# A preorder of chord diagrams coming from spherical curves

瀧村　祐介　(学習院中等科)

**概　要**

円周上に偶数個の点が配置され、２点ずつ chord で結ばれたものを chord diagram という。spherical curve を、円周の球面へのはめ込みとしたときの逆像において、同一の交点となる2 点をつなぐことにより、chord diagram が得られる。chord diagram における preorder を定義し、spherical curve の集合の特徴付けを行った。

## 1. Introduction

**Definition 1.** 円周上に $2n$ 個の点を、2点ずつペアにして配置したものを chord diagram といい、$CD$ と表す。$CD$ の円周上のペアの2点は、chord で結ぶことにする。spherical curve $P$ の crossing の逆像を chord で結ぶことによって、$P$ の chord diagram が得られ、$CD_P$ と表す (例：図1)。コード図 $CD$ を実現する spherical curve が存在するとき、$CD$ を実現可能と呼ぶ。

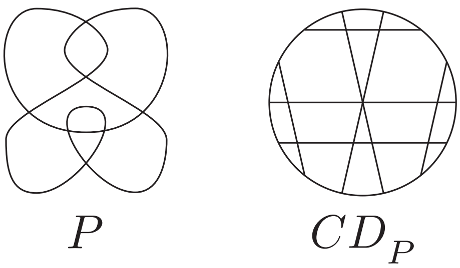

図 1: A spherical curve and the chord diagram

**Definition 2.** $CD^{(A)}, CD^{(B)}$ を chord diagram とする。chord diagram $CD_P$ が $CD^{(A)}$ を含むような spherical curve $P$ 全体からなる集合を $PROJ(CD^{(A)})$ と表す。$PROJ(CD^{(A)}) \supset PROJ(CD^{(B)})$ が成り立つとき、$CD^{(B)}$ は $CD^{(A)}$ の *minor* であるといい、$CD^{(A)} \geq CD^{(B)}$ または $CD^{(B)} \leq CD^{(A)}$ と表す。

**Proposition 1.** 任意のコード図 $CD$ において、 $PROJ(CD) \neq \emptyset$ である。

**Proposition 2.** $CD^{(A)}, CD^{(B)}$ を chord diagram とする。
(1) $CD^{(B)}$ が $CD^{(A)}$ を含んでいれば、 $PROJ(CD^{(A)}) \supset PROJ(CD^{(B)})$ である。
(2) $CD^{(B)}$ が実現可能で、$PROJ(CD^{(A)}) \supset PROJ(CD^{(B)})$ であれば、$CD^{(B)}$ は $CD^{(A)}$ を含んでいる。

**Proposition 3.** 全ての chord diagram からなる集合を $\mathcal{ACD}$ と表す。次の (1), (2) が成り立つため、($\mathcal{ACD}$, $\leq$) は preordered set になる。
(1) $CD^{(A)} \leq CD^{(A)}$ (the reflexive law)
(2) $CD^{(A)} \leq CD^{(B)}$ かつ $CD^{(B)} \leq CD^{(C)}$ ならば $CD^{(A)} \leq CD^{(C)}$ (the transitive law)

**Proposition 4.** 全ての実現可能な chord diagram からなる集合を $\mathcal{ARCD}$ と表す。Proposition 2 より、Proposition 3 の (1), (2) と次の (3) が成り立つため、($\mathcal{ARCD}$, $\leq$) は partially ordered set になる。
(3) $CD^{(A)} \leq CD^{(B)}$ かつ $CD^{(B)} \leq CD^{(A)}$ ならば $CD^{(A)} \cong CD^{(B)}$ (the antisymmetric law)

knot における preorder は [2] で定義されている。$PROJ(CD^{(X)})(X \in \{2, 3a, 3b\})$ については、[3, 4] で研究されている。今回、$PROJ(CD^{(Y)})(Y \in \{4a, 4b, 4c, 4d, 4e, 4f\})$ について、次の結果を得た (図 2 参照)。

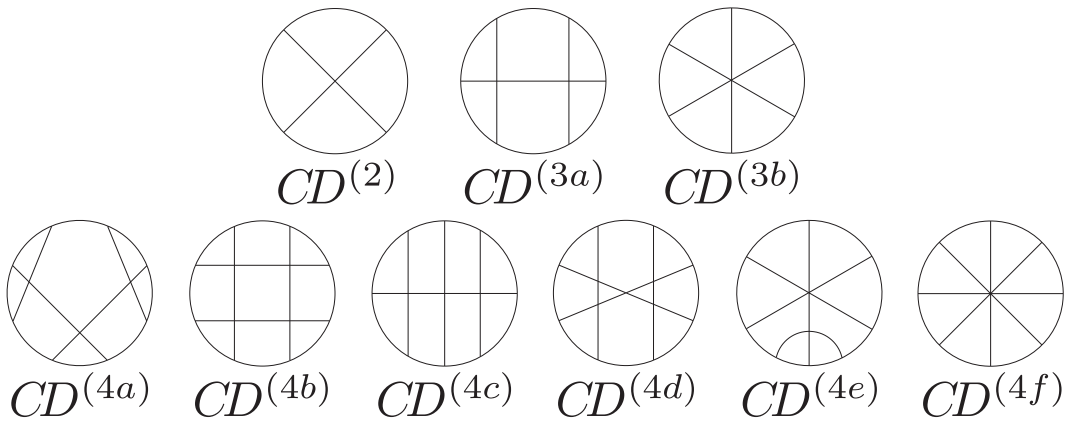


図 2: chord diagrams

**Theorem 1.** $CD^{(4e)}$ は $CD^{(4d)}$ の minor である。

**Theorem 2.** $P$ を prime spherical curve とする ($T_n, Z, R$ は 図3 を参照)。
(1) $CD_P$ が $CD^{(3b)}$ を含み、$CD^{(4d)}$ を含まないなら、$P$ は $T_n$ $(n \geq 2)$ である。
(2) $CD_P$ が $CD^{(3b)}$ を含み、$CD^{(4e)}$ と $CD^{(4f)}$ を含まないなら、$P$ は $Z(2p_1+1, 2p_2+1, 2p_3+1)$ である。
(3) $CD_P$ が $CD^{(3a)}$ を含み、$CD^{(4a)}$ と $CD^{(4d)}$ を含まないなら、$P$ は $R(2s, 2t)$ である。

**Theorem 3.** $CD_P$ が $CD^{(4d)}$ を含むなら、$CD_P$ は $CD^{(4a)}$, $CD^{(4b)}$, $CD^{(4c)}$ のどれかを少なくとも 1 つ含む。

**Proposition 5.**
(1) $CD_P$ が $CD^{(3a)}$ を含むなら、$CD_P$ は $CD^{(4b)}$ または $CD^{(4d)}$ を含む。

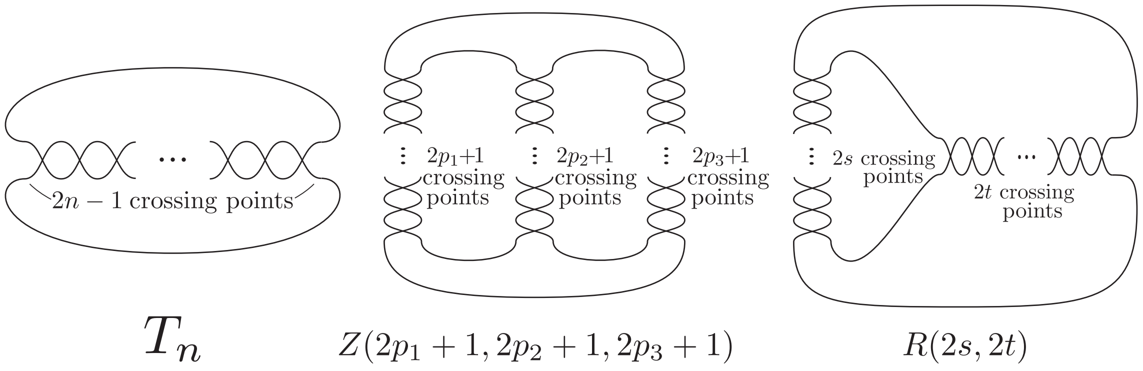


図 3: $T_n, Z(2p_1+1, 2p_2+1, 2p_3+1), R(2s, 2t)$

(2) $CD_P$ が $CD^{(4a)}$ を含むなら、$CD_P$ は $CD^{(4c)}$ または $CD^{(4d)}$ を含む。

Proposition 2 (1) と Theorem 1 より、図4のような Hasse diagram が得られる。線の上側の chord diagram は、線の下側の chord diagram の minor であることを表している。

$\mathcal{T} = \{T_n \mid n$ : positive integer$\}$, $\mathcal{Z} = \{Z(2p_1+1, 2p_2+1, 2p_3+1) \mid p_1, p_2, p_3$ : non-negative integers$\}$, $\mathcal{R} = \{R(2s, 2t) \mid s, t$ : positive integers$\}$ とする。chord diagram $CD_P$ が $CD^{(A)}$ を含むような prime spherical curve $P$ 全体からなる集合を $\mathcal{P}$-$PROJ(CD^{(A)})$ と表す。以上より、図5、図6 の Venn diagram が得られる。$\emptyset$ は空集合である。

## 参考文献


[1] Eliahou, Shalom; Harary, Frank; Kauffman, Louis H, Lune-free knot graphs, *J. Knot Theory Ramifications* **17** (2008), no. 1, 55–74.

[2] K. Taniyama, A partial order of knots, *Tokyo J. Math.* **12** (1989), 205–229.

[3] M. Sakamoto and K. Taniyama, Plane curves in an immersed graph in $\mathbb{R}^2$, *J. Knot Theory Ramifications* **22** (2013), 1350003, 10pp.

[4] N. Ito and Y. Takimura, A characterization of knot projections by triple chords, preprint.

[5] N. Ito and Y. Takimura, Sub-chord diagrams of knot projections, *Houston J. Math.* **41** (2015), no. 2, 701–725.



Gakushuin Boys' Junior High School, 1-5-1 Mejiro Toshima-ku Tokyo 171-0031, Japan
E-mail address: Yusuke.Takimura@gakushuin.ac.jp

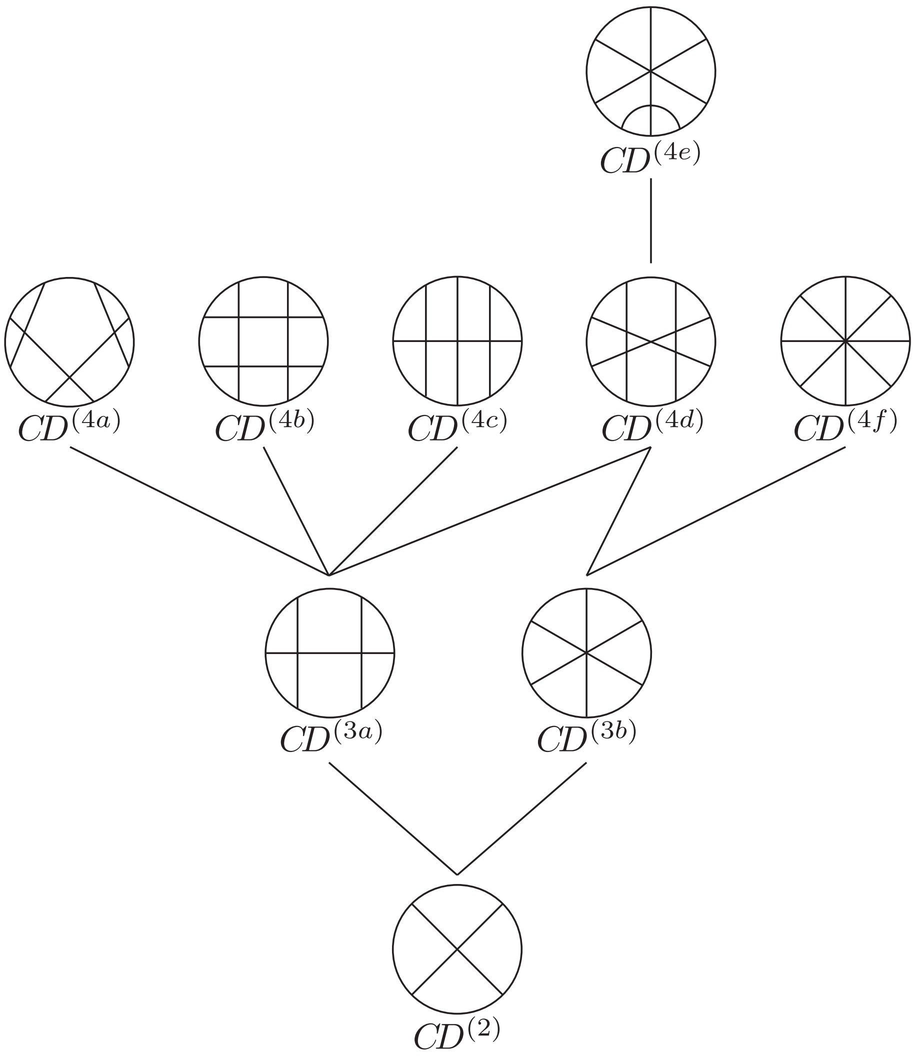


図 4: A Hasse diagram of chord diagrams

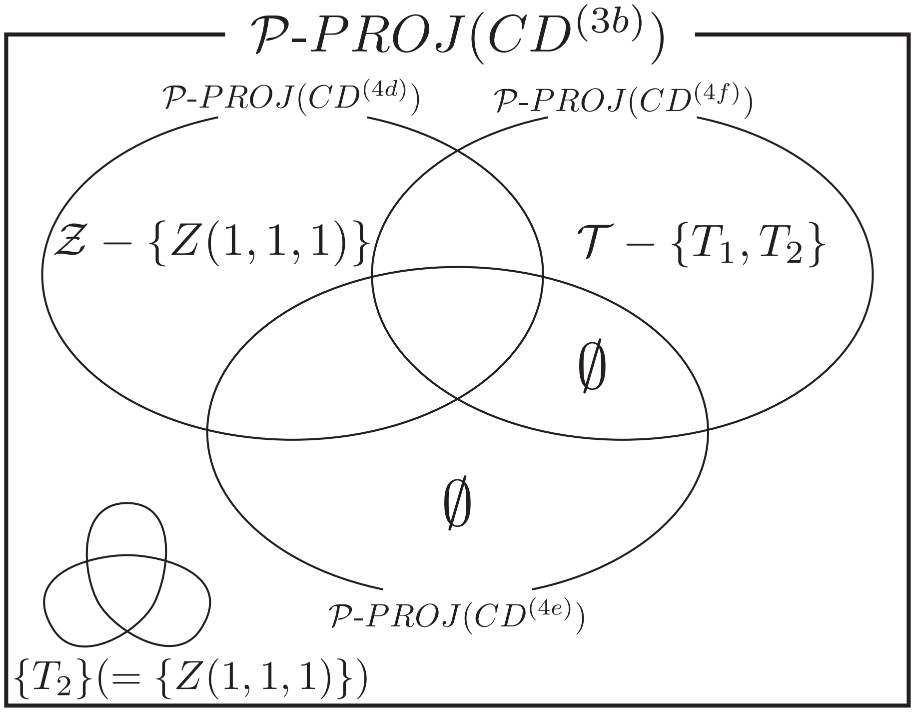


図 5: A Venn diagram

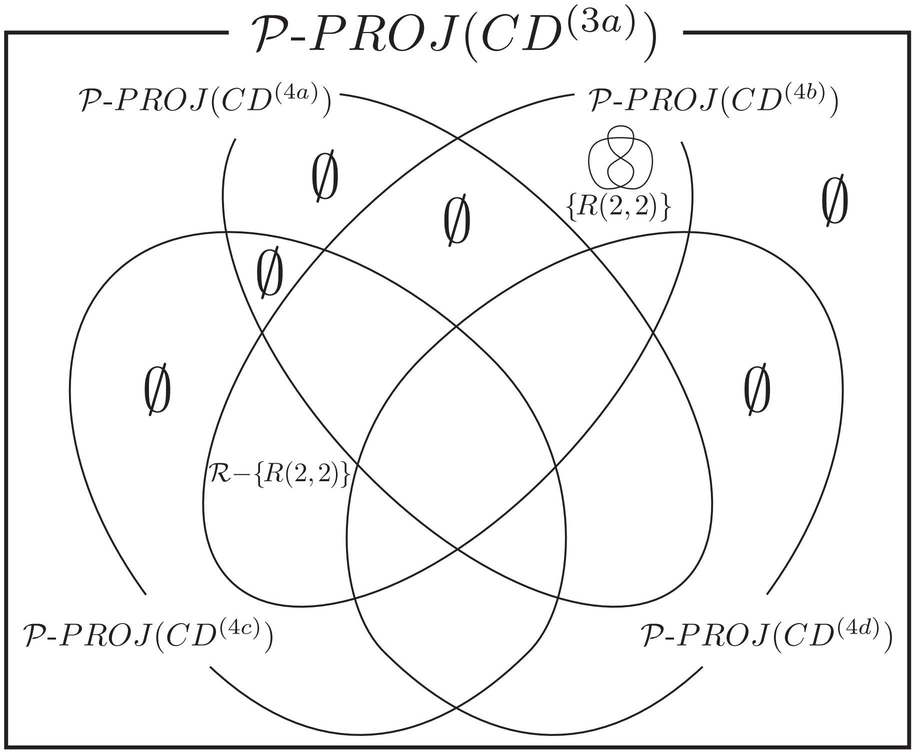


図 6: A Venn diagram