

On adequacy and the crossing number of satellite knots

Adrián Jiménez Pascual (東京大学数理科学研究科)

本発表ではサテライト結び目 K に対して、コンパニオンの充足性の仮定のもとで、最小交点数 $c(K)$ のある下からの評価を与えた。

第1節では、ソリッドトーラス (ST) 内における結び目のアニュラスへの射影 D がアニュラスの中心を回る回数 (ラッピング数 $w_{ST}(D)$) を計算する簡単な方法を紹介する。更に、この方法に基づき $w_{ST}(D)$ を求める全てメリディアン (up to isotopy) を再構成する方法を紹介する。

第2節以降は結び目の充足性 (adequacy) を考える。結び目の図式 D の各交点 $\times$ を縦に切って $(\rangle \langle)$, 生成されるサーキットの個数 c を数える。どの交点の切り方を変えても生成されるサーキットの個数が c 未満なら D は正充足という。同様に、横に切る $(\searrow \swarrow)$ 操作に対して同じ事が言えれば負充足という。正と負充足性が同時に成り立つ D は充足という。

第2節では充足性に関する既知の結果と次の定理を準備する。

定理 1 ([4]). 向き付けられた絡み目 L の連続図 D に対して、 $B(J(L)) \leq c(D)$ が成り立つ。ここで、 $J(L)$ は L の Jones 多項式、 B は多項式の最大冪と最小冪の差 (breadth) である。

第3節では第2節で紹介した結果をリンクパラレルへ拡張する。リンクパラレル L^r とは、絡み目 L の r 個のコピーを平行に取ったものである。充足性が平行移動の下で保たれるので L が充足なら L^r も充足である。これを使うと第2節で紹介する結果を拡張する上で、次の事が言える。

定理 2. 向き付けられた充足なリンクパラレル L^r を考える。このとき、

$$c(L^r) \geq \frac{r^2}{2}c(L) + 2r - 1.$$

これを証明する為に定理 1 で Jones 多項式の代わりに Kauffman ブラケットを使う。

第4節ではケーブル結び目と最終的にサテライト結び目について記述する。ケーブル結び目 $(K; r)$ は向き付けられた結び目 K の図式 D の r -パラレル D^r に $-w(D)$ 個のひねりを加えたものである。 $w(D)$ は D の writhe である。

補題 3. 向き付けられた充足な結び目 K に対して, $B(J(K; r)) \geq B(J(K'))$ が成り立つ.

最後にサテライト結び目に関する結果を述べる. まずはサテライト結び目を定義する. サテライト結び目を構成するには ST 内にあるパターン P と S^3 内のコンパニオン C を考える. P が入っている ST を C の近傍に埋め込む. P の像を $Sat(P, C)$ と書き, P と C のサテライト結び目という.

サテライト結び目のJones多項式は C のケーブル結び目の言葉で下記の定理のように書ける. 但し, その前に ST でのKauffmanブラケットを定義する. 通常の結び目の図式 D に対してKauffmanブラケット $\langle D \rangle$ は次のように定義される [2] :

- (i) $\langle \bigcirc \rangle = 1,$
- (ii) $\langle \diagdown \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \diagup \rangle,$
- (iii) $\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle D \rangle$

同様に, 今度 ST 内の結び目のアニュラスへの射影 D に対してKauffmanブラケット $\langle D \rangle_{ST}$ は次のように定義できる:

- (i) (a) $\langle \infty \bigcirc \rangle_{ST} = 1,$
- (b) $\langle \bigcirc \otimes \infty \rangle_{ST} = z_{ST}^k,$
- (ii) $\langle \diagdown \rangle_{ST} = A \langle \rangle_{ST} \langle \rangle_{ST} + A^{-1} \langle \diagup \rangle_{ST},$
- (iii) (a) $\langle D \sqcup \infty \bigcirc \rangle_{ST} = (-A^{-2} - A^2) \langle D \rangle_{ST},$
- (b) $\langle D \sqcup \bigcirc \otimes \infty \rangle_{ST} = \langle D \rangle_{ST} z_{ST}^k$

ここで, ∞ はアニュラスの中心を表す. この定義を用いると ST 内のJones多項式が次のように得られる:

$$J_{ST}(L) = (-A^{-3})^{w(D)} \langle D \rangle_{ST} \Big|_{t^{-1/2}=A^2}.$$

先ほどと同様に, $w(D)$ は D のwritheである.

$J_{ST}(L)$ を用いると次の定理が成立する.

定理 4 ([1]). P を ST 内の結び目, C を S^3 内の結び目とし, $Sat(P, C)$ を P と C から得られるサテライト結び目とする. 更に, P の ST 内のJones多項式を $J_{ST}(P) = \sum_{k=0}^M \beta_k z_{ST}^k$ と置く. このとき,

$$J(Sat(P, C)) = \sum_{k=0}^M \beta_k J(C; k).$$

定理 5. P を ST 内の結び目, C を S^3 内の充足な結び目とし, $Sat(P, C)$ を P と C から得られるサテライト結び目とする. 更に, P の ST 内のJones多項式を $J_{ST}(P) = \sum_{k=0}^M \beta_k z_{ST}^k$ と置く.

く. このとき,

$$c(\text{Sat}(P, C)) \geq B(\beta_M) + \frac{M^2}{2}c(C) + 2M - 1.$$

証明はここまでに紹介した全ての定理と補題に基づく.

系 6. 特に, $c(\text{Sat}(P, C)) > c(C)$ が成り立つ.

上記の系は1995年にKirby氏が作成した低次元トポロジーにおける問題集 [3] のProblem 1.67をコンパニオン C が充足な場合に解決するものである.

参考文献

- [1] A. Jiménez Pascual, On lassos and the Jones polynomial of satellite knots, *J. Knot Theory Ramifications* (2016), Vol. 25, No. 02, 1650011.
- [2] L. H. Kauffman, State models and the Jones polynomial, *Topology* 26 (1987), 395–407.
- [3] R. Kirby, Problems in low-dimensional topology, *Proceedings of Georgia Topology Conference*, Part 2 (1995), 35–473.
- [4] W.B.R. Lickorish, An introduction to knot theory, *Graduate Texts in Mathematics*, 175, Springer-Verlag, New York (1997).