

Arrow diagrams on spherical curves and computations *

伊藤 昇[†] 高村正志[‡]

研究集会「結び目の数学 X」では、球面曲線を分類する、あるライデマイスター移動で不変な整数値関数を組織的に導く方法に関し、コンピュータプログラム化に重きをおいて講演を行った。この不変量は、(向きなしと向きありそれぞれの場合において) コード図によって構成がなされる。本研究では数値計算を行い、向きなしのコード図の場合と向きありのコード図の場合を比較した。そのことでコード図の向きの情報がどのくらい効果的であるかも確かめた。以上の考察はバシリエフ不変量の空間の次元に関係する計算結果も導く。

本稿では第1章は伊藤、第2章は高村が担当した。第1章では、向きなしコード図の場合(本報告集の伊藤昇の講演報告における不変量構成)に対してパラレルなところとそうでないところが明確になるように注意して記載した¹。第2章では、一部の箇所では本報告集の伊藤昇の講演報告によって定義された概念と記号を用いている。

謝辞 本研究集会オーガナイザーである東京女子大学の大山淑之先生と新國亮先生、および運営の皆様に深く感謝申し上げます。

1 設定

球面曲線 (oriented generic immersed spherical curve) を考える。以下、記号 P は、球面曲線とし、 $P^\epsilon (= P^+ \text{ または } P^-)$ は向きのついた球面曲線を表すものとする。符号 ϵ は、 P^+ の向きを反対にすると P^- が得られるという意味である。

*本研究は科研費 (S)24224002(研究代表者 坪井俊) からの補助を受けました。

[†]email:noboru@ms.u-tokyo.ac.jp, 所属: 東京大学大学院数理科学研究科 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1

[‡]email:takamura@si.aoyama.ac.jp, 所属: 青山学院大学社会情報学部 〒229-8558 神奈川県相模原市淵野辺 5-10-1

¹複雑な方だけの記述だけで足りるという意見もあると思うが、ユーザー側に複雑な不変量構成のみを提供するよりも、最低限の簡易な道具立てによる、よりシンプルな不変量構成を提供する時のユーザー側のメリットは、やはり捨てきれないので両方を記載するのである。今回の場合、分類される対象と不変量側の両方を見て複雑な設定から簡易な設定を導くのは技術的に工夫が必要である。また反対方向に見て簡易な設定から複雑な設定を導くのは、もっと非自明である。本研究では両者の設定の差を見たい、というモチベーションもある。

よく知られていることとして次がある：任意の2つの (向きのついていない) 球面曲線は3種類の射影されたライデマイスター移動 RI, RII, RIII (図1) からなる有限列で移り合う (up to ambient isotopy). 以降, (誤解はないと思われるので) 球面曲線に対する交点の上下の情報を抜いたライデマイスター移動も, そのまま「ライデマイスター移動」と呼ぶことにする.

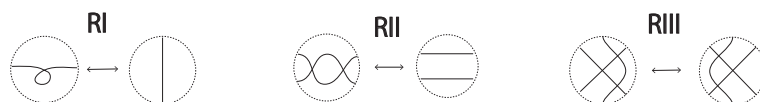


図 1: 3 種類のライデマイスター移動 RI, RII, RIII

この3種類のライデマイスター移動は, 向きをつけて詳しく見ると5種類のライデマイスター移動だと捉えられる. 5種類のライデマイスター移動によ

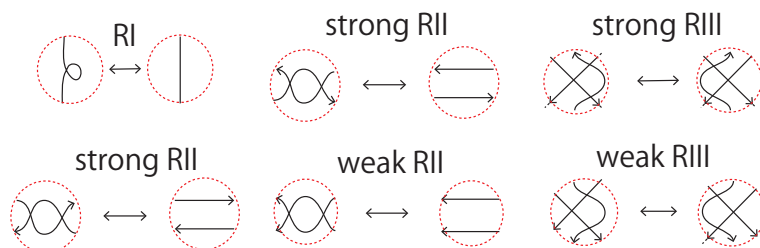


図 2: 5 種類のライデマイスター移動 RI, weak RII, strong RII, weak RIII, strong RIII (strong RII は mirror image の関係で2パターンある).

り, 2^5 通りの同値関係が考えられる. すなわち, ライデマイスター移動を m (≤ 5) 種類選んで固定したとき, それに応じて, 次の同値関係が考えられる.

2つの向き付き球面曲線 P^ϵ と P'^ϵ が同値である

$\stackrel{\text{def}}{\iff} P^\epsilon$ と P'^ϵ が m 種類のライデマイスター移動を有限回使うことで移り合う (up to ambient isotopy).

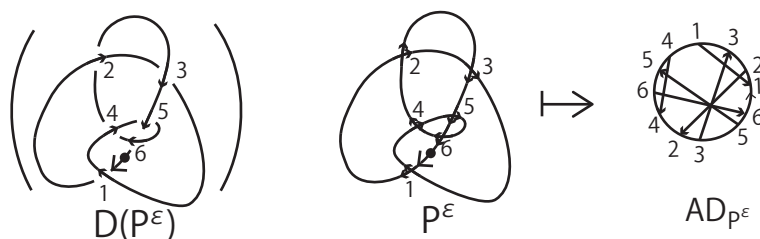


図 3: 球面曲線 P^ϵ から決まる arrow diagram AD_{P^ϵ} .

定義 1. 向き付きコード図 (arrow diagram) とは円周上 2 個ずつペアとなる点配置のことであり (up to ambient isotopy), 各ペアに始点と終点が定まっているもののことである. 向き付き球面曲線 P^e のコード図 AD_{P^e} とは 2 重点の逆像の配置が定める向き付きコード図のことである (具体例は図 3).

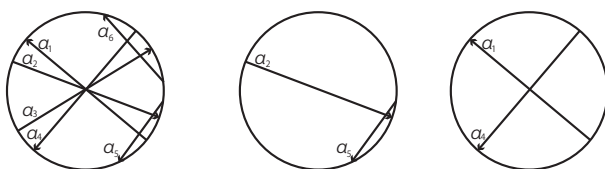


図 4: 向き付きコード図と向き付き部分コード図

向き付き部分コード図の counting を考えて (具体例は図 4), 不変量の導出をする.

定義 2. 長さ n のワードを写像 $w : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N}$ で定義する. 慣例として表示 $w(1)w(2)\cdots w(n)$ を用いてよいとする. ワード w の像の元のことをワードの letter と呼ぶ. 長さ $2n$ のガウスワードとは, 各 letter (n 個) がちょうど 2 回現れるワードのこととする.

次に**向き付きガウスワード**の定義をする. 与えられたガウスワード v とその各 letter k に対し, 2 つの k を始点と終点に区別をする. 始点には数字 k の上にバーをつけて表示する (すなわち “ $\bar{k}$ ” と表示される). 各 letter にこの情報を表示したものを**向き付きガウスワード**と呼ぶ. 向き付きガウスワードの letter は **oriented letter** と呼ぶことにする. $\check{v}, \check{w}$ を v, w から誘導された向き付きガウスワードとする. 今, v のすべての letter からなる集合を $\{1, 2, \dots, n\}$ と仮定しても一般性を失わないのでそうする. すると, $\check{v}$ の向き付き letter の集合は $\{1, 2, \dots, n, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}\}$ となる. 2 つのガウスワード $\check{w}, \check{v}$ が isomorphic であるとは, 全単射 $f : w(2\hat{n}) \rightarrow v(2\hat{n})$ が存在して次を満たすことである: f から決まる全単射

$$\check{f} : \check{v}(2\hat{n}) = \{1, 2, \dots, n, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}\} \rightarrow \check{w}(2\hat{n}) \text{ が } \check{f}(i) = f(i), \check{f}(\bar{i}) = \overline{f(i)}$$

を満たし, かつ

$$\exists t \in \mathbb{Z}, \exists \text{ s.t. } \check{v} \circ (\text{cyc})^t = \check{f} \circ \check{w}$$

を満たす.

ただし, cyc は次で定める:

$$\text{cyc}(p) \equiv p + 1 \pmod{2n}.$$

向き付きガウスワード $\check{v}$ の同型類は $[[\check{v}]]$ と表すことにする (向き付きでないガウスワードが出てくるときは $[v]$ と表記しているので区別している). 定義から向き付きガウスワード v の同型類 $[[v]]$ と arrow diagram は同一視されることがわかる (図 5).

$$[[1\bar{2}1\bar{2}]] \leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \bar{2} \\ \circlearrowleft \\ \bar{1} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \circlearrowright \\ 2 \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} \bar{2} \\ \circlearrowleft \\ \bar{1} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \circlearrowright \\ 2 \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} \bar{1} \\ \circlearrowleft \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowright \\ 2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \bar{1} \\ \circlearrowleft \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowright \\ 2 \end{array} \right) (= \begin{array}{c} \bar{1} \\ \circlearrowleft \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowright \\ 2 \end{array})$$

図 5: arrow diagram の同一視による様々な表示例. 図は表示が 4 つあることを表しており, 等号は向き付きガウスの同型または arrow diagram の同型から導かれる等号を表している.

定義 3. $\check{G}_{<\infty}$ をコード図全体からなる集合とし, $\check{G}_{<\infty}$ と $\{\check{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ の間に全単射を固定する. $\check{G}_{\leq d}$ を集合 $\{AD \in \check{G}_{<\infty} \mid AD \text{ が高々 } d \text{ arrows を持つ}\}$ とする. $\check{n}_d = |\check{G}_{\leq d}|$, $\check{G}_{b,d} = \check{G}_{\leq d} \setminus \check{G}_{\leq b-1}$ とする. 向き付きガウスワード $\check{G}$ に対して数 $\check{x}(\check{G})$ を次で定める:

$$\tilde{x}(\check{G}) = \begin{cases} 1 & [[\check{G}]] = \check{x} \\ 0 & [[\check{G}]] \neq \check{x}. \end{cases}$$

定義からガウスワード $\check{F}_1$ と $\check{F}_2$ が $[[\check{F}_1]] = [[\check{F}_2]]$ を満たすと $\tilde{x}(\check{F}_1) = \tilde{x}(\check{F}_2)$ となるのが直ちにわかる. よってこれは $\tilde{x}([[\check{F}_1]])$ と書くことを許す (well-defined だから).

定義 4. 向き付きガウスワード $\check{G}$ の oriented letter においては, 同じ数字を持つものはちょうど2つである. それを文字ペアと呼ぶことにしよう. 向き付きガウスワード $\check{G}$ に対して $\text{Sub}(\check{G}) = \{\check{H} \mid \check{H} : \check{G} \text{ からいくつか文字ペアを消したもの} \}$ とする. arrow diagram $\check{x} \in \{\check{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ に対して, $\text{Sub}(\check{G})$ の部分集合 $\{\check{H} \mid \check{H} \in \text{Sub}(\check{G}), [[\check{H}]] = \check{x}\}$ を $\text{Sub}_{\check{x}}(\check{G})$ とする. $\text{Sub}_{\check{x}}(\check{G})$ の要素の個数を $\check{x}(\check{G})$ と定義する.

定義から $\check{G}$ と同型な $\check{G}'$ に対して $\check{x}(\check{G}) = \check{x}(\check{G}')$ である. よって $\check{G}, \check{G}'$ を表す arrow diagram AD に対して $\check{x}(AD)$ と書いても良い (well-defined だから). これらを総合すると $AD = [[\check{G}]]$ に対して, 整数値関数 $\check{x}(AD)$ は

$$\check{x}(AD) = \sum_{\check{z} \in \text{Sub}(\check{G})} \check{x}(\check{z}) \quad (1)$$

となる. 特に $AD = AD_{P^e}$ のときは, $\check{x}(AD)$ は $\check{x}(AD_{P^e})$ であり, そのため $\check{x}(P^e)$ と書いてよいものとする.

最後に関数 $\check{x}(P^e)$ が不変量となるための十分条件を書くために relator を定義する

定義 5. $\text{relator} \in \mathbb{Z}[\check{\mathbb{G}}_{<\infty}]$ を図 6 によって定義する (厳密にはガウスワードを書いて定義される). 図 6 にあるように, Relator は 5 種類で Type (I) relator, Type (SII) relator, Type (WII) relator, Type (SI) relator, Type (W) relator と呼ぶ. 5 種類の relator に対応してそれぞれの全体集合に次の記号を与

$$\begin{aligned}
\text{Type } (\check{\text{I}}) & \quad \bigcirc, \bigcirc. \\
\text{Type } (\check{\text{SII}}) & \quad \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc, \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc. \\
\text{Type } (\check{\text{WII}}) & \quad \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc. \\
\text{Type } (\check{\text{SIII}}) & \quad \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc - (\bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc), \\
& \quad \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc - (\bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc). \\
\text{Type } (\check{\text{WIII}}) & \quad \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc - (\bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc), \\
& \quad \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc - (\bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc).
\end{aligned}$$

図 6: Relators

える. すなわち $\check{R}_1 = \text{Type } (\check{\text{I}}) \text{ relators 全体の集合}$, $\check{R}_2 = \text{Type } (\check{\text{SII}}) \text{ relators 全体の集合}$, $\check{R}_3 = \text{Type } (\check{\text{SII}}) \text{ relators 全体の集合}$, $\check{R}_4 = \text{Type } (\check{\text{SIII}}) \text{ relators 全体の集合}$, $\check{R}_5 = \text{Type } (\check{\text{WIII}}) \text{ relators 全体の集合}$ とする. この上で $\check{R}_{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5}$ を $\check{R}_{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5} = \cup_{i=1}^5 \check{R}_i$ と定義する. さらに $\check{R}_{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5}(b, d) = \check{O}_{b,d}(\check{R}_{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5})$ とする. ただし, $\check{O}_{b,d}$ は「 $b \leq$ コードの数 $\leq d$ 」を満たす arrow diagram のみを残す projection とする.

定義 5 からすぐにわかるものの, 主定理 (定理 1) の証明に効いている補題 1, その直接の帰結である命題 1 を記載しておく.

補題 1. もし $\check{n}_{b-1} + 1 \leq i \leq \check{n}_d$ ならば, 任意の $\check{r} \in \mathbb{Z}[\check{G}_{\leq l}]$ について

$$\check{x}_i(\check{r}) = \check{x}_i(\check{O}_{b,d}(\check{r})).$$

命題 1. 自然数 b, d ($2 \leq b \leq d$) に対して, $\sum_{\check{n}_{b-1} \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \check{x}_i$ を上記で定めたものとする. $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5) \in \{0, 1\}^5$ を勝手に選ぶ. $\check{R}_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5}$ は定義 5 で定めたものとする. 次の (A), (B) は同値である.

- (A) $\sum_{\check{n}_{b-1} \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \check{x}_i(\check{r}) = 0$ ($\forall \check{r} \in \check{R}_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5}$).
(B) $\sum_{\check{n}_{b-1} \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \check{x}_i(\check{r}) = 0$ ($\forall \check{r} \in \check{R}_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5}(b, d)$).

主結果を述べる.

定理 1. 自然数 b, d ($2 \leq b \leq d$) に対して, $\sum_{\check{n}_{b-1} \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \check{x}_i$ を上記で定めたものとする. $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5) \in \{0, 1\}^5$ を勝手に選ぶ. $\check{R}_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5}$ は定義 5 で定めたものとする.

$\epsilon_j = 1$ ならば

$$\sum_{\check{n}_{b-1} \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \check{x}_i(y) = 0 \quad (\forall y \in \check{R}_{0 \dots 0 \epsilon_j 0 \dots 0}(b, d)) \text{ と仮定する.}$$

このとき $\sum_{\check{n}_{b-1} \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \check{x}_i$ は $\epsilon_j = 1$ となるすべての (射影された) ライデマイスター移動の整数値不変量となる.

ここでは $\check{R}_{10000}$ の場合についてのみ証明のスケッチをお見せし、一般の場合も似たような形で証明される、という全体の雰囲気をお伝えする。

($\check{R}_{10000}$ の場合について証明のスケッチ) P と P' を球面曲線を 1 回の RI で移り合う球面曲線とし、 P を交点が多い方とする。このとき (定義 1, 2 により), ガウスワード $\check{G}$, oriented letter i が存在して (図 5 による arrow diagram と向き付きガウスワードの同型類の間にある同一視により) $AD_P = [[Gi\bar{i}]]$ または $[[G\bar{i}i]]$, $AD_{P'} = [[G]]$ とかける。以下、一般性を失わず, $AD_P = [[Gi\bar{i}]]$ と仮定できる。

ここで定義 4 の記号 $\text{Sub}(\check{G})$ を思い出してほしい。この oriented letters $i, \bar{i}$ が入らない $\check{G}$ の部分ガウスワード全体からなる集合 $\text{Sub}^{(0)}(\check{G})$, i が入る $\check{G}$ の部分ガウスワード全体からなる集合 $\text{Sub}^{(1)}(\check{G})$ が発生し, $\check{G}$ の部分ガウスワード全体からなる集合 $\text{Sub}(\check{G})$ を (自然に) 分割する:

$$\text{Sub}(\check{G}) = \text{Sub}^{(0)}(\check{G}) \sqcup \text{Sub}^{(1)}(\check{G}). \quad (2)$$

以下, 第 1 等号では式 (1), 第 2 等号で (2) を使うと次を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \check{x}_i(P^\epsilon) &= \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \sum_{\check{z} \in \text{Sub}(\check{G})} \alpha_i \check{x}_i(\check{z}) \\ &= \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \left(\sum_{\check{z}_0 \in \text{Sub}^{(0)}(\check{G})} \alpha_i \check{x}_i(\check{z}_0) + \sum_{\check{z}_1 \in \text{Sub}^{(1)}(\check{G})} \alpha_i \check{x}_i(\check{z}_1) \right). \end{aligned}$$

任意の向き付きガウスワード $\check{G}$ に oriented letters $i, \bar{i}$ を続けて書いた向き付きガウスワード $\check{Gi}\bar{i}$ を考える。この $\check{Gi}\bar{i}$ の部分ガウスワード $\check{z}_1$ は $\check{G}$ の部分ガウスワード $\check{z}_0$ を用いて書かれているはずだから $\text{Sub}^{(1)}(\check{G}) = \{\check{z}_0 i \bar{i} \mid \check{z}_0 \in \text{Sub}^{(0)}(\check{G})\}$ となる。

以下, 第 1 等号については上記の続き, 第 2 等号については $\check{z}_1$ が $\check{z}_0 i \bar{i}$ と書けるとした注意, 第 3 等号については定義 3 直後で説明した書き換えを使うことにより次を得る。

$$\begin{aligned} &\sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \check{x}_i(P^\epsilon) \\ &= \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \left(\sum_{\check{z}_0 \in \text{Sub}^{(0)}(\check{G})} \alpha_i \check{x}_i(\check{z}_0) + \sum_{\check{z}_1 \in \text{Sub}^{(1)}(\check{G})} \alpha_i \check{x}_i(\check{z}_1) \right) \\ &= \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \left(\sum_{\check{z}_0 \in \text{Sub}^{(0)}(\check{G})} \alpha_i \check{x}_i(\check{z}_0) + \sum_{\check{z}_0 \in \text{Sub}^{(0)}(\check{G})} \alpha_i \check{x}_i(\check{z}_0 i \bar{i}) \right) \\ &= \sum_{\check{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \check{n}_d} \alpha_i \left(\sum_{\check{z}_0 \in \text{Sub}^{(0)}(\check{G})} \alpha_i \check{x}_i([[\check{z}_0]]) + \sum_{\check{z}_0 \in \text{Sub}^{(0)}(\check{G})} \alpha_i \check{x}_i([[\check{z}_0 i \bar{i}]]) \right). \end{aligned}$$

相手の P^ϵ に対しても同様な (ただし, 上記よりもずっと容易な) 計算をする。次の式変形の第 1 等号では式 (1), 第 2 等号では $\text{Sub}(\check{G}')$ が $\text{Sub}^{(0)}(\check{G})$ と同

一視できることを使い，第 3 等号は定義 3 直後で説明した書き換えを使い，次を得る．

$$\begin{aligned}
\sum_{\tilde{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \tilde{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i(P'^\epsilon) &= \sum_{\tilde{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \tilde{n}_d} \sum_{\tilde{z}' \in \text{Sub}(\tilde{G})} \alpha_i \tilde{x}_i(\tilde{z}') \\
&= \sum_{\tilde{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \tilde{n}_d} \sum_{\tilde{z}_0 \in \text{Sub}^{(0)}(\tilde{G})} \alpha_i \tilde{x}_i(\tilde{z}_0) \\
&= \sum_{\tilde{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \tilde{n}_d} \sum_{\tilde{z}_0 \in \text{Sub}^{(0)}(\tilde{G})} \alpha_i \tilde{x}_i([\tilde{z}_0]).
\end{aligned}$$

上記 $\sum_{\tilde{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \tilde{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i(P^\epsilon)$ と $\sum_{\tilde{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \tilde{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i(P'^\epsilon)$ の計算結果を比べて

$$\begin{aligned}
&\sum_{\tilde{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \tilde{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i(P^\epsilon) - \sum_{\tilde{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \tilde{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i(P'^\epsilon) \\
&= \sum_{\tilde{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \tilde{n}_d} \sum_{\tilde{z}_0 \in \text{Sub}^{(0)}(\tilde{G})} \alpha_i \tilde{x}_i([\tilde{z}_0 i \bar{i}]). \tag{3}
\end{aligned}$$

今，仮定から

$$\sum_{\tilde{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \tilde{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i(\tilde{r}) = 0 \quad (\forall \tilde{r} \in \tilde{R}_{10000}(b, d)).$$

命題 1 から，

$$\sum_{\tilde{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \tilde{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i(\tilde{r}) = 0 \quad (\forall \tilde{r} \in \tilde{R}_{10000}).$$

よって，

$$\sum_{\tilde{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \tilde{n}_d} \sum_{\tilde{z}_0 \in \text{Sub}^{(0)}(\tilde{G})} \alpha_i \tilde{x}_i([\tilde{z}_0 i \bar{i}]) = 0.$$

したがって (3) より，

$$\sum_{\tilde{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \tilde{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i(P^\epsilon) = \sum_{\tilde{n}_{b-1}+1 \leq i \leq \tilde{n}_d} \alpha_i \tilde{x}_i(P'^\epsilon).$$

□

2 コンピューターによる計算方法

コンピュータによる計算で用いたプログラミング言語は C++11 を使用し、行列の階数の計算は Mathematica を利用した。C++11 を使用した理由は第 2 著者が慣れている言語であるからで、Python などの他の言語でも実装可能である。

ガウスワードの同型類全体の集合を求めるために、正規ガウスワードを次のように定める。

定義 6. ガウスワードで、左から読んでいき、最初の letter は 1, 新しく現れた letter は今まで出現した letter の最大値 +1 をみたまものを正規ガウスワードという。

例 1. 121233 や 1234255143 は正規ガウスワードであり、131322 や 2342551431 は正規ガウスワードではない。

図 3 の様に球面曲線から自然に作られるガウスワードは正規である。正規性はプログラムでガウスワードの比較に便利である。

長さ $2n$ の正規ガウスワード全体の集合を帰納的に求める。長さ 2 の正規ガウスワードは 11 のみである。長さ $2(n-1)$ の正規ガウスワードの全体の集合は求まっていると仮定する。このとき、長さ $2n$ の正規ガウスワードを次のように求める。長さ $2n$ の配列を用意する。左端に 1 を入れ、2 番目の 1 の場所を決める。残った場所に長さ $2(n-1)$ の正規 Gauss word を 1 シフトしたものを埋め込む。以上から、 $2n$ の正規ガウスワード全体の集合が求まる。

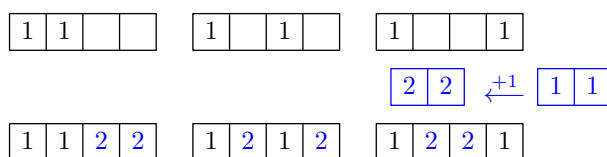


図 7: $n = 2$ の場合

回転と鏡映による同一視を行い、ガウスワードの同型類全体の集合が求まる。ただし、一般に回転と鏡映を行うと正規性が崩れるので、正規化が必要となる。

次に、 n 本のコードからなる weak RIIE relator 全体の集合を求める。weak

RIII relator は

$$\begin{aligned}
& [SijTkiUkj] + [SjTkUkj] + [SiTkiUk] + [SijTiUj] \\
& - ([SjiTikUkj] + [SjiTiUj] + [SiTikUk] + [SjTkUkj]) \\
& = [SijTkiUkj] + [SjTkUkj] + [SiTkiUk] + [SijTiUj] \\
& - ([SijTjkUik] + [SjTjkUk] + [SiTjUik] + [SijTjiU])
\end{aligned}$$

であった． weak RIII relator は，正規ガウスワードで $SijTkiUkj$ の形のものから求めることができる．これは，基本となるコード図 [123132] にコードを追加していくことで得られる．ただし，図 8 の赤い所にはコードを入れてはいけない．

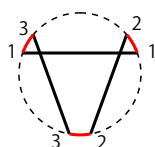
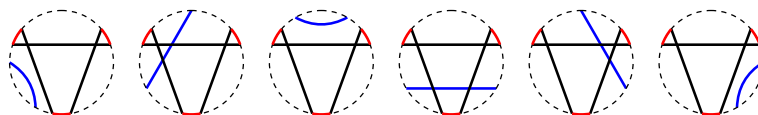
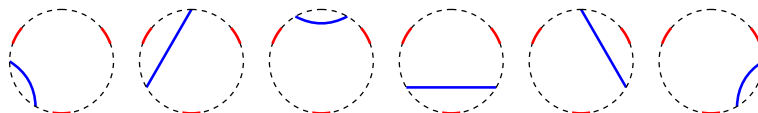


図 8: 基本となるコード図

まず $n = 4$ の場合を観察する．このときコードの入れ方は 6 通りある．



基本となるコード図のコードを除くと次の様になる．



これらは order $1 = 4 - 3$ のガウスワード 11 に 3 つの ● を入れたものと考えることができる． weak RIII relator の関係式から最後は ● としてよい．

$$\bullet\bullet11\bullet \quad \bullet1\bullet1\bullet \quad \bullet11\bullet\bullet \quad 1\bullet\bullet1\bullet \quad 1\bullet1\bullet\bullet \quad 11\bullet\bullet\bullet$$

この観察から，一般の n に対する $SijTkiUkj$ の形の正規ガウスワードは次の様にして求められる．

Step 1. order $n - 3$ の正規ガウスワードのリストは出来ているとする．

Step 2. 長さ $2(n - 3) + 3$ の配列の配列を用意して，● の入り方のリストを作る．

Step 3. 出来た配列の ● を 2 倍にし，長さ $2n$ の配列を作る．

Step 4. 6 個の「●」の所には, 基本となるコード図に対応するガウスワード
123132 をシフトした $n-2 \ n-1 \ n \ n-2 \ n \ n-1$ を入れる.

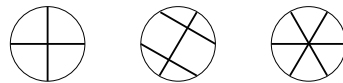
Step 5. 空白「 」のところには, order $n-3$ の正規ガウスワードを入れる.

Step 6. 正規化する.

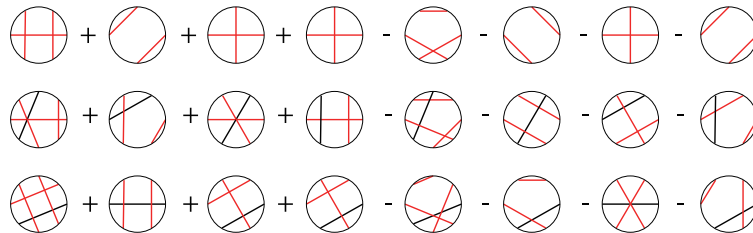
回転と鏡像で一致するものを除いて, ライデマイスター移動などの操作を行えば, order n の weak RIII relator の全体の集合を得ることができる.

注 1. strong の場合も基本となるコード図を [123123] に変えれば同様にして求められる. また, weak RII relator や strong RII relator の場合は, 2 個の ● の入れ方を考えれば求められる.

例 2 ($R_{00001}(2,3)$). コードが 2 本以上 3 本以下のコード図で連結なものは次の 3 個である.



order が 3 以上で 4 以下の weak RIII relator で連結なものを含むものは次の 3 個である.



よって, 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

が得られ, $V_w(2,3) := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}A = \mathbf{0}\}$ とおくと, $\dim V_w(2,3) = 0$ となる.

例 3 ($R_{00001}(3,4)$). 同様にして, 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

が得られ, $V_w(3,4) := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}A = \mathbf{0}\}$ とおくと, $\dim V_w(3,4) = 0$ となる.

ここから arrow diagram の場合を考える. プログラムでの長さ $2n$ の向き付きガウスワードの構造は, 2 つの長さ $2n$ の配列で letter を表す `letter_list` と orientation を表す `orientation_list` からなる. i 番目の letter が始点の場合は `orientation_list[i]` の値は 0, 終点の場合は `orientation_list[i]` の値は 1 とする.

例 4. 向き付きガウスワード $w = \bar{1}2\bar{3}13\bar{2}$ の場合は `letter_list` = {1, 2, 3, 1, 3, 2} `orientation_list` = {1, 0, 1, 0, 0, 1} となる.

長さ $2n$ の正規ガウスワードから n 本のコードを持つコード図が作られた. このコード図のコード 1 本 1 本に向きを指定すれば, 対応する長さ $2n$ の向き付き正規ガウスワードが得られる. n 本のコードに向きを付ける付け方を書き下すことは, 次の様に帰納的に行えばよい. $n = 1$ のとき, $\rightarrow, \leftarrow$ の 2 通りであり, プログラム上では $\rightarrow$ を $\{0, 1\}$, $\leftarrow$ を $\{1, 0\}$ とした. $n = k$ のとき,

$\rightarrow \times (k-1)$ の時のリスト, $\leftarrow \times (k-1)$ の時のリスト
の 2^k 通りである. 例えば $n = 2$ の場合は

$\{\{0, 1\}, \{0, 1\}\}, \{\{0, 1\}, \{1, 0\}\}, \{\{1, 0\}, \{0, 1\}\}, \{\{1, 0\}, \{1, 0\}\}$

となる.

n 本のコードの向きを長さ $2n$ の正規ガウスワードに合わせて展開をすれば, 長さ $2n$ の向き付き正規ガウスワードが得られる.

例 5. ガウスワード $w = \bar{1}2\bar{3}13\bar{2}$ に合わせて, コードの向き $\{\{1, 0\}, \{0, 1\}, \{1, 0\}\}$ を展開すると `orientation_list` = {1, 0, 1, 0, 0, 1} が求まる.

回転による同一視を行い, 長さ $2n$ の向き付きガウスワードの同型類全体の集合が求まり, order n の arrow diagram の全体の集合が求まる. 以下, arrow diagram の図では $\rightarrow$ を $\bullet$ で表す.

次に, n 本のコードからなる Type (S $\check{\text{III}}$) relators の全体の集合 $\check{R}_4(n)$ と n 本のコードからなる Type (W $\check{\text{III}}$) relators の全体の集合 $\check{R}_5(n)$ を求める. $\check{R}_4(n)$ の場合に基本となる arrow diagram は $[[1\bar{2}3\bar{1}2\bar{3}]]$ である.

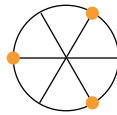


図 9: 基本となる arrow diagram (strong)

$\check{R}_5(n)$ の場合に基本となる arrow diagram は $[[12\bar{3}\bar{1}3\bar{2}]]$ と $[[\bar{1}2\bar{3}13\bar{2}]]$ である.

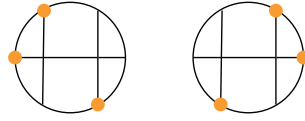


図 10: 基本となる arrow diagram (weak)

向きなしの場合と同様に，これらの基本となる arrow diagram に arrow を追加し，回転による同一視をし，ライデマイスター移動などの操作を行えば， $\check{R}_4(n)$ と $\check{R}_5(n)$ が求められる．

例 6. $b = 2, 3, 4, 5$ に対して，向きなしの場合，向き付きの場合に weak RIII relator, strong RIII relator の計算結果を載せておく．

b	2	3	4	5	6
$\dim V_w(b, b+1)$	0	0	0	0	?
$\dim V_s(b, b+1)$	1	1	1	1	?
$\dim V_w^{\text{ori}}(b, b+1)$	1	3	13	?	?
$\dim V_s^{\text{ori}}(b, b+1)$	3	18	145	?	?