

# Property of the interior polynomial from the HOMFLY polynomial

嘉藤 桂樹 (東京工業大学)\*

## 概 要

HOMFLY 多項式  $P_L(v, z)$  は絡み目  $L$  の多項式不変量であり、鏡像やミューテーションに関係する様々な性質が知られている。例えば、絡み目  $L$  の鏡像  $L^*$  の HOMFLY 多項式  $P_{L^*}(v, z)$  は  $P_L(-v^{-1}, z)$  になる。また、内部多項式は (符号付き) 二部グラフの多項式不変量であり、その二部グラフが平面であるときは、その平面二部グラフから構成される絡み目の HOMFLY 多項式と関係があることが分かっている。そのため、平面グラフの場合には、鏡像に関する性質が、内部多項式の場合にも成り立つことが簡単にわかる。今回、平面でない場合も含め、鏡像についての公式が成り立つことを、Ehrhart 反転公式を用いて証明した。また、絡み目のフライブ操作やミューテーションを二部グラフに導入し、それらの操作で内部多項式が不変であることも証明した。

## 1. 導入

この章では、HOMFLY 多項式、内部多項式、Ehrhart 多項式についての説明をまとめる。

### 1.1. HOMFLY 多項式

HOMFLY 多項式  $P_L(v, z)$  は絡み目不変量であり、2変数多項式で表される [3]。HOMFLY 多項式は Alexander 多項式  $\Delta_L(t)$  と Jones 多項式  $V_L(t)$  の両方の情報を含んでいる。実際、 $\Delta_L(t) = P_L(1, t^{1/2} - t^{-1/2})$  と  $V_L(t) = P_L(t, t^{1/2} - t^{-1/2})$  という関係式が成り立っている。このとき、Morton によって、以下のような  $\deg_z P_D(v, z)$  の上限が知られている。

**定理 1.1** (Morton, [9]). 任意の絡み目図式  $D$  に対して、 $\deg_z P_D(v, z) \leq c(D) - s(D) + 1$  が成り立つ。ここで、 $c(D)$  は図式  $D$  の交点数、 $s(D)$  は図式  $D$  のザイフェルト周の個数である。

また、絡み目図式  $D$  の HOMFLY 多項式を  $v$  の一変数多項式  $p_D^k(v)$  を用いて、以下のように表す。

$$P_D(v, z) = \sum p_D^k(v) z^k.$$

Morton の不等式を利用して、HOMFLY 多項式の top を以下のように定義する。

### 定義 1.2.

$$\text{Top}_D(v) = p_D^{c(D)-s(D)+1}(v).$$

絡み目  $L$  によっては、 $\text{Top}_{D_1} \neq 0, \text{Top}_{D_2} = 0$  となる  $L$  の 2 つの図式  $D_1, D_2$  が存在することを注意する。また、絡み目  $L$  の任意の図式  $D$  に対し、 $\text{Top}_D = 0$  となる  $L$  が存在する。次の章では、二部グラフの内部多項式の係数とその二部グラフから構成される絡み目の図式の HOMFLY 多項式の top の係数が一致することを説明する。

\* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学 理学院数学系  
e-mail: kato.k.at@m.titech.ac.jp

## 1.2. 内部多項式

定義による二部グラフの内部多項式の計算は、今年の『結び目の数学』報告集 [8] を参考にしてほしい。今回は、簡単な歴史的流れと漸化公式による計算を説明する。内部多項式はもともと超グラフに定義されたものである。超グラフ  $\mathcal{H} = (V, E)$  は、頂点集合  $V$  と超辺集合  $E$  からなるものである。超辺とは、3 点以上の頂点を結ぶことができる辺を許すものである。この超グラフに spanning tree を拡張した hypertree を導入して、Tutte の activity を利用して、Kálmán 氏は内部多項式  $I_{\mathcal{H}}(x)$  を定義した [4]。

超グラフ  $\mathcal{H} = (V, E)$  は、 $V$  と  $E$  を頂点として考え、超グラフとして  $e \in E$  が  $v \in V$  を含むとき、 $e$  と  $v$  を結ぶことで、二部グラフ  $G = (V, E, \mathcal{E})$  が構成できる。また、二部グラフ  $G = (V, E, \mathcal{E})$  に対し、カラークラスの方  $E$  を超辺集合とみなすことで、超グラフ  $\mathcal{H} = (V, E)$  を構成できる。前者の構成は一意だが、後者の構成は超辺集合にするカラークラスを変えることで別の超グラフ  $\overline{\mathcal{H}} = (E, V)$  が構成できる。以下の事実が Kálmán 氏と Postnikov 氏によって、証明された。

**定理 1.3** (T. Kálmán and A. Postnikov, [6]). 任意の超グラフ  $\mathcal{H}$  に対して、 $I_{\mathcal{H}} = I_{\overline{\mathcal{H}}}$  が成り立つ。

以上から、1 つの二部グラフから 2 つの超グラフが構成することができるが、そのどちらの内部多項式も同じなので、内部多項式は二部グラフの多項式不変量とみなすことができる。以降、二部グラフ  $G$  の内部多項式を  $I_G$  と書く。また、内部多項式は、Tutte 多項式  $T(1/x, 1)$  のある種の一般化になっている。

**注意 1.4.** グラフ  $G = (V, E)$  に対して、 $G$  の各辺に新しい頂点を置き、その頂点集合を  $E'$  として、二部グラフ  $\tilde{G} = (V, E', E)$  を定義する (辺集合  $E$  は元の辺集合より倍の個数を含む)。このとき、 $I_{\tilde{G}}(x) = x^{|V|-1} T_G(1/x, 1)$  が成り立つ。

平面二部グラフ  $G = (V, E, \mathcal{E})$  の辺に正の交点を対応させることで特殊交代関式  $L_G$  が得られる。特殊交代関式  $D$  は homogeneous 関式に含まれ、 $\text{Top}_D(v) \neq 0$  であることが知られている [2]。平面二部グラフ  $G$  に対し、 $\text{Top}_{L_G}$  の係数と内部多項式の係数が等しくなることがわかる。

**定理 1.5** (T. Kálmán, H. Murakami and A. Postnikov, [5, 6]).  $G = (V, E, \mathcal{E})$  を連結平面二部グラフとすると、以下が成り立つ。

$$\text{Top}_{L_G}(v) = v^{|\mathcal{E}| - (|V| + |E|) + 1} I_G(v^2).$$

非連結グラフ  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{k(G)}$  ( $k(G)$  は  $G$  の連結成分の個数) の場合は、 $G$  の内部多項式を  $I_G(x) = (1-x)^{k(G)-1} \prod_{i=1}^{k(G)} I_{G_i}(x)$  と定義することで、定理の拡張ができる。次に、符号付き二部グラフの内部多項式について定義する。ここでは、 $G = (V, E, \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-)$  を正の辺集合  $\mathcal{E}_+$  と負の辺集合  $\mathcal{E}_-$  をもつ符号付き二部グラフとする。

**定義 1.6** (符号付き内部多項式).

$$I_G^+(x) = \sum_{S \subseteq \mathcal{E}_-} (-1)^{|S|} I'_{G \setminus S}(x).$$

ここで、 $G \setminus S$  は  $G$  から  $S$  に含まれる全ての辺を消去し、残った辺の符号を忘れて得られる二部グラフとする。

平面符号付き二部グラフ  $G$  の全ての辺に正負それぞれ図1のような交点を与えることで特殊図式  $L_G$  が得られる。このとき、 $\text{Top}_{L_G}$  の係数が内部多項式  $I_G^+$  の係数と一致する。



図 1: 正の交点と負の交点

定理 1.7 (K.).  $G = (V, E, \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-)$  を平面符号付き二部グラフとする。このとき、

$$\text{Top}_{L_G}(v) = v^{|\mathcal{E}_+| - |\mathcal{E}_-| - (|V| + |E|) + 1} I_G^+(v^2)$$

が成り立つ。

例 1.8. 符号付き二部グラフ  $G$  を図2のように定義する。このとき、符号付き内部多項式は表1のように計算される。また、図2のように  $G$  から得られる絡み目  $L_G$  を構成する。この絡み目は実際、非交代絡み目になっている。HOMFLY 多項式  $P_{L_G}(v, z)$  は以下のように計算され、 $\text{Top}_{L_G}(v) = 1v^3$  となり、 $I_G^+(x) = 1x^3$  と係数が一致していることがわかる。

$$P_{L_G}(v, z) = \begin{matrix} & & +1v^3z^3 \\ & +4v^3z & -1v^5z \\ -1vz^{-1} & +3v^3z^{-1} & -2v^5z^{-1}. \end{matrix}$$

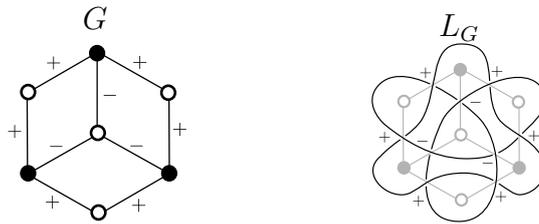


図 2: 符号付き二部グラフ  $G$  と  $G$  から得られる絡み目  $L_G$

表 1: 内部多項式  $I_G^+(x)$  の計算

	$(-1)^{ S } I'_{G \setminus S}(x)$	
	$1x^0 + 3x^1 + 3x^2$	$\times 1$
	$-(1x^0 + 2x^1 + 2x^2)$	$\times 3$
	$1x^0 + 1x^1 + 1x^2$	$\times 3$
	$-(1x^0 + 0x^1 + 0x^2 - 1x^3)$	$\times 1$

$$I_G^+(x) = 0x^0 + 0x^1 + 0x^2 + 1x^3$$

以上より、特殊図式であれば、その Seifert グラフ (これは必ず平面符号付き二部グラフになる) の内部多項式の係数が、HOMFLY 多項式の top の係数に一致する。絡み目図式が特殊図式でないときは、村杉分解によって、特殊図式の村杉和で表すことができる。また、村杉和と HOMFLY 多項式について、以下の公式が知られている。

**命題 1.9** (Murasugi and Przytycki, [10]).  $D_1 * D_2$  を  $D_1$  と  $D_2$  の村杉和で得られる絡み目図式とする。このとき、

$$\text{Top}_{D_1 * D_2}(v) = \text{Top}_{D_1}(v) \text{Top}_{D_2}(v)$$

が成り立つ。

絡み目図式の村杉和を Seifert グラフ (二部グラフ) で考えると、それぞれの頂点 1 つを同一視する操作 (これをブロック和と呼ぶ) が考えられる。この操作によって得られる二部グラフの内部多項式は、元の 2 つのグラフの内部多項式の積になる。これは、符号無し二部グラフについては Kálmán 氏によって証明され [4]、符号付き二部グラフの場合についても証明した [7]。

**命題 1.10.**  $G_1 * G_2$  を 2 つの符号付き二部グラフ  $G_1$  と  $G_2$  のブロック和で得られる符号付き二部グラフとする。このとき、

$$I_{G_1 * G_2}^+(x) = I_{G_1}^+(x) I_{G_2}^+(x)$$

が成り立つ。

この 2 つの命題から、一般の絡み目図式について、その HOMFLY 多項式の top とその Seifert グラフの内部多項式の係数が一致することがわかる。

**定理 1.11** (K.).  $D$  を任意の有向絡み目図式とし、 $G = (V, E, \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-)$  をその Seifert グラフとする。このとき、

$$\text{Top}_D(v) = v^{|\mathcal{E}_+| - |\mathcal{E}_-| - (|V| + |E|) + 1} I_G^+(v^2)$$

が成り立つ。

*Proof.* 村杉和による分解  $D = D_1 * \dots * D_n$  (このとき、 $D_1, \dots, D_n$  は特殊図式とする) を考える。また、ブロック和による分解  $G = G_1 * \dots * G_n$  (このとき、 $G_i = (V_i, E_i, \mathcal{E}_+^i \cup \mathcal{E}_-^i)$  は平面的で、 $L_{G_i} = D_i$  とする) を考える。 $L_{G_i} = D_i$  より、定理 1.7 を用いて、

$$\text{Top}_{D_i}(v) = v^{|\mathcal{E}_+^i| - |\mathcal{E}_-^i| - (|V_i| + |E_i|) + 1} I_{G_i}^+(v^2)$$

が成り立つ。また、命題 1.9 と命題 1.10 より、結論が得られる。

$$\begin{aligned} \text{Top}_D(v) &= \text{Top}_{D_1 * \dots * D_n}(v) \\ &= \text{Top}_{D_1}(v) \cdots \text{Top}_{D_n}(v) \\ &= v^{|\mathcal{E}_+^1| - |\mathcal{E}_-^1| - (|V_1| + |E_1|) + 1} I_{G_1}^+(v^2) \cdots v^{|\mathcal{E}_+^n| - |\mathcal{E}_-^n| - (|V_n| + |E_n|) + 1} I_{G_n}^+(v^2) \\ &= v^{(|\mathcal{E}_+^1| + \dots + |\mathcal{E}_+^n|) - (|\mathcal{E}_-^1| + \dots + |\mathcal{E}_-^n|) - (|V_1| + \dots + |V_n|) + (|E_1| + \dots + |E_n|) + n} I_{G_1}^+(v^2) \cdots I_{G_n}^+(v^2) \\ &= v^{|\mathcal{E}_+| - |\mathcal{E}_-| - (|V| + |E|) + (n-1) + n} I_G^+(v^2) \\ &= v^{|\mathcal{E}_+| - |\mathcal{E}_-| - (|V| + |E|) + 1} I_G^+(v^2). \end{aligned}$$

□

また、内部多項式について、以下の公式を証明した。

**定理 1.12.** 二部グラフ  $G$  がサイクル  $\epsilon_1, \delta_1, \epsilon_2, \delta_2, \dots, \epsilon_n, \delta_n$  を持つとき、次が成り立つ。

$$I'_G(x) = \sum_{\emptyset \neq S \subset \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}} (-1)^{|S|-1} I'_{G \setminus S}(x).$$

この定理は Tutte 多項式の削除収縮公式に相当し、この定理を帰納的に使うことで、二部グラフの内部多項式を元の定義を使わず求めることができる。

**例 1.13.** (符号なしの) 二部グラフ  $G$  を図3の一番上にあるような  $K_{23}$  とする。この内部多項式を定理 1.12 を用いて求める。まず、 $G$  の中で、サイクルを 1 つ取る (今回は、外周のサイクルとする)。そして、1 部分を消去し、消去した辺の個数に応じて  $+1$  か  $-1$  をかける。これをグラフが森になる (サイクルがなくなる) まで繰り返す。グラフ  $F$  が成分数  $k(F)$  の森であるとき、その内部多項式は、 $I'_F(x) = (1-x)^{k(F)-1}$  になることはすぐにわかる。あとはこれらの和を取れば、内部多項式が求めることができる。今回は、 $I_G = -1 + 4 - 2(1-x) = 1 + 2x$  となる。

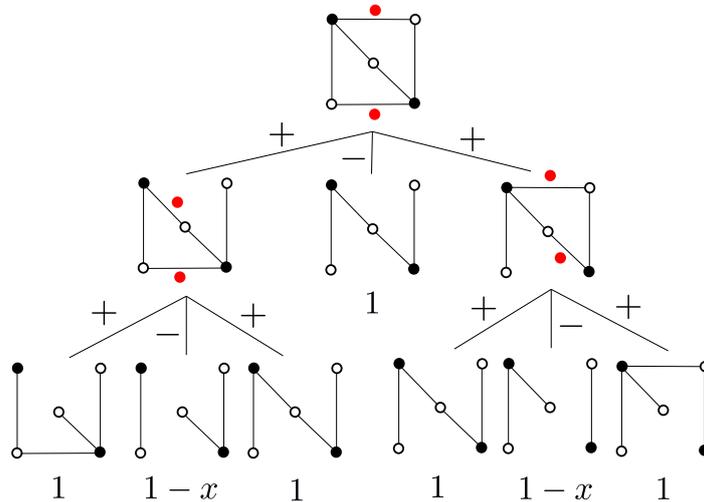


図 3:  $G$  の計算図式

### 1.3. Ehrhart 多項式

二部グラフ  $G = (V, E, \mathcal{E})$  に対して、根多面体  $Q_G$  が以下のようにして定義できる。

**定義 1.14.** 任意の  $v \in V$  と  $e \in E$  に対して、 $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{e}$  をユークリッド空間  $\mathbb{R}^V \oplus \mathbb{R}^E$  の標準生成元とする。このとき、二部グラフ  $G$  の根多面体  $Q_G$  を以下のように定義する。

$$Q_G = \text{Conv}\{\mathbf{v} + \mathbf{e} \mid v \text{ と } e \text{ は } G \text{ の辺で繋がっている}\}.$$

$\dim Q_G = |V| + |E| - 2$  であることが知られており、以降、 $d = |V| + |E| - 2$  とする。

**定義 1.15** (Ehrhart 多項式). 任意の根多面体  $Q_G$  に対して、Ehrhart 多項式  $\varepsilon_{Q_G}(s)$  を以下のように定義する。

$$\varepsilon_{Q_G}(s) = |s \cdot Q_G \cap \mathbb{Z}^V \oplus \mathbb{Z}^E|.$$

一般の多面体  $P$  に対して、 $|s \cdot P \cap \mathbb{Z}^V \oplus \mathbb{Z}^E|$  は、多項式になるとは限らないが、凸多面体で頂点が整数のときは多項式になることが知られている。

定義 1.16 (Ehrhart 級数).

$$\text{Ehr}_{Q_G}(x) = 1 + \sum_{s \in \mathbb{N}} \varepsilon_{Q_G}(s) x^s.$$

この根多面体  $Q_G$  の Ehrhart 級数は、内部多項式と  $1/(1-x)^{d+1}$  の級数展開の積で表すことができる。

定理 1.17 (T. Kálmán and A. Postnikov, [6]). 任意の連結二部グラフ  $G$  に対して、

$$\frac{I_G(x)}{(1-x)^{d+1}} = \text{Ehr}_{Q_G}(x)$$

が成り立つ。

この書き方は、[6] ではされていないが、簡単な計算でわかる [7]。また、この結果は非連結の場合に拡張でき、符号付き二部グラフ  $G = (V, E, \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-)$  の場合にも、Ehrhart 級数を以下のように定義を行うことで、拡張できる [7]。

定義 1.18 (符号付き Ehrhart 級数).

$$\text{Ehr}_G^+(x) = \sum_{S \subseteq \mathcal{E}_-} (-1)^{|S|} \text{Ehr}_{Q_{G \setminus S}}(x).$$

定理 1.19 (K.). 任意の符号付き二部グラフ  $G$  に対して、

$$\frac{I_G^+(x)}{(1-x)^{d+1}} = \text{Ehr}_G^+(x).$$

が成り立つ。

## 2. 主結果

### 2.1. 鏡像

絡み目の鏡像とは、その絡み目図式に対して、鏡写しの図式の絡み目のことをいう。絡み目の鏡像について、以下の性質がよく知られている。

定理 2.1.  $L^*$  を絡み目  $L$  の鏡像とする。このとき、

$$P_{L^*}(v, z) = P_L(-v^{-1}, z)$$

が成り立つ。

例 2.2. 結び目  $5_2$  の図式とその鏡像、その Seifert グラフは図 4 のようになっている。それぞれの HOMFLY 多項式は以下のように計算される。

$$\begin{array}{l} P_{5_2}(v, z) \\ = \begin{array}{ll} +1v^2z^2 & +1v^4z^2 \\ +1v^2z^0 & +1v^4z^0 \end{array} -1v^6z^0. \end{array} \qquad \begin{array}{l} P_{5_2^*}(v, z) \\ = \begin{array}{ll} +1v^{-4}z^2 & +1v^{-2}z^2 \\ -1v^{-6}z^0 & +1v^{-4}z^0 \end{array} +1v^{-2}z^0. \end{array}$$



図 4:  $5_2$  の図式とその鏡像

具体例からもわかるように、鏡像を取ることで、正の交点は負の交点、負の交点は正の交点になっている。また、Seifert グラフを見ると、左右対称であるがひっくり返すことで、元のグラフと形は変わらず、辺の符号が変化しただけである。また、HOMFLY 多項式の top を見ると、係数が入れ替わっていることがわかる。このことは、平面的な二部グラフや絡み目図式の Seifert グラフになっている二部グラフに対しては、定理 2.1 を適用して、成り立つことがすぐわかる。平面的でないものも含む、任意の符号付き二部グラフ  $G$  に対し、辺の符号を入れ替えた符号付き二部グラフ  $-G$  の内部多項式の係数は、 $G$  の内部多項式の係数を反転させたものになることを示す。まず  $G$  が正の辺のみを持つもの考える。

**定理 2.3.**  $G = (V, E, \mathcal{E} = \mathcal{E}_+)$  を正の符号しか持たない符号付き二部グラフとする。このとき、

$$(-1)^{|\mathcal{E}|+d+1} x^{d+1} I_G^+(1/x) = I_{-G}^+(x)$$

が成り立つ。

この定理を証明するために、2つの定理が必要になる。1つ目は、Ehrhart reciprocity と呼ばれる、Ehrhart 理論で有名な定理である [1, Theorem 4.4]。

**定理 2.4** (Ehrhart reciprocity).  $P$  を有理凸多面体とする。このとき、

$$\text{Ehr}_P(1/x) = (-1)^{\dim P+1} \text{Ehr}_{\text{int } P}(x)$$

が成り立つ。

有理凸多面体はその頂点座標が全て有理数である凸多面体であり、根多面体は有理凸多面体である。2つ目は、凸包の存在関数に関する命題である。

**命題 2.5.** 任意の有限集合  $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$  に対し、

$$(-1)^{\dim(\text{Conv } X)} [\text{int}(\text{Conv } X)] = \sum_{S \subseteq X} (-1)^{|S|-1} [\text{Conv } S]$$

が成り立つ。

証明の概略.  $x_1, \dots, x_n$  が線型独立であるときは、 $\text{Conv } X$  は単体になり、この時はすぐに成り立つことがわかる。

$x_1, \dots, x_n$  が線型従属であるときは、 $\text{Conv } X$  の次元を 1 つ下げる射影を考えて、帰納法で証明する。□

定理 2.3 の証明. まず、符号を忘れた二部グラフ  $G$  の根多面体  $Q_G$  に定理 2.4 を適用すると、

$$\text{Ehr}_{Q_G}(1/x) = (-1)^{d+1} \text{Ehr}_{\text{int } Q_G}(x) \quad (1)$$

が得られる。また、任意の  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}$  に対し、二部グラフ  $(V, E, \mathcal{S})$  の根多面体を  $Q_{\mathcal{S}}$  と書くことにする。根多面体  $Q_G, Q_{\mathcal{S}} (\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E})$  は凸包であり、 $Q_{\mathcal{S}}$  は  $Q_G$  を生成する有限集合の部分集合の凸包であるから、命題 2.5 より、以下が成り立つ。

$$(-1)^d [\text{int } Q_G] = \sum_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}} (-1)^{|\mathcal{S}|-1} [Q_{\mathcal{S}}].$$

また、Ehrhart 多項式は、その格子点の個数を数えるものなので、以下の等式ができる。

$$(-1)^d \varepsilon_{\text{int } Q_G}(s) = \sum_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}} (-1)^{|\mathcal{S}|-1} \varepsilon_{Q_{\mathcal{S}}}(s).$$

また、Ehrhart 級数について、同様の式が成り立つ。

$$(-1)^d \text{Ehr}_{\text{int } Q_G}(x) = \sum_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}} (-1)^{|\mathcal{S}|-1} \text{Ehr}_{Q_{\mathcal{S}}}(x). \quad (2)$$

(1) 式と (2) 式により、次の式が得られる。

$$\text{Ehr}_{Q_G}(1/x) = \sum_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}} (-1)^{|\mathcal{S}|} \text{Ehr}_{Q_{\mathcal{S}}}(x).$$

いま、 $G$  は正の辺しか持たないグラフなので、符号付き Ehrhart 級数の定義に、この式を使うと以下のように変形きる。

$$\begin{aligned} (-1)^{|\mathcal{E}|} \text{Ehr}_{Q_G}^+(1/x) &= (-1)^{|\mathcal{E}|} \text{Ehr}_{Q_G}(1/x) \\ &= \sum_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}} (-1)^{|\mathcal{E}|-|\mathcal{S}|} \text{Ehr}_{Q_{\mathcal{S}}}(x) \\ &= \text{Ehr}_{Q_{-G}}^+(x). \end{aligned}$$

ここで、定理 1.19 を使うと、以下のように内部多項式で記述できる。

$$(-1)^{|\mathcal{E}|} \frac{I_G^+(1/x)}{(1-1/x)^{d+1}} = \frac{I_{-G}^+(x)}{(1-x)^{d+1}}.$$

以上より、以下が成り立つ。

$$(-1)^{|\mathcal{E}|+d+1} x^{d+1} I_G^+(1/x) = I_{-G}^+(x).$$

□

また、負の辺の数  $|\mathcal{E}_-|$  による帰納法により、任意の符号付き二部グラフに対し、以下の定理が成り立つ。

**定理 2.6 (K.).** 任意の符号付き二部グラフ  $G = (V, E, \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-)$  に対し、 $-G$  を  $G$  の辺の符号を全て入れ替えたものとする。このとき、

$$(-1)^{|\mathcal{E}_+|+|\mathcal{E}_-|+|E|+|V|-1} x^{|E|+|V|-1} I_G^+(1/x) = I_{-G}^+(x)$$

が成り立つ。

## 2.2. フライプ操作とミューテーション

HOMFLY 多項式が不変である、絡み目図式の変形で有名なのが、フライプ操作とミューテーションである。フライプ操作は図5のように、タングルと隣り合う交点を取り、捻ってひっくり返す操作である。フライプ操作はイソトピー変形で、絡み目としては変化しないため、当然 HOMFLY 多項式は変化しない。

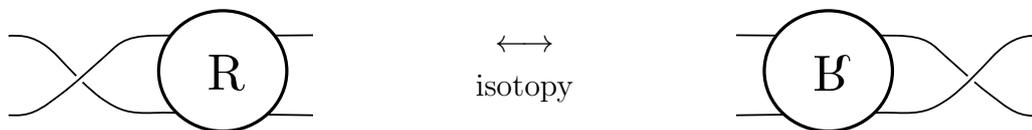


図 5: 絡み目のフライプ操作

このフライプ操作の前後の図式の Seifert グラフ（の一例）を考えると、図6のようなグラフになる。操作の前後を見ると、タングル内部と連結しているのは2箇所のみで、左側の辺が右側に移る。また、タングル内はひっくり返り、頂点のカラークラスは入れ替わることがわかる。結果、このフライプ操作の前後の図式の Seifert グラフは、二部グラフとしては違うものになることがある。しかし、元々の絡み目の HOMFLY 多項式は変化しないので、内部多項式も変化しないと予想される。

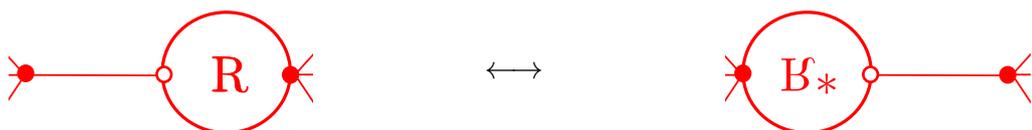


図 6: グラフのフライプ操作

次に、ミューテーションについて説明する。ミューテーションは、図のように、境界にその絡み目との交点が4箇所あるタングルを取り、そのタングル全体を、ある軸（下図では平面に垂直な軸）角度 $\pi$ で回転させる操作である。絡み目によっては、もとの絡み目とは異なる絡み目になることが知られているが、HOMFLY 多項式は変化しない。

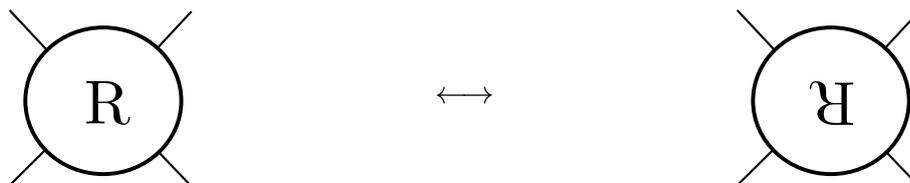


図 7: 絡み目のミューテーション

同様にこの操作の前後の Seifert グラフ（の一例）を考えると、図8のようなグラフになる。タングル内部とは、いくつかの辺で連結しているが、外側の連結している頂点は2箇所のみで、その部分も含め取り除き、角度 $\pi$ で回転させる。このとき、両端の頂点が同じカラークラスに属する場合は、タングル内の頂点のカラークラスは変化しないが、両端の頂点が違うカラークラスに属する時は、タングル内の頂点のカラークラスは変化する。結果、このミューテーションの前後の図式の Seifert グラフは、二部グラフとしては違うものになることがある。しかし、フライプ操作と同様に、内部多項式も変化しないと予想される。

図6の操作を二部グラフのフライプ操作、図8の操作を二部グラフのミューテーションと定義する。二部グラフが平面的であるときや絡み目図式の Seifert グラフになって

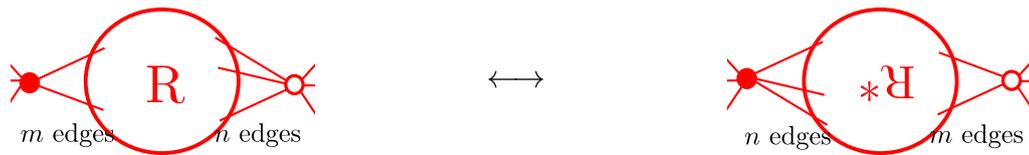


図 8: グラフのミューテーション

いる二部グラフに対しては、内部多項式と HOMFLY 多項式の top に同値関係があるので、内部多項式が不変であることは簡単にわかる。一般の二部グラフに対して、内部多項式が不変であることを今回示すことができたので紹介する。

**定理 2.7 (K.).** 任意の二部グラフに対し、フライブ操作・ミューテーションによって、内部多項式は変化しない。

証明の概略. タングル内の、nullity (第 1 Betti 数) による帰納法で示す。タングル内の nullity が 0 であるときは、枝の部分があるが、内部多項式の性質より、切り落としても内部多項式が変化しないため、簡単に示せる。

また、タングル内の nullity が 1 以上のときは、操作の前のグラフから 1 つのサイクルをとる。そのサイクルの辺の操作の後に移る辺で構成されるサイクルを考える。これらのサイクルに対し、定理 1.12 を使い、nullity の小さい二部グラフがいくつか作られる。これらはそれぞれが、フライブ操作またはミューテーションで変化するので、帰納法の仮定より、内部多項式不変になる。定理 1.12 より、元々の内部多項式は、それらの内部多項式の交代和で表すことができるので、証明が完了する。□

この定理は、符号付き二部グラフの場合にも拡張できるが、今回は省略する。

## 参考文献

- [1] M. Beck and S. Robins. Computing the Continuous Discretely, New York, Springer. 2015.
- [2] P. R. Cromwell. Homogeneous link, J. London Math. Soc. 39(2), 1989, 535–552.
- [3] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett and A. Ocneanu. A new polynomial invariant of knots and links, Bull. Amer. Math. Soc. 12, 1985, 239–246.
- [4] T. Kálmán. A version of Tutte’s polynomial for hypergraphs, Adv. Math. 244, 2013, 823–873.
- [5] T. Kálmán and H. Murakami. Root polytopes, parking functions, and the HOMFLY polynomial, arXiv:1305.4925, 2013, to appear in Quantum Topology.
- [6] T. Kálmán and A. Postnikov. Root polytopes, Tutte polynomials, and a duality theorem for bipartite graphs, Proc. London Math. Soc. 114(3), 2017, 561–588.
- [7] K. Kato. Interior polynomial for signed bipartite graphs and the HOMFLY polynomial, arXiv:1705.05063.
- [8] K. Kato. Extension of the Interior Polynomial to Signed Bipartite Graphs, 研究集会『結び目の数学 IX』報告集, 5–12, 2017.
- [9] H. R. Morton. Seifert circles and knot polynomial, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 99, 1986, 107–109.
- [10] K. Murasugi and J. Przytycki. The skein polynomial of a planar star product of two links, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 106, 1989, 273–276.