セパタクロー絡み目について

松田 能文 (青山学院大学理工学部)*

1 導入

セパタクローは東南アジア発祥の球技で, そのボールはアニュラスたちを編んだ対称性の高い構造をしている.

セパタクローのボールを幾何学を用いて研究する方法は様々なものが考えられる. ここでは, 編みの構造に注目し, アニュラスたちの幅を無視して得られる絡み目を考える. この絡み目を**セパタクロー絡み目**と呼ぶことにする.

図 1: セパタクローのボール

以下では, セパタクロー絡み目の性質について紹介する. さらに, セパタクロー絡み目を含む絡み目のクラスとして講演で述べたアイデアを修正したタクロー絡み目についても触れる.

*ymatsuda@gem.aoyama.ac.jp

2　セパタクロー絡み目

2.1　二十・十二面体とセパタクロー絡み目

セパタクロー絡み目の構造を記述しようとすると二十・十二面体が自然と現れる.

二十・十二面体とは正二十面体の各頂点を辺の中点を通る面で切り落として得られる多面体である. 各辺は正三角形の面と正五角形の面により共有され, 各頂点のまわりには正三角形と正五角形が 2 個ずつある.

したがって, 二十・十二面体の辺たちは次数 4 の正則グラフをなすので, 頂点を二重点とする空間グラフとみなせる. これらの二重点たちを解消して交代絡み目になるようにすると, セパタクロー絡み目が鏡像の不定性を除いて得られる.

この議論により, セパタクロー絡み目の図式として図 2 が得られる (二十・十二面体の正三角形の面を中心に考えると周期 3 の回転対称性を持つ図式が得られる).

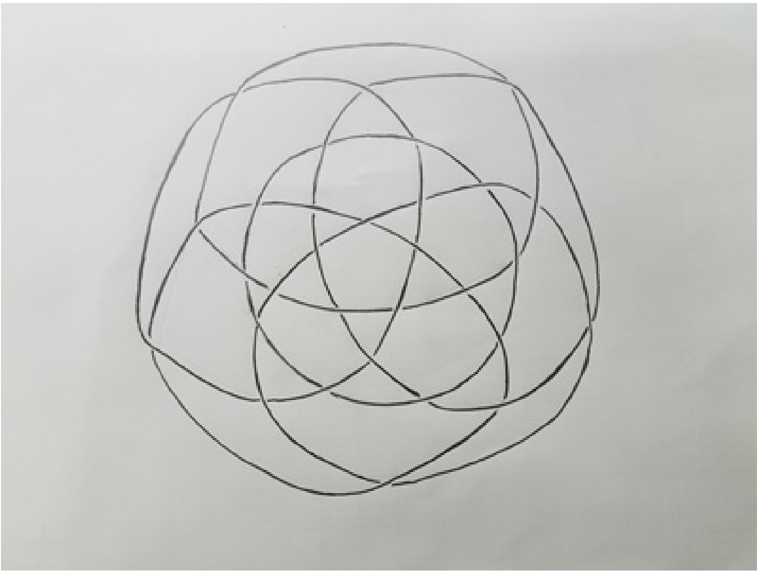

図 2: セパタクロー絡み目の図式

セパタクロー絡み目の各成分は二十・十二面体の同一平面内にある 10 個の辺に対応していることに注意しておく.

2.2　セパタクロー絡み目の性質

セパタクロー絡み目は以下の性質を持つ

命題 1 (セパタクロー絡み目の性質)

1. 正二十面体群の対称性を持つ.

2. 6 成分の交代絡み目で, 交点数は 30 である.

3. 2 成分部分絡み目は全てホップ絡み目である.

4. 双曲絡み目である.

5. 6 次の組み紐の閉包として表せる.

6. ファイバー絡み目である.

2,3 は図 2 を見ても分かるが, 各成分と二十・十二面体の 10 本の辺との対応を用いて以下のように考えても分かる. 二十・十二面体の辺は 60 個なので, セパタクロー絡み目の成分数は $60/10 = 6$ 個である. また, 各 2 成分の交点は 2 個である. この交代図式の既約性から交点数は 30 である. さらに, 各成分の 2 交点の間には辺が $10/2 = 5$ 個ずつ対応しているので, 交代性より 2 成分部分絡み目は自明でなくホップ絡み目である.

4 は図 2 の交代性と [4] の結果から従う.

5 は図 2 の図式が自然に 6 次の組み紐の閉包と見なせることから分かる. 外側のひもから順に番号付けし反時計回りに向きを入れるとき, 図式が周期 5 の回転対称性を持つことに注意すると, $(\sigma_1^{-1}\sigma_4\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_5^{-1}\sigma_3^{-1})^5$ の閉包として表せることが分かる.

6 は上で現れた組み紐が斉次であることから分かる. ここで, p 次の組み紐 b が斉次であるとは, b の表示 $b = \sigma_{i_1}^{e_1}\cdots\sigma_{i_k}^{e_k}$ であって各 $j = 1, \ldots, p-1$ について σ_j か σ_j^{-1} の少なくとも一方は現れかつ σ_j と σ_j^{-1} がともに現れることはないような表示を持つことをいう. [5] により斉次な組み紐の閉包はファイバー絡み目である.

注 1 セパタクロー絡み目はタークスヘッド絡み目で (もその鏡像でも) ないことに注意する. ここで, (p, q) タークスヘッド絡み目は p 次の組み紐 $(\sigma_1\sigma_2^{-1}\cdots\sigma_{p-1}^{(-1)^{p-1}})^q$ の閉包として得られる絡み目とする. タークスヘッド絡み目はトーラス絡み目から自然な交差交換により得られ, 簡潔な交代絡み目のなすクラスの一つといえる.

3 タクロー絡み目

3.1 定義と例

二十・十二面体は, 外接球の中心から外接球面に射影すると辺たちは大円の和集合となる, という注目すべき性質を持つ (同様の性質を持つ多面体として正八面体と立方八面体がある).

このことに注目して, セパタクロー絡み目の一般化であるタクロー絡み目を以下のように定義する.

定義 1（タクロー絡み目）2 次元球面の n 個の大円をどの 3 個も共有点を持たないようにとる．このとき, 大円たちのなす空間グラフの二重点を解消して得られる交代絡み目を n 成分**タクロー絡み目**という [1].

タクロー絡み目は [1] で扱われている 4 正則グラフに付随する交代絡み目の特殊な場合にあたる．

例 1（タクロー絡み目の基本的な例）n 成分タクロー絡み目の基本的な例として, (n, n) タークスヘッド絡み目がある．

2 次元球面の大円を 1 つとると, 球面の中心を通り大円を含む平面に直交しない直線を軸とする位数 n の回転群の作用により n 個の大円が得られる．この大円たちから得られるタクロー絡み目は (n, n) タークスヘッド絡み目である．$n = 1$ のときは自明な結び目, $n = 2$ のときはホップ絡み目, $n = 3$ のときはボロミアン環である．

3.2 6 成分以下のタクロー絡み目

n 成分タクロー絡み目は鏡像の不定性を除くと 2 次元球面の n 個の大円の配置でどの 3 個も共有点を持たないようなものから与えられるのであった．このような配置の組合せ的な同値類は実射影平面の n 個の直線の単純配置の同値類と対応している．後者の個数を $n = 1$ から 10 まで並べると,

$1, 1, 1, 1, 1, 4, 11, 135, 4381, 312114$

となる (実射影平面の直線の配置については [2], [3] などを参照されたい).

したがって, $n \leq 5$ のとき, n 成分タクロー絡み目は鏡像の不定性を除いて唯一つであり (n, n) タークスヘッド絡み目のみである．

そして, $n = 6$ で初めてタークスヘッド絡み目でない n 成分タクロー絡み目が現れる．タークスヘッド絡み目でない 6 成分タクロー絡み目は鏡像の不定性を除いて 3 つ存在する．そのうちの 1 つがセパタクロー絡み目であり, 3 つの中では最も対称性の高いものとして特徴づけられる [2].

注 2 2 次元球面の n 個の大円の配置でどの 3 個も共有点を持たないようなものの組合せ的な同値類が n 成分タクロー絡み目と鏡像の不定性を除いて 1 対 1 に対応しているかは少なくとも筆者は分かっていない ($n = 6$ の時は絡み目の不変量（例えば, 補空間の双曲体積）を用いて確かめられた).

---

[1] 大円交代絡み目などと呼びたいところであるが, 各成分が 3 次元球面の大円である絡み目が大円絡み目と呼ばれている [6] ので, タクロー絡み目と呼ぶことにした．なお, タクローはタイ語で籐で編んだボール, セパはマレー語で蹴るという意味である

[2] セパタクローボールが現在の形状になる過程でこのような気づきがあったかもしれない

注 3 セパタクロー絡み目の注目すべき性質として, 正二十面体群の対称性を持つことも挙げられる. 正二十面体群の対称性を持つタクロー絡み目はセパタクロー絡み目以外にも存在する.

例えば, 2 次元球面に内接する正十二面体の頂点を端点とする 10 本の直径を考え, 各直径に直交する平面に含まれる大円たちを考える. この大円たちから得られる 10 成分のタクロー絡み目は正二十面体群の対称性を持つ (正十二面体を正二十面体を置き換えて同様の構成をするとセパタクロー絡み目が得られる. また, 正八面体, 立方体に置き換えて同様の構成をして得られるのが, 3 成分タクロー絡み目 (すなわちボロミアン環), 4 成分タクロー絡み目である).

3.3 タクロー絡み目の性質

セパタクロー絡み目のいくつかの性質はタクロー絡み目に以下のように一般化される.

命題 2 (タクロー絡み目の性質)

1. n 成分タクロー絡み目の 2 成分部分絡み目は, n が偶数のときはホップ絡み目であり, n が奇数のときは自明である.

2. 3 成分以上のタクロー絡み目は双曲絡み目である.

3. n 成分タクロー絡み目は斉次である n 次の組み紐の閉包として表せる. 特に, タクロー絡み目はファイバー絡み目である.

1,2 は命題 1 の 3,4 と同様の議論で確かめられる.

3 も命題 1 の 5.6 と同様の方針で証明できる. 概要は以下の通りである. タクロー絡み目を与える n 個の大円たちを立体射影し交差の情報を与えることにより, 図 2 のセパタクロー絡み目の図式と同様な図式が得られる. もちろん対称性は失われうるが, 注目すべきことは, 図式の中心を始点とする線分は元の 2 次元球面上では n 個の大円とは別の大円の一部に対応していることである. このことから, 図式の中心を始点とする半直線は各成分と 1 点で交わることが分かる. よって, この図式は n 次の組み紐の閉包とみなせる. 絡み目の交代性からこの組み紐が斉次であることも分かる.

セパタクロー絡み目, より広く 6 成分以上のタクロー絡み目について上で述べた性質などを足掛かりに研究を深めていくことは今後の課題である.

参考文献

[1] I. Aitchison, E. Lumsden and J. Rubinstein, Cusp structures of alternating links, Invent. math. 109 (1992), no. 1, 473–494.

[2] S. Felsner and J. Goodman, Pseudoline Arrangements, Handbook of Discrete and Computational Geometry (3rd ed.) 125–157, CRC Press, 2017.

[3] B. Grünbaum, Convex Polytopes, Graduate Texts in Mathematics, 221 (2nd ed.), Springer-Verlag, 2003.

[4] W. Menasco, Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements, Topology 23 (1984), 37–44.

[5] J. Stallings, Constructions of fibred knots and links, Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, 55–60, Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1978.

[6] G. Walsh, Great circle links and virtually fibered knots, Topology 44 (2005), 947–958.

.