式$(g(t))=(g(t^v))$が成り立つとは限らない。そのためSection 4で言えるのは補題4.3のような主張に留まる。また、これらが成り立つ場合についても、多項式が決まることを言うには、Section 3で行った代数的議論が必要である。

6. 捻れAlexander多項式と定理6.1

以後、Noether一意分解整域（以後UFDと書く）Oを固定する。本章では、結び目群の$\mathrm{GL}_n(O)$表現に付随する捻れAlexander多項式について、副有限剛性の問題（定理1.1の拡張）を考察する:

問題　Kを結び目とする。結び目群π_KのNoether UFD O上の表現$\rho:\pi_K\to\mathrm{GL}_n(O)$に付随する捻れAlexander多項式$\Delta_{K,\rho}(t)$は、$\rho$が導く副有限完備化上の連続表現$\widehat{\rho}:\widehat{\pi}_K\to\mathrm{GL}_n(\widehat{O})$から（抽象的に）復元できるか？

これは次のようにも言い換えられる:

問題　結び目Kが動くとき、結び目群の表現$\rho:\pi_K\to\mathrm{GL}_n(O)$の共役類・同型類の全体を$\mathcal{R}$、このような$(K,\rho)$に付随する捻れAlexander多項式$\Delta_{K,\rho}(t)$の全体（$O[t^{\mathbb{Z}}]$の元を単数倍で同一視したもの）を$\mathcal{P}$、また$\rho$から導かれる副有限完備化上の連続表現$\widehat{\rho}:\widehat{\pi}_K\to\mathrm{GL}_n(\widehat{O})$の共役類・同型類の全体を$\widehat{\mathcal{R}}$する。このとき対応$\mathcal{F}:\mathcal{R}\to\mathcal{P}:(\rho:\pi_K\to\mathrm{GL}_n(O))\mapsto\Delta_{\rho,K}(t)$は、副有限完備化 $\widehat{\ }:\mathcal{R}\to\widehat{\mathcal{R}};\rho\mapsto\widehat{\rho}$を経由するか？

特にOが代数体FのS整数環と呼ばれる$\mathbb{C}$の部分環$O_{F,S}$である場合を考える。なぜなら、$\widehat{\mathbb{C}}=\{0\}$であるのに対し$\widehat{O}_{F,S}$は十分に大きく、また多くの$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$表現が$\mathrm{GL}_n(O_{F,S})$表現と見られるからである。諸々の定義は次節以降に詳しく述べる。結果は上の問題を適当に制限する形で与えられる:

定理 6.1　Fを代数体、SをFの整数環の素イデアルの有限集合、$O=O_{F,S}$をFのS整数環かつUFDとする。$O=O_{F,S}$とし、結び目群の$\mathrm{GL}_n(O)$表現ρを考える。

(1) $\Delta_{K,\rho}(t)$が相反多項式のとき、各根への$F/\mathbb{Q}$の共役作用を除き、$\widehat{\rho}$から$\Delta_{K,\rho}(t)$が決まる。

(2) $\Delta_{K,\rho}(t)$の最小分解体に含まれる最大の円分拡大を$\mathbb{Q}(\zeta_n)$とするとき、有限個を除く$n|(p-1)$なる素数pに対し、$\Delta_{K,\rho}(t)$の根は1の$p-1$乗根倍を除き決まる。

(3) 環$O[t]$において分解する円分多項式の因子を$\Delta_{K,\rho}(t)$が部分的に持つ時、避けられない不定性が生じる。

表現ρがSL_2値の時や、より一般にρが自身の双対と共役である場合には、$\Delta_{K,\rho}(t)$は相反多項式であることが知られている([Hil12])。$\Delta_{K,\rho}(t)$が相反多項式と限らない場合についても、体の拡大のノルム写像$\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}}$による像と[Hil05]の結果を併せれば、(1)についての拡張が可能である。(1), (2)はいずれも各根ごとの不定性を述べているが、多項式の係数がOに入るという条件と併せると、不定性を狭めることができる。

ちなみに、幾何的に意味のある表現$\widehat{\rho}:\widehat{\pi}_K \to \mathrm{GL}_n(\widehat{O})$が直に与えられるような状況や、幾何的な意味のある表現を2つの結び目群（の副有限完備化）が共有する状況があれば興味深いが、現時点では著者は知らない。

議論は以下の要領で行う。

- ρから$\widehat{\rho}$が導かれること（副有限完備化の普遍性, [RZ10, Lemma 3.2.1]）。
- 捻れAlexander多項式が群ホモロジーの言葉で書けること（[FV11a]）。
- $\widehat{\pi}$の連続群ホモロジーと、πの捻れAlexander加群の副有限完備化とが、完備群環$\widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$上の加群として同型であること（[RZ10, Proposition 6.5.7]）。

ここから、次の問題を考えれば良いことが分かる: 「多項式$f(t), g(t) \in O[t^{\mathbb{Z}}]$と単数$v \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$に対して、完備群環$\widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$のイデアルの等式$(f(t)) = (g(t^v))$があるならば、$O[t^{\mathbb{Z}}]$の単数倍を除き$f(t) = g(t)$であるか？」

[BF15]が依拠していたFriedの命題（命題3.1）の証明はAlexander多項式が$\mathbb{R}$係数であることを本質的に用いているため、新たな議論が必要となる。

なお結び目群の$\mathrm{GL}_n(O_{F,S})$表現に付随する捻れAlexander多項式の巡回終結式と巡回被覆の捻れホモロジー群の位数との関係（Foxの公式の拡張）が丹下氏によって証明されている（[Ryo17], 同報告集の丹下氏の記事も参照のこと）。本稿では行わないが、O係数多項式の巡回終結式を係数に持つ母関数（Artin–Mazurの力学系ゼータ関数）の解析接続を考察することなども興味深いと思われる。

7. $\mathrm{GL}_n(O_{F,S})$表現の副有限完備化

前章までに引き続き、有理数体$\mathbb{Q}$の代数閉包$\overline{\mathbb{Q}}$を固定し、$\mathbb{Q}$の有限次拡大は$\overline{\mathbb{Q}}$の部分体と考える。本稿では代数体Fといったら、$\mathbb{Q}$の有限次拡大であって$\overline{\mathbb{Q}}$に埋め込まれているものとする。代数体Fの整数環O_Fを考える。SをO_Fの素イデアル有限個からなる集合とする。O_FにSの逆元を添加して得られる$\overline{\mathbb{Q}}$の部分環$O_{F,S}$を、FのS整数環という。これはDedekind整域であり、よって特にNoether整域である。O_Fのイデアル類群を生成する有限個の素イデアルの族をSに入れておけば、$O_{F,S}$はUFDとなる。

例えばMostow剛性の帰結として、双曲結び目のホロノミー表現は、あるF, Sに対して$\mathrm{SL}_2(O_{F,S})$表現と見られることが知られている（[CS83]）。

一般に、Noether整域Oの副有限完備化$\widehat{O}$とは、Oの有限商環O/Iの全体がなす逆系の逆極限に、自然な位相を備えた位相環である。位相群$\mathrm{GL}_n(\widehat{O}) = \varprojlim_I \mathrm{GL}_n(O/I)$は、$\mathrm{GL}_n(O)$の副有限完備化とは異なる副有限群であることに注意しておく。

離散群πのNoether環O上の表現$\rho:\pi \to \mathrm{GL}_n(O)$を考える。すると自然な射$O \to \widehat{O}$が連続準同型$\rho:\pi \to \mathrm{GL}_n(\widehat{O})$を導く。ここで次の補題に注意すると、$\rho$は連続準同型$\widehat{\rho}:\widehat{\pi} \to \mathrm{GL}_n(\widehat{O})$に持ち上がる。

補題 7.1 (副有限完備化の普遍性, [RZ10, Lemma 3.2.1]) 離散群πの副有限完備化$\widehat{\pi}$への自然な連続準同型$\iota:\pi \hookrightarrow \widehat{\pi}$は稠密な像を持ち、任意の副有限群$H$への連続準同型$\psi:\widehat{\pi} \to H$は$\iota$を経由する、つまりある$\overline{\psi}:\widehat{\pi} \to H$があって$\psi = \overline{\psi} \circ \iota$となる。

特にπが結び目群で$O = O_{F,S}$のとき、πは剰余有限であり自然な単射$\pi \hookrightarrow \widehat{\pi}$があるから、自然な写像$\mathrm{Hom}(\pi, \mathrm{GL}_n(O)) \to \mathrm{Hom}(\widehat{\pi}, \mathrm{GL}_n(\widehat{O})); \rho \mapsto \widehat{\rho}$もまた単射である。

8. 捻れ Alexander 多項式の定義

結び目群 $\pi = \pi_K$ の、Noether 環 O 上の表現 $\rho : \pi \to \mathrm{GL}_n(O)$ を考える。加群 O^n を ρ の転置によって右 π 加群と見たものを V_ρ と書く。アーベル化の射 $\alpha : \pi \to \pi^{\mathrm{ab}}$ を取る。$\pi^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}$ なので、その生成元 t を取り、$\pi^{\mathrm{ab}} = t^{\mathbb{Z}}$ と書く。$\Gamma := \ker\alpha$ が ρ の制限によって V_ρ に作用する。群の係数付きホモロジー $H_i(\Gamma, V_\rho)$ を考える。これは F を $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}[\Gamma]$ 上の射影分解としたとき、複体 $F \otimes_\Gamma V_\rho$ のホモロジーとして定義される。π の Γ への共役作用は、$\pi^{\mathrm{ab}} = t^{\mathbb{Z}} \cong \pi/\Gamma$ の $H_i(\Gamma, V_\rho)$ への作用を導く（[Bro94, Chapter III, Corollary 8.2]）。結び目補空間 $X = S^3 - K$ が $K(\pi, 1)$ 空間であること、その $\mathbb{Z}$ 被覆 $X_\infty \to X$ が Γ に対応していること、局所係数付きホモロジーとの同型 $H_i(\Gamma, V_\rho) \cong H_i(X_\infty, V_\rho)$ があることから、$H_i(\Gamma, V_\rho)$ は有限生成 $O[t^{\mathbb{Z}}]$ 加群である。

O が UFD のとき、有限生成 $O[t^{\mathbb{Z}}]$ 加群に対し、その Fitting イデアルを含む最小の単項生成イデアルがある。それを order イデアルと呼び、その生成元を order と呼ぶ。これは $O[t^{\mathbb{Z}}]$ の単数倍を除き決まる。なお、もし O が PID ならば、order イデアルは Fitting イデアルに一致する。

いま $O[t^{\mathbb{Z}}]$ 加群 $H_i(\Gamma, V_\rho)$ の order を $\Delta_i(t)$ とするとき、

$$\Delta_{K,\rho}(t) := \Delta_1(t)/\Delta_0(t)$$

を、ρ に付随する K の捻れ Alexander 多項式と（普通は）言う。$\Delta_{K,\rho}(t)$ は $O[t^{\mathbb{Z}}]$ の分数環 $\mathrm{fr}(O[t^{\mathbb{Z}}])$ の元であるが、これも $O[t^{\mathbb{Z}}]$ の単数倍を除き決まる。群の表示が与えられていた時、この多項式は Fox 自由微分を用いて具体的に計算可能である（cf. [FV11a]）。

本稿では簡単のため、上の $\Delta_1(t)$ のことを捻れ Alexander と呼び $\Delta_{K,\rho}(t)$ と書き、これについて定理 6.1 の証明を与えることにする。

9. 連続ホモロジーと副有限完備化

群環 $O[t^{\mathbb{Z}}]$ から副有限完備化によって得られる完備群環 $\widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ を考える。ここでは、$\widehat{\Gamma}$ の係数付き連続ホモロジーが Γ のそれの商の逆極限と同型であり、よって完備群環 $\widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ 上の有限生成加群となることを見る。

$\widehat{O}^n$ を $\widehat{\rho}$ の転置によって右 $\widehat{\pi}$ 加群と見たものを $V_{\widehat{\rho}}$ と書く。副有限群 $\widehat{\Gamma}$ の完備加群 $V_{\widehat{\rho}}$ 係数ホモロジーは、$\widehat{\mathbb{Z}}$ の完備群環 $\widehat{\mathbb{Z}}[[\widehat{\Gamma}]]$ 上の連続射影分解 $\widehat{F}$ を取った時、完備テンソル $\widehat{F}\widehat{\otimes}_{\widehat{\Gamma}} V_{\widehat{\rho}}$ の連続ホモロジーとして定義される。G が有限離散群で B が有限環のとき、連続群ホモロジー $H_i(G, B)$ は通常の群ホモロジーと一致する。

一般に、有向集合 J で添字付けられた副有限群の逆系 $(G_j)_{j\in J}$ と副有限アーベル群の逆系 $(B_j)_{j\in J}$ に対して $G = \varprojlim G_j$, $B = \varprojlim_j B_j$ のとき、各 $i \geq 0$ に対して $H_i(G, B) \cong \varprojlim_j H_i(G_j, B_j)$ である（[RZ10, Proposition 6.5.7]）。

いま Γ の指数有限正規部分群 G の全体と O の指数有限イデアル I の全体はそれぞれ包含について有向集合であるから、上の命題を 2 度用いることで、次の同型を得る:

$$H_i(\widehat{\Gamma}, V_{\widehat{\rho}}) \cong \varprojlim_{G \lhd \Gamma} H_i(\Gamma/G, V_{\widehat{\rho}}) \cong \varprojlim_{G \lhd \Gamma} \varprojlim_{I} H_i(\Gamma/G, V_{\rho \bmod I}).$$

ここで各 $H_i(\Gamma/G, V_{\rho \bmod I})$ は 1 つの有限生成 $O[t^{\mathbb{Z}}]$ 加群 $H_i(\Gamma, V_\rho)$ の商であるから、$H_i(\widehat{\Gamma}, V_{\widehat{\rho}})$ は有限生成 $\widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ 加群となる。

10. 定理6.1の証明

10.1. 準備

我々の目標は結び目群表現の副有限完備化$\widehat{\rho}:\widehat{\pi}\to \mathrm{GL}_n(\widehat{O})$から$\Delta_{K,\rho}(t)$を復元することであった。

群のアーベル化と副有限完備化は可換なので、$\widehat{\pi}$の勝手なアーベル化$\beta:\widehat{\pi}\to\widehat{\pi}^{\mathrm{ab}}\cong\widehat{\mathbb{Z}}$について、$\widehat{\Gamma}=\ker(\widehat{\beta})$となる。$\widehat{\pi}^{\mathrm{ab}}$の生成元を勝手に取り$s$とすると、ある単数$v\in\widehat{\mathbb{Z}}^*$があって$t=s^v$である。$\widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]=\widehat{O}[[s^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$なので、$H_i(\widehat{\Gamma},V_{\widehat{\rho}})$は有限生成$\widehat{O}[[s^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$であり、order イデアルは$(\Delta_i(s^v))$となる。よって次が問題となる:

多項式$g(t)\in O[t^{\mathbb{Z}}]$とある単数$v'\in\widehat{\mathbb{Z}}^*$に対して$(\Delta_i(s^v))=(g(s^{v'}))$という$\widehat{O}[[s^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$のイデアルの等式があれば、$O[t^{\mathbb{Z}}]$の単数倍を除き$\Delta_i(t)=g(t)$であるか？

s^vとv'/vをsとvで置き換えれば、結局次の問題に答えれば良いことが分かる:

問題　多項式$f(t),g(t)\in O[t^{\mathbb{Z}}]$と単数$v\in\widehat{\mathbb{Z}}^*$に対して、完備群環$\widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$のイデアルの等式$(f(t))=(g(t^v))$があるならば、$O[t^{\mathbb{Z}}]$の単数倍を除き$f(t)=g(t)$であるか？

10.2. 定理6.1(1)の証明

有限次拡大$F/\mathbb{Q}$のノルム写像$\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}}:F\to\mathbb{Q}$を考える。これは体の埋め込み$\sigma:F\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}$が走る時$x\mapsto\prod_\sigma\sigma(x)$で与えられる写像であり、$x\in\mathbb{Q}$に対しては拡大字数$[F:\mathbb{Q}]$を用いて$\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}}\,x=x^{[F:\mathbb{Q}]}$となる。この整数環への制限$\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}}:O_F\to\mathbb{Z}$がある。また$S$を整数環$O_F$の素イデアルの有限集合とし、その下にある$\mathbb{Z}$の素数の全体も$S$と書くと、$\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}}:O_{F,S}\to\mathbb{Z}_S$という制限もある。さらに$O=O_{F,S}$係数の群環（ローラン多項式環）の元$f(t)\in O[t^{\mathbb{Z}}]\subset F[t^{\mathbb{Z}}]$に対し、係数に$\sigma$を作用させたものを$f^\sigma(t)$と書くと、$\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}}:O[t^{\mathbb{Z}}]\to\mathbb{Z}_S[t^{\mathbb{Z}}];f(t)\mapsto\prod_\sigma f^\sigma(t)$なる写像が考えられる。これらは有理関数体の分離拡大に対する通常のノルム写像の制限とも見られる。さらには$\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}}:\widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]\to\widehat{\mathbb{Z}}_S[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$なる写像も考えられる。

定理6.1(1)の証明. いま$f(t),g(t)\in O[t^{\mathbb{Z}}]$および$v\in\widehat{\mathbb{Z}}^*$に対し$(f(t))=(g(t^v))$という$\widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$のイデアルの等式があったとする。$F(t)=\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}}\,f(t),G(t)=\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}}\,g(t)\in\mathbb{Z}_S[t]$に対して$(F(t))=(G(t^v))$という$\widehat{\mathbb{Z}}_S[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$のイデアルの等式が得られる。$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]\hookrightarrow\widehat{\mathbb{Z}}_S[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$による逆像を考えると、適当な$S$元倍を除いて$(F(t))=(G(t^v))$という$\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$のイデアルの等式が得られる。

ここで$f(t)$と$g(t)$が相反多項式であったと仮定と、補題3.6から、$\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$の単数倍を除いた等式$F(t)=G(t)$が得られる。よって根ごとの$F/\mathbb{Q}$共役を除き$f(t)$と$g(t)$が一致する。以上によって定理6.1(1)が示された。 ■

10.3. 定理6.1(2)の証明

定理6.1(2)の証明には代数的整数論を援用する。議論をself-containedに近付けるため、[Mor12]に述べられている定義や事実、および一昨年度の同報告集の記事[Uek15]（[Uek17a]の邦訳を含む）の内容のみを用いることにする。次の2つの命題を用いて定理を証明する。命題の証明は次節に与える。

各素数pに対し埋め込み$\overline{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\mathbb{C}_p$を固定しておく。

命題 10.1　各$0\neq\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}$に対し、$\mathbb{Q}(\alpha)$の正規包に含まれる最小の円分体を$\mathbb{Q}(\zeta_n)$とする。有限個の素数$p$を除き、$n|(p-1)$なる全ての素数$p$に対して、$\alpha\in\mathbb{Q}_p$である。また$|\alpha|_p=1$かつ$|\alpha^{p-1}-1|<1$となる。

命題 10.2 $O = O_{F,S}$ とする。未知の多項式 $f(t) \in O[t^{\mathbb{Z}}]$ によって生成されている完備群環 $\widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ のイデアル $(f(t))$ が与えられたとき、各 $m \in \mathbb{N}$ に対し、$f(t)$ の根 $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ であって $|\alpha^m|_p < 1$ なるものに対する α^m の値の全体を、重複度込みで特定できる。

定理 6.1(2) の証明. ある $f(t) \in O[t]$ によって生成されている $\widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ のイデアル $(f(t))$ が与えられてたとする。$f(t)$ の最小分解体に含まれる最大の円分体を $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ とすると、$n|(p-1)$ なるほとんど全ての p に対し、全ての根が $|\alpha^n - 1|_p < 1$ となる。よって根の n 乗の全体が重複度込みで決定される。■

命題 10.2 において m を動かして $|\alpha^m|_p < 1$ なる α^m たちの族を観察することで、より詳しい情報を取り出すことができる可能性があるが、現時点では良い定式化を見出していない。この探索に関連して注を述べる:

注 10.3 各 $(\alpha_i)_i \in \mathbb{Q}^d$ に対し添字の取替に関する同一視を考え、その商を $A = [\alpha_i]_i \in [\mathbb{Q}^d] := \mathbb{Q}^d/\mathfrak{S}_d$ のように書く。各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し $A^n = [\alpha_i^n]_i \in [\mathbb{Q}^d]$ が well-defined である。

いま $m, n \in \mathbb{Z},\ A, B \in [\mathbb{Q}^d]$ とする。もし $A^m = B^m$ かつ $A^n = B^n$ ならば、$g = \gcd(m,n)$ に対し $A^g = B^g$ である、とはいえない。実際、1 の原始 12 乗根 $\zeta = \zeta_{12}$ を取り $A = [\zeta, \zeta^8], B = [\zeta^4, \zeta^5]$ とすると、$A^3 = B^3 = [1, \zeta^3], A^4 = B^4 = [\zeta^4, \zeta^8]$ となる。

$A = [\alpha_i]_i$ に対し p 毎に $A^{m(p)}$ が与えられたとき「ある程度 A の候補を絞れる」という形の命題があると欲しい。何か良い方策はないか？

10.4. 命題 10.1, 10.2 の証明

援用する基本的な事実を列挙してから命題の証明を述べる。

補題 10.4 (1) $\mathbb{Q}_p$ は p 素な各 n に対して同型を除き一意な不分岐 n 次拡大を持ちそれは巡回拡大である。そのガロア群はフロベニウスによって生成され、剰余体の拡大のガロア群と同型である。

(2) 有限体 $\mathbb{F}_p$ の n 次拡大は各 n に対し唯一でそれは巡回拡大である。

(3) p 素な n に対し 1 の原始 n 乗根を 1 つ取り ζ_n とすると $\mathbb{Q}_p(\zeta_n)/\mathbb{Q}_p$ は不分岐巡回拡大であり、フロベニウスは $\zeta_n \mapsto \zeta_n^p$ で与えられる。

(4) 有限次拡大 $F/\mathbb{Q}$ において分岐する素数 p は有限個で、分岐する条件は $F/\mathbb{Q}$ の判別式 d_F を p が割ることである。

命題 10.1 の証明. 以下では $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ に対し $\mathbb{Q}((\alpha))$ で $\mathbb{Q}(\alpha)$ の正規包（最小多項式の最小分解体）を表す。また $\mathbb{Q}_p$ と $\mathbb{Q}((\alpha))$ の合成体を $\mathbb{Q}_p((\alpha)) = \mathbb{Q}_p\mathbb{Q}((\alpha))$ と書く。$\mathbb{Q}((\alpha))/\mathbb{Q}$ で分岐する有限個の p を除いて考える。$\mathbb{Q}_p((\alpha))$ の剰余体を $\mathbb{F}_q$ とする。$M = \mathbb{Q}((\alpha)) \cap \mathbb{Q}_p$ とすると $\mathbb{Q}((\alpha))/M$ は Galois 拡大で $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}((\alpha))/M) = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p((\alpha))/\mathbb{Q}_p)$ である。

実際、$\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ によって決まる (p) 上の素イデアル P の分解群 $D < \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}((\alpha))/\mathbb{Q})$ を考える。D の $\mathbb{Q}((\alpha))/\mathbb{Q}$ への作用は $\mathbb{Q}_p((\alpha))/\mathbb{Q}_p$ への連続作用を定め、群準同型 $D \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p((\alpha))/\mathbb{Q}_p)$ を得る。$\mathbb{Q}((\alpha)) \subset \mathbb{Q}_p((\alpha))$ ゆえこれは単射である。逆に制限によって $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p((\alpha))/\mathbb{Q}_p)$ は $\mathbb{Q}((\alpha))$ に作用し群準同型 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p((\alpha))/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}((\alpha))/\mathbb{Q})$ を得る。$\mathbb{Q}_p((\alpha))$ において $\mathbb{Q}((\alpha))$ は稠密なのでこれも単射である。p 進付値の延長の一意性からこの像の各元は $\mathbb{Q}_p((\alpha))$ での p 進付値を保つので D に含まれる。構成から $D \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p((\alpha)) \to D$ は恒等写像でありかつ何れも単射であるため、これらは互いに逆写像である。よって同型 $D \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p((\alpha))/\mathbb{Q}_p)$ が得られた。これより $\mathbb{Q}_p((\alpha))^D \subset$

$\mathbb{Q}((\alpha))\cap\mathbb{Q}_p$ である。$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p((\alpha))/\mathbb{Q}_p)\to\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}((\alpha))/\mathbb{Q})$ の像が D であることから $\mathbb{Q}((\alpha))\cap\mathbb{Q}_p\subset\mathbb{Q}_p((\alpha))^D$ となる。

よって自然な単射 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p((\alpha))/\mathbb{Q}_p)\to\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}((\alpha))/\mathbb{Q})$ があり、$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p((\alpha))/\mathbb{Q}_p)$ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}((\alpha))/\mathbb{Q})$ の指数有限な巡回部分群と同型である。また p が不分岐なので $\mathbb{Q}_p((\alpha))/\mathbb{Q}_p$ の惰性群が自明で、同型 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p((\alpha))/\mathbb{Q}_p)\cong\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)$ がある。よって $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p((\alpha))/\mathbb{Q}_p)$ は巡回群である。単射 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p((\alpha))/\mathbb{Q}_p)\to\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}((\alpha))/\mathbb{Q})$ があるのである p 素な m および1の原始 m 乗根があって $\mathbb{Q}_p((\alpha)=\mathbb{Q}_p(\zeta_m)$ であり、かつ $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*\cong\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})\cong\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}((\alpha))/M)\cong\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p((\alpha))/\mathbb{Q}_p)\cong\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)$ となる。$\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p$ のフロベニウス写像は、$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ における p 倍写像の像なので、もし $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ において $p\equiv 1$ であるならば自明となる。このとき $\mathbb{F}_q=\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Q}_p((\alpha))=\mathbb{Q}_p$, $\alpha\in\mathbb{Q}_p$ となる。

$\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ は1の p 素冪根を添加する拡大である。p 冪根は分岐に関わるので p の取り方によって除かれている。p 素冪根のうち $p-1$ 乗根のみが $\mathbb{Q}_p$ に入り、あとは $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ に寄与する。$\mathbb{Q}((\alpha))$ に1の原始 n 乗根が属するような最大の n を考えると、$m|n$ である。また $\mathbb{Q}_p((\alpha))=\mathbb{Q}_p(\zeta_n)$ である。$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ において $p\equiv 1$ であるならば $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ においてもそうである。よって結論 $\alpha\in\mathbb{Q}_p$ を得る。

さて、Teichmüller リフト $\omega:\mathbb{F}_p\hookrightarrow\mathbb{Q}_p$ を考える。有限個の素数 p を除き $|\alpha|_p=1$ である。このような p,α に対し、$\mathbb{Q}_p\twoheadrightarrow\mathbb{F}_p\hookrightarrow\mathbb{Q}_p$ による α の像 ζ は1の $p-1$ 乗根であり、$|\alpha-\zeta|_p<1$、また $|\alpha^{p-1}-1|_p<1$ となる。■

命題 10.2 の証明. $\mathfrak{p}$ が O の素イデアルを走る時 $\widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]\cong\prod_{\mathfrak{p}}O_{\mathfrak{p}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ なる同型があり、各 $\mathfrak{p}|p$ に対し $\widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]\twoheadrightarrow O_{\mathfrak{p}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]\hookrightarrow\mathbb{C}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ なる射影及び埋め込みがある。ζ を1の非 p 素冪根とすると $\mathbb{C}_p[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]=\mathbb{C}_p[[(t/\zeta)^{\widehat{\mathbb{Z}}}]];t\mapsto t$ なる等式があり、$\widehat{\mathbb{Z}}=\prod_p\mathbb{Z}_p\twoheadrightarrow\mathbb{Z}_p$ が導く全射 $\mathbb{C}_p[[(t/\zeta)^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]\twoheadrightarrow\mathbb{C}_p[[(t/\zeta)^{\mathbb{Z}_p}]]$、および $\mathbb{C}_p[[(t/\zeta)^{\mathbb{Z}_p}]]\overset{\cong}{\to}\mathbb{C}_p[[T]];(t/\zeta)\mapsto 1+T$ なる岩澤同型がある。これによる $(f(t))$ の像は $f(t)$ の $|\alpha-\zeta|_p<1$ なる根のみを情報として保持している。こうして各 $\mathbb{C}_p$ において α に最も近い1の冪根の全体が検出される。しかし $\widehat{\pi}$ から t は $\widehat{\mathbb{Z}}$ の単数乗を除いてしか見つけられないので、この ζ が1の原始 m 乗根であった場合、他の原始 m 乗根と区別がつかない。つまり $|\alpha^m-1|_p<1$ なる m および α^m の値のみが分かることとなる。■

なおここで考えた $\mathbb{Z}_p[[T]]$ のイデアルは、$\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 被覆の岩澤加群の $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 指標による分解を考えたときに現れる直和成分の Fitting イデアルである（cf.[Was97, §13.4]）。

10.5. 定理 6.1 (3) について

最後に定理 6.1 (3) について述べる。環 $O[t]$ において分解する円分多項式 $\Phi_m(t)$ の因子を $\Delta_{K,\rho}(t)$ が部分的に持つ時、不定性が生じる:

例 10.5 $\zeta=\zeta_5$ を1の原始5乗根の一つとする。"$\sin 2\pi/5''$ $:=(\zeta-\zeta^{-1})/2\sqrt{-1}\in O$ のとき、$O[t]$ において $\Phi_5(t)=f(t)g(t)$, $f(t)=(t-\zeta)(t-\zeta^4)$, $g(t)=(t-\zeta^2)(t-\zeta^3)$ と分解する。ある単数 $v\in\widehat{\mathbb{Z}}$ があって $\widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ のイデアルの等式 $(f(t))=(g(t^v))$ が成立つため、この2つは本質的に区別できない。また $\mathrm{mod}(t-\zeta)$ で $f(t)$ と $g(t)$ の像は異なるため、$f(t)$ と $g(t)$ は単数倍で一致することもない。

たとえばメリディアンを特定できず $\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$ 加群の Fitting ideal の生成元が相反多項式でない場合に $\Delta(t)$ と $\Delta(t^{-1})$ を区別することは本質的でない。上の例のような不定性が "意味のある不定性" であるのかどうか、まだ精査が必要に思われる。

謝辞. 講演の機会を下さった組織委員の先生方、研究に当たって有用な示唆や指摘を下さった Oliver Bräunling, Yuichi Hirano, Teruhisa Kadokami, Kensaku Kinjo, Tomoki Mihara, Yasushi Mizusawa, Takayuki Morisawa, Hiroaki Nakamura, Ryoto Tange, Yuji Terashima, Tomohide Terasoma, Lorenzo Traldi, anonymous referees の各氏ら、また様々な研究遂行上の支援を賜った家族・友人たちに感謝を申し上げます。本研究の一部はJSPS科研費（課題番号25-2241）の助成を受けたものです。

参考文献

[AM65] Michael Artin and Barry Mazur. On periodic points. *Ann. of Math. (2)*, 81:82–99, 1965.

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[Asa08] Mamoru Asada. On Galois groups of abelian extensions over maximal cyclotomic fields. *Tohoku Math. J. (2)*, 60(1):135–147, 2008.

[BF15] Michel Boileau and Stefan Friedl. The profinite completion of 3-manifold groups, fiberedness and thurston norm. preprint. arXiv:1505.07799, May 2015.

[BF17] Michel Boileau and Stefan Friedl. Grothendieck rigidity of 3-manifold groups. preprint. arXiv:1710.02746, October 2017.

[BG04] Martin R. Bridson and Fritz J. Grunewald. Grothendieck's problems concerning profinite completions and representations of groups. *Ann. of Math. (2)*, 160(1):359–373, 2004.

[BR15] Martin R. Bridson and Alan W. Reid. Profinite rigidity, fibering, and the figure-eight knot. preprint. arXiv:1505.07886, May 2015.

[Bra17] Oliver Braunling. Torsion homology growth beyond asymptotics. preprint. arXiv:1702.06243, February 2017.

[Bro94] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1982 original.

[BRW16] Martin R. Bridson, Alan W. Reid, and Henry Wilton. Profinite rigidity and surface bundles over the circle. preprint. arXiv:1610.02410, October 2016.

[BV13] Nicolas Bergeron and Akshay Venkatesh. The asymptotic growth of torsion homology for arithmetic groups. *J. Inst. Math. Jussieu*, 12(2):391–447, 2013.

[CS83] Marc Culler and Peter B. Shalen. Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 117(1):109–146, 1983.

[Fox56] Ralph H. Fox. Free differential calculus. III. Subgroups. *Ann. of Math. (2)*, 64:407–419, 1956.

[Fox57] Ralph H. Fox. Covering spaces with singularities. In *A symposium in honor of S. Lefschetz*, pages 243–257. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957.

[Fri88] David Fried. Cyclic resultants of reciprocal polynomials. In *Holomorphic dynamics (Mexico, 1986)*, volume 1345 of *Lecture Notes in Math.*, pages 124–128. Springer, Berlin, 1988.

[Fun13] Louis Funar. Torus bundles not distinguished by TQFT invariants. *Geom. Topol.*, 17(4):2289–2344, 2013. With an appendix by Funar and Andrei Rapinchuk.

[FV11a] Stefan Friedl and Stefano Vidussi. A survey of twisted Alexander polynomials. In *The mathematics of knots*, volume 1 of *Contrib. Math. Comput. Sci.*, pages

45–94. Springer, Heidelberg, 2011.

[FV11b] Stefan Friedl and Stefano Vidussi. Twisted Alexander polynomials detect fibered 3-manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 173(3):1587–1643, 2011.

[Gou97] Fernando Q. Gouvêa. *p-adic numbers*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1997. An introduction.

[Gro70] Alexander Grothendieck. Représentations linéaires et compactification profinie des groupes discrets. *Manuscripta Math.*, 2:375–396, 1970.

[Hem87] John Hempel. Residual finiteness for 3-manifolds. In *Combinatorial group theory and topology (Alta, Utah, 1984)*, volume 111 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 379–396. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987.

[Hem14] John Hempel. Some 3-manifold groups with the same finite quotients. preprint. arXiv:1409.3509, September 2014.

[Hil05] Christopher J. Hillar. Cyclic resultants. *J. Symbolic Comput.*, 39(6):653–669, 2005.

[Hil12] Jonathan Hillman. *Algebraic invariants of links*, volume 52 of *Series on Knots and Everything*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, second edition, 2012.

[Jan88] Uwe Jannsen. Continuous étale cohomology. *Math. Ann.*, 280(2):207–245, 1988.

[KMTT17] Takahiro Kitayama, Masanori Morishita, Ryoto Tange, and Yuji Terashima. On certain L-functions for deformations of knot group representations. *To apear in Trans. Amer. Math. Soc.*, 2017.

[KS92] Kouzi Kodama and Makoto Sakuma. Symmetry groups of prime knots up to 10 crossings. In *Knots 90 (Osaka, 1990)*, pages 323–340. de Gruyter, Berlin, 1992.

[Le16] Thang Le. Growth of homology torsion in finite coverings and hyperbolic volume. preprint. arXiv:1412.7758, 2016.

[LR11] Darren D. Long and Alan W. Reid. Grothendieck's problem for 3-manifold groups. *Groups Geom. Dyn.*, 5(2):479–499, 2011.

[Maz64] Barry Mazur. Remarks on the Alexander polynomial. unpublished note, http://www.math.harvard.edu/˜mazur/papers/alexander_polynomial.pdf, 1963–64.

[Maz12] Barry Mazur. Primes, Knots and Po. Lecture notes for the conference "Geometry, Topology and Group Theory" in honor of the 80th birthday of Valentin Poenaru, July 2012.

[Moc15] Shinichi Mochizuki. Topics in absolute anabelian geometry III: global reconstruction algorithms. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 22(4):939–1156, 2015.

[Mor12] Masanori Morishita. *Knots and primes*. Universitext. Springer, London, 2012. An introduction to arithmetic topology.

[MTTU17] Masanori Morishita, Yu Takakura, Yuji Terashima, and Jun Ueki. On the universal deformations for SL_2-representations of knot groups. *Tohoku Math. J. (2)*, 69(1):67–84, 2017.

[Per74] Kenneth A. Perko, Jr. On the classification of knots. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 45:262–266, 1974.

[Per02] Grisha Perelman. The entropy formula for the ricci flow and its geometric applications. preprint. arXiv:0211159, November 2002.

[Per03a] Grisha Perelman. Finite extinction time for the solutions to the ricci flow on certain three-manifolds. preprint. arXiv:0307245, July 2003.

[Per03b] Grisha Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds. preprint. arXiv:0303109, March 2003.

[PT86] V. P. Platonov and O. I. Tavgen'. On the Grothendieck problem of profinite completions of groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 288(5):1054–1058, 1986.

[Rol90] Dale Rolfsen. *Knots and links*, volume 7 of *Mathematics Lecture Series*. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990. Corrected reprint of the 1976 original.

[Ryo17] Tange Ryoto. Fox formulas for twisted Alexander invariants associated to representations of knot groups over rings of S-integers. preprint, arXiv:, 2017.

[RZ10] Luis Ribes and Pavel Zalesskii. *Profinite groups*, volume 40 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2010.

[Uek15] Jun Ueki. Theory of genera and iwasawa invariants for 3-manifolds. 「結び目の数学 VIII」報告集（web 版）http://www.f.waseda.jp/taniyama/knot-VIII/reports/20-Ueki.pdf, 2015.

[Uek17a] Jun Ueki. p-adic Mahler measure and $\mathbb{Z}$-covers of links. preprint. arXiv:1702.03819, February 2017.

[Uek17b] Jun Ueki. The profinite completions of knot groups determine the alexander polynomials. preprint. arXiv:1702.03836, February 2017.

[Uek18] Jun Ueki. The profinite completions of knot groups and twisted alexander polynomials over S-integers. in preparation, 2018.

[Was97] Lawrence C. Washington. *Introduction to cyclotomic fields*, volume 83 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.

[Web79] Claude Weber. Sur une formule de R. H. Fox concernant l'homologie des revêtements cycliques. *Enseign. Math. (2)*, 25(3-4):261–272 (1980), 1979.

[WZ17] Henry Wilton and Pavel Zalesskii. Distinguishing geometries using finite quotients. *Geom. Topol.*, 21(1):345–384, 2017.