Finite type invariants and n-similarity of virtual knots via forbidden moves

伊藤　昇　　(東京大学院数理科学研究科)[*1]
櫻井　みぎ和　(茨城工業高等専門学校)[*2]

2000年，M. グサロフ，M. ポリャック，O. ビロの有限型不変量 v_m^{GPV} による無限集合は，仮想結び目においても古典的結び目においても完全不変量であることが知られている．今回，[6] で導入した有限型不変量 v_m^F と古典的結び目の分類について，主に次のことを示した．

- $\{v \mid v = v_m^F (m \le n+1)\}$ は $\{v \mid v = v_m^F (m \le n)\}$ より真に強い．2つの古典的結び目が存在して後者では区別できないが，前者では区別できるものがある．
- $\{v \mid v = v_m^F (m \le n+1)\}$ は $\{v \mid v = v_m^{\mathrm{GPV}} (m \le 2n+1)\}$ より真に強い．2つの古典的結び目が存在して後者では区別できないが，前者では区別できるものがある．
- 古典的結び目のバシリエフ不変量はどれもガウス和公式（Gauss diagram formula）によって表されることが知られている [4] が，それは集合 $\{v_m^{\mathrm{GPV}} (m \in \mathbb{N})\}$ に含まれることを示した．
- $\{v \mid v = v_m^{\mathrm{GPV}} (m \le 2(n+1))\}$ は $\{v \mid v = v_m^{\mathrm{GPV}} (m \le 2n)\}$ より真に強い．2つの古典的結び目が存在して後者では区別できないが，前者では区別できるものがある．

さらに，仮想結び目に関しても，F_n-similar 性 ([6] で導入されている) を満たす仮想結び目の例が無限に存在することを示した．

1. Preliminaries

古典的結び目は3次元空間への滑らかな埋め込みであり，仮想結び目は $\Sigma \times I$ に埋め込まれた円周の像の安定同値類である．ここで，Σ は閉曲面であり，$[0,1]$ に同相な閉区間である．良く知られているように，仮想結び目として同値な古典的な結び目は古典的な結び目としても同値である．

1990年，V. A. バシリエフは交差交換と呼ばれる結び目解消操作によって有限型不変量と呼ばれるフィルター付きの不変量を定義した [18]．V. A. バシリエフ不変量に対して，1990年に大山淑之は n-trivial の概念を導入 [14] し，1992年に谷山公規は n-trivial を拡張した n-similar の概念を与えた [17]．結び目 K が結び目 K' に n-similar ならば，n 次以下のバシリエフ不変量の K の値は K' の値に等しい．1990年代に，葉廣和夫は n-similar の概念に対応した変形を定義した．その変形を C_n-変形と呼び，有限型不変量と密接な関係性があることを示した．

2000年，M. グサロフ，M. ポリャック，O. ビロは古典的結び目と仮想結び目に対して virtualization(図1) と呼ばれる結び目解消操作を使って有限型不変量を導入した．こ

*1 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1　東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: noboru@ms.u-tokyo.ac.jp
web: http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~noboru/index.html
*2 〒312-8508 茨城県ひたちなか市中根 866　茨城工業高等専門学校国際創造工学科
e-mail: migiwa@gm.ibaraki-ct.ac.jp

こでは，それをGPV不変量と呼ぶことにし，v^{GPV}で表す．そこでは，向き付けられたコード図(arrow diagram)によって生成される双対空間を考え，バシリエフ不変量を得るための別の構成方法を得た．さらに，GPV不変量は古典的結び目と仮想結び目の完全不変量であることも示されている．

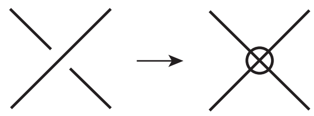

図 1: Virtualization.

2017年，我々はforbidden move (図2)を使って，仮想結び目の有限型不変量を定義した．それをF不変量と呼び，v^Fで表す．2001年， 金信泰造とS. ネルソンは独立にforbidden moveが結び目解消操作であることを示している([8], [12])．さらに，virtualizationによるn-trivial，n-similarを導入し，forbidden moveによるn-trivial，n-similarに対応する概念も導入した[6]．これらをそれぞれ，GPV$_n$-trivial，GPV$_n$-similar，F_n-trivial，F_n-similarと呼ぶ．

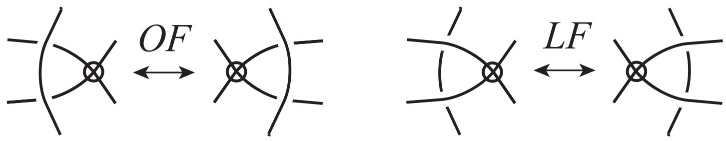

図 2: Forbidden moves.

GPV$_n$-trivial，GPV$_n$-similar，F_n-trivial，F_n-similarの概念は以下のように定義される．

定義 1 (GPV$_n$-trivial，GPV$_n$-similar，F_n-trivial，F_n-similar). A_1, A_2 $\cdots, A_n$を結び目解消操作を施した重なりのない十分小さな円盤で構成される，空でないn個の集合とする．A_i $(1 \leq i \leq n)$の互いに素な集合族$\{A_i\ (1 \leq i \leq n)\}$の冪集合の任意の部分集合$T$に対して，$T$の全ての円盤に結び目解消操作を施すことによって得られる仮想結び目図を$K(T)$とする．$K(\emptyset)$がKの仮想結び目図であり，$K(T)$がKの仮想結び目図(自明な結び目の図)と同値であるならば，仮想結び目Kはn-similar (n-trivial)であるという．結び目解消操作をvirtualizationで定義したとき，n-similar(n-trivial)をGPV$_n$-trivial (GPV$_n$-similar)といい，結び目解消操作をforbidden moveで定義したとき，n-similar (n-trivial)をF_n-trivial (F_n-similar)という．

[6]において，我々は以下のような結果を得ている．

定理 2 ([6]). 与えられた仮想結び目(古典的結び目, resp.)をKとする．任意の自然数n, ℓに対して，KとGPV$_n$-similarになるような仮想結び目(古典的結び目, resp.)K_n^ℓが無限に多く存在する．

定理 3 ([6]). 任意の自然数nに対して，F_n-trivial仮想結び目K_nが存在する．

ここから，以下のような系を得る．

系 4 ([6]). $m \leq n-1$となるような正の整数m, nを与える．任意の仮想結び目K，正の整数ℓに対して，$v_m^{\mathrm{GPV}}(K_n^\ell) = v_m^{\mathrm{GPV}}(K)$となるような無限に多くの仮想結び目$K_n^\ell$が存在する．

系 5 ([6])**.** $m \leq n-1$ となるような正の整数 m, n を与える．任意の仮想結び目 K に対して，$v_m^F(K_n) = v_m^F(O)$ となるような無限に多くの仮想結び目 K_n^ℓ が存在する．ここで，O は自明な結び目である．

2. Main Results

本研究では，GPV 不変量，F 不変量，GPV$_n$-similar，F_n-similar について，以下のような研究結果を得た．

定理 6. 与えられた仮想結び目 K，任意の自然数 n, ℓ に対して，K_n^ℓ が K に F_n-similar となるような無限に多くの仮想結び目 K_n^ℓ が存在する．

定理 7. GPV 不変量の集合 $\{v \mid v = v_i^{\mathrm{GPV}}(i \leq 2n+1)\}$ は F 不変量の集合 $\{v \mid v = v_i^F(i \leq n)\}$ に包含される．

定理 8. 全ての次数について非自明な F 不変量は存在する．さらに，$\{v \mid v = v_m^F\ (m \leq n+1)\}$ は $\{v \mid v = v_m^F\ (m \leq n)\}$ よりも真に強い．2 つの古典的結び目が存在して後者では区別できないが，前者では区別できるものがある．

3. 定理 6 について

[6] で導入された仮想結び目 $\hat{b}(n)$ の定義を復習する (詳しくは [6, Section 4. 2] を参照)．

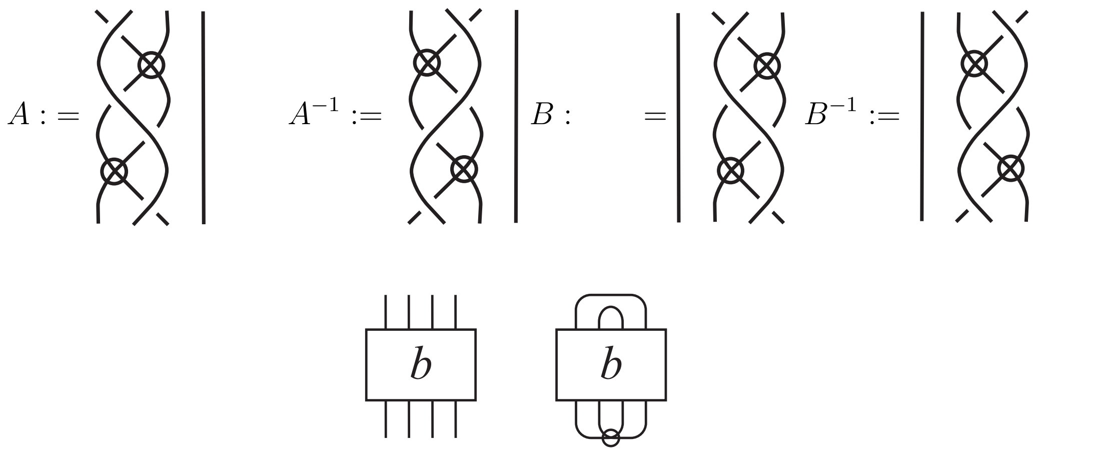

図 3: 組み紐 b とその閉包 $\hat{b}$

このとき，以下のように仮想組紐 $b(n)$ を定義する：$b(1) = A$, $b(2) = [B, b(1)]$, $b(4u-1) = [B, b(4u-2)]$, $b(4u) = [A, b(4u-1)]$, $b(4u+1) = [A, b(4u)]$, $b(4u+2) = [B, b(4u+1)]$, $(u \geq 1)$. この $b(n)$ を使って図 4 のように仮想結び目図 D_n^ℓ を構成する．さらに，図 4 のように D_n^ℓ と仮想結び目図 D とのつなぎ合わせた仮想結び目図の同値類を $K\#K_n^\ell$ と定義する．

このようにして，F_n-similar 性を満たす仮想結び目の例を構成的に与えた．

4. v_n^{GPV} と v_n^F の高い次数について

高次数の有限型不変量に対して，以下のような結果を得ている．

補題 9. 図 5 のように交点の集合 A_1, A_2 を取ると，forbidden move 1 回は A_1, A_2, 又は $A_1 \cap A_2$ に属する交点で virtualization と generalized Reidemeister move を施すことで実現することができる．

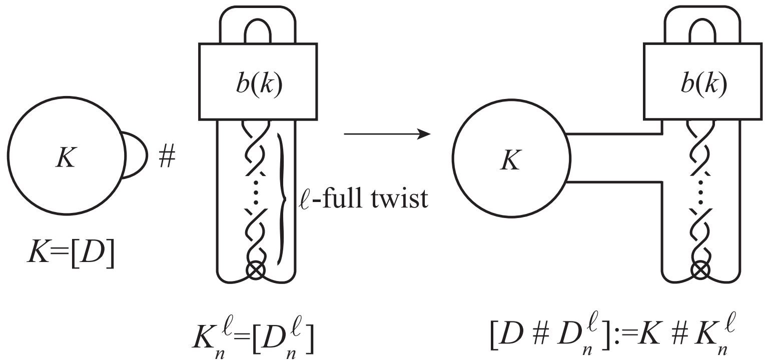

図 4: 仮想結び目 K_n^ℓ と $K\#K_n^\ell$

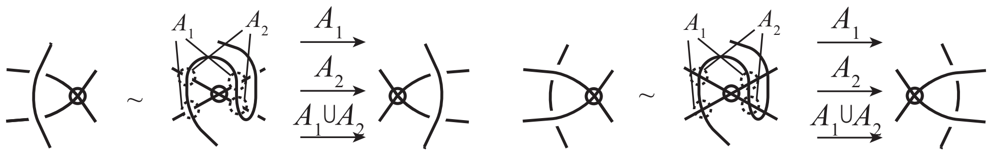

図 5: forbidden move と virtualization の関係性

補題9から，２つの仮想結び目 K, K' に対して，K が K' に F_n-similar ならば，K は K' に GPV_{2n}-similar である．このことから，定理7を得る．定理7は全ての GPV 不変量は F 不変量であることを示している．また，[4] の結果から，以下の系10が得られる．

系 10. 全ての F 不変量は仮想結び目の完全不変量を導く．

さらに，古典的結び目の分類について，かつ高次数の F 不変量について，定理8が得られる．

参考文献

[1] J. S. Carter, S. Kamada, and M. Saito, Stable equivalence of knots on surfaces and virtual knot cobordisms, Knots 2000, Korea, Vol. 1 (Yongpyong). *J. Knot Theory Ramifications* **11** (2002), no. 3, 311–322.

[2] M. Gusarov, On n-equivalence of knots and invariants of finite degree, *Topology of manifolds and varieties*, 173–192, Adv. Soviet Math., 18, *Amer. Math. Soc., Providence, RI,* 1994.

[3] M. Goussarov, Variations of knotted graphs. The geometric technique of n-equivalence. (Russian); *translated form Algebra i Analiz* **12** (2000), no. 4, 79–125 *St. Petersburg Math. J.* **12** (2001), no. 4, 569–604.

[4] M. Goussarov, M. Polyak and O. Viro, Finite type invariants of classical and virtual knots, *Topology* **39** (2000), no. 5, 1045-1068.

[5] K. Habiro, Claspers and finite type invariants of links, *Geom. Topol.* 4 (2000), 1–83.

[6] N. Ito and M. Sakurai, On n-trivialities of classical and virtual knots for some unknotting operations, *J. Math. Soc. Japan*, accepted.

[7] T. Kanenobu, Examples on polynomial invariants of knots and links, *Math. Ann.* **275** (1986), no. 4, 555-572.

[8] T. Kanenobu, Forbidden moves unknot a virtual knot, *J. Knot Theory Ramifications* **10** (2001), no. 1, 89-96.

[9] L. H. Kauffman, Virtual knot theory, *Europ. J. Combin.* **20** (1999), no. 7, 663-691.

[10] M. Khovanov, A categorification of the Jones polynomial. *Duke Math. J.* **101** (2000), no. 3, 359–426.

[11] V. O. Manturov, The Khovanov complex for virtual knots. (Russian. English, Russian summary), *translated from Fundam. Prikl. Mat.* **11** (2005), no. 4, 127–152, *J. Math. Sci. (N.Y.)* **144** (2007), no. 5, 4451-4467.

[12] S. Nelson, Unknotting virtual knots with Gauss diagram forbidden moves, *J. Knot Theory Ramifications* **10** (2001), no. 6, 931-935.

[13] Y. Ohyama, A new numerical invariant of knots induced from their regular diagrams, *Topology Appl.* **37** (1990), no. 3, 249–255.

[14] Y. Ohyama, Vassiliev invariants and similarity of knots, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), no. 1 287–291.

[15] Y. Ohyama, Vassiliev invariants and local moves of knots, `http://www.math.kobe-u.ac.jp/publications/rlm15.pdf` (2003).

[16] M. Polyak and O. Viro, Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants, *Internat. Math. Res. Notices* **1994**, 445ff., approx. 8pp.

[17] K. Taniyama, On similarity of links, Gakujutu Kenkyu (issued by the school of education of Waseda University) **14** (1992), 33–36.

[18] V. A. Vassiliev, Cohomology of knot spaces, *Theory of Singularities and its Applications*, Amer. Math. Soc. **20** (1990), 23-69, Adv. Soviet Math., 1, *Amer. Soc., Providence, RI,* 1990.

[19] O. Viro, Generic immersions of the circle to surfaces and the complex topology of real algebraic curves, *Topology of real algebraic varieties and related topics,* 231–252, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 173, Adv. Math. Sci., 29, *Amer. Math. Soc., Providence, RI,* 1996.