

Conway-Coxeter Frieze を用いた有理絡み目図式の Kauffman bracket 多項式の計算レシピ

小木曾岳義 (城西大学)

Abstract

ここでは A 型団代数と関係する Conway-Coxeter Frieze を用いて有理数の連分数展開から得られる有理絡み目の Kauffman bracket 多項式を計算するレシピを紹介する.

1 絡み目図式の Kauffman bracket 多項式

Λ を \mathbb{Z} 上の Laurent 多項式環 $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ とし, 絡み目図式 D について, Kauffman bracket 多項式 $\langle D \rangle \in \Lambda$ が以下の関係式を繰り返して決定される:

$$(KB1) \langle \text{X} \rangle = A \langle \text{) } \rangle + A^{-1} \langle \text{ (} \rangle$$

$$(KB2) \langle D \amalg \bigcirc \rangle = \delta \langle D \rangle, \text{ ただし } \delta = -A^2 - A^{-2}.$$

$$(KB3) \langle \bigcirc \rangle = 1.$$

以下では絡み目図式を単に絡み目と呼ぶことにし, 特に下記のような有理絡み目に限定した話をする.

整数 n について, tangle $[n], \frac{1}{[n]}$ を Figure 1 のように定義する.

既約分数 $\frac{p}{q}$ の連分数展開:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

について, 下記のように a_k ($0 \leq k \leq n$) の tangle $[a_k], [-a_k]$ を以下のように並べて上と下で結んだ有理結び目を考えてこれを $L(\frac{p}{q})$ と置く.

この研究は和久井道久氏との共同研究に基づいている.

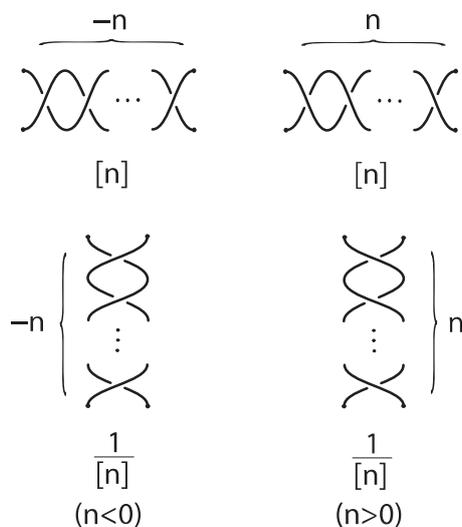
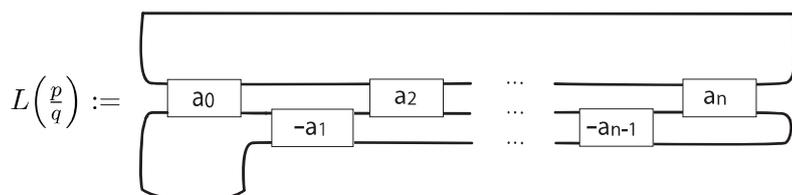


Figure 1:



注意:上記の四角の中の $\pm a_i$ は $[\pm a_i]$ の略記とする ($i = 0, \dots, n$).

2 Conway-Coxeter Friezes

Conway-Coxeter Frieze は以下のような条件を満たす自然数を並べたフリーズである :
 先ず, 一番上の行と一番下の行に 1 が一つおきに配置されており, それらに挟まれる
 ところに現れる以下のような菱形に配置された数字

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array}$$

は $ad - bc = 1$, を満たす, すなわち

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \quad a, b, c, d > 0.$$

例えば以下のようなものである :

Figure 2 にあるような最上行と最下行に 1 を配置して, 2 行目の 1 を適当な位置に定めその 1 を基準に左, 左に 1 を逆対角に配置, その後, 右, 右に 1 を対角に配置し, その後左に 1 を配置して「天井」と「床」を「1 のつくるギザギザ」でつなぐ, これを今

後 L^2R^2L 型という. この「1のつくるギザギザ」から, 菱形に配置された数の関係が $SL(2, \mathbb{Z})$ の関係であることから, Figure3 のように全体に自然数の配置が決まるが, これを L^2R^2L -型の Conway-Coxeter Frieze ということにする. 以下の話の関連で, この Conway-Coxeter Frieze の最大値 (今の例だと「17」) とそれをとりまく, 菱形上の周りの自然数が重要である.

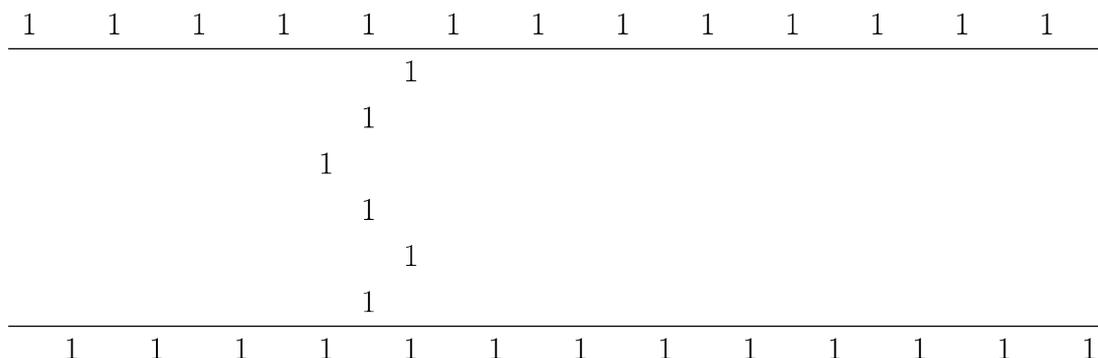


Figure 2:

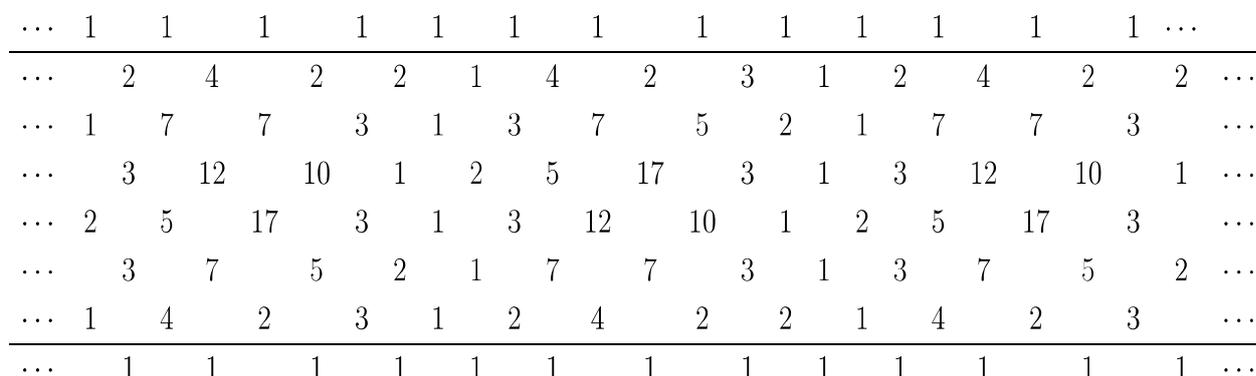


Figure 3:

Conway-Coxeter Frieze は 1973 年に [CoCo] のなかで, Conway と Coxeter によって導入され, 2002 年に Fomin と Zelevinsky により導入された cluster 代数に一般化されて, 可積分系, 多元環の表現, 組み合わせ論などとの関連もあり注目されている ([FWZ] 参照).

3 主結果 : Conway-Coxeter Frieze を用いた有理絡み目の Kauffman bracket 多項式の計算レシピ

Theorem 3.1 (S.YAMADA,1996,[Y]) For $\Lambda = \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$, the map $v \circ \phi : \mathbb{Q}_+ \cup \{\infty\} \rightarrow \Lambda$ satisfies

$$v(\phi(\frac{p}{q})) = -A^4 v(\phi(\frac{s}{t})) - A^{-4} v(\phi(\frac{u}{v}))$$

where $\frac{p}{q} = \frac{s}{t} \# \frac{u}{v}$ (Farey sum with $sv - tu = -1$, $p = s + u$, $q = t + v$).

Here $v(\phi(\frac{p}{q}))$ coincides with $\langle L(\frac{p}{q}) \rangle$ except for the power of $(-A^3)$.

注意: 上記の Theorem 3.1 で, 写像 v , 写像 ϕ はそれぞれ意味がある写像で, $v \circ \phi$ の定義も含めて, 都合上後の p.12,p.13 に定義を説明してある.

(This is rewrite version in [KW1], [KW2]).

Theorem 3.2 (KOGISO AND WAKUI,2017 ,[KW1], [KW2]) *For a Conway-Coxeter Frieze with LR-word w ,*

(1) *if $w = R^m L^n w'$ for shorter word w' ,*

$$\langle \Gamma(w) \rangle = -A^4 \langle \Gamma(R^{m-1} L^n w') \rangle - A^{-4} \langle \Gamma(L^{n-1} w') \rangle$$

,

(2) *if $w = L^m R^n w'$ for shorter word w' ,*

$$\langle \Gamma(w) \rangle = -A^4 \langle \Gamma(R^{n-1} w') \rangle - A^{-4} \langle \Gamma(L^{m-1} R^n w') \rangle$$

,

注意: 上記の Theorem 3.2 に現れる $\langle \Gamma(w) \rangle$ の定義は都合上, 後の p.6 で説明している.

1 より小さい既約分数 $\frac{p}{q}$ についての有理絡み目を $L(\frac{p}{q})$ とし, $\frac{p}{q}$ に対応する CCF の LR-word を $w(\frac{p}{q})$ とするとき,

$$\langle L(\frac{p}{q}) \rangle = (-A^3)^{\sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} a_i} \langle \Gamma(w(\frac{p}{q})) \rangle = (-A^3)^{\sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} a_i} v(\phi(\frac{p}{q}))$$

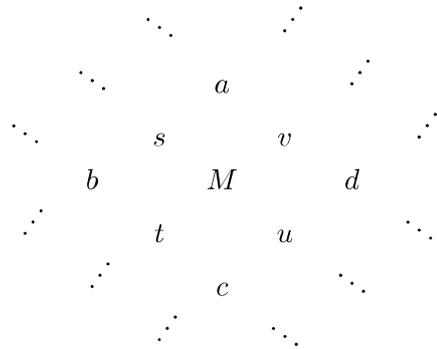
となる. 但し $\frac{p}{q}$ の連分数展開を $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ としている.

この定理を踏まえて, 以下で「計算した既約分数 $\frac{s}{M}$ の有理絡み目の Kauffman bracket 多項式を Conway-Coxeter Frieze を用いて計算するレシピを紹介する.

1 より小さい正の既約分数 $\frac{s}{M}$ の有理絡み目の, Kauffman bracket polynomials $v(\phi(\frac{s}{M}))$ がその分数に付随して出てくる Conway-Coxeter Frieze 上の最大値 M を通る「正弦曲線」や「余弦曲線」を用いて以下のように計算できることを紹介する:

(i) 先ず, 最大値が M となる Conway-Coxeter Frieze を作るために, 以下のような M を取り巻くダイヤモンド型に自然数を配置する. 各小さなダイヤモンドが $SL(2, \mathbb{Z})$ の元で, M が最大値であることから, M と s を具体的に与えると, 他の自然数は全て決まり, このダイヤモンドからさらに他の自然数が決まって行き, Conway-Coxeter Frieze が決定する.

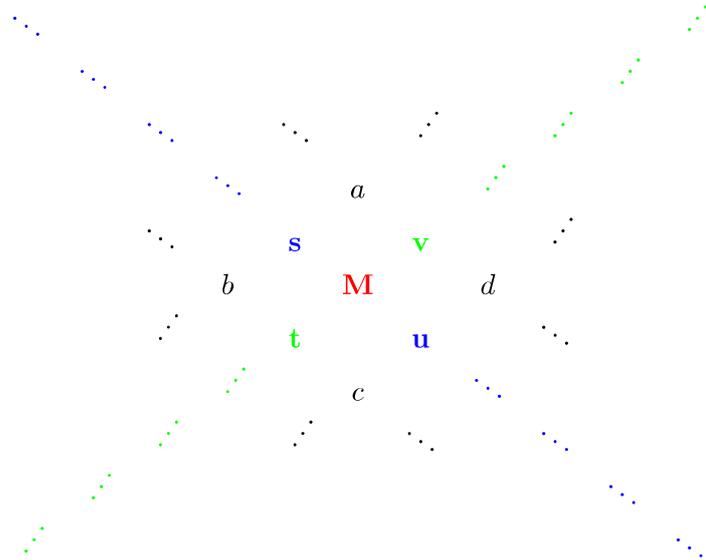
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1



1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

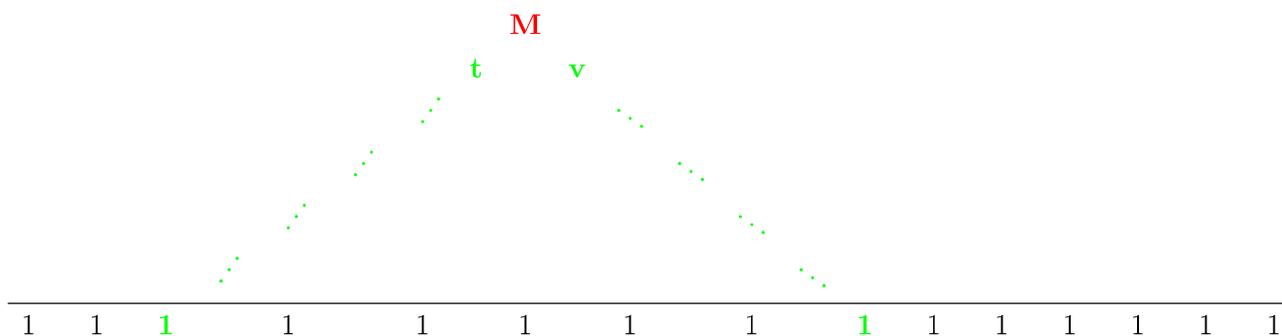
(ii) 次に, 最大値「 M 」を通る正弦曲線 (緑のライン), 余弦曲線 (青いライン) を考える.

1 1 **1** 1 1 1 1 1 1 **1** 1 1 1 1 1



1 1 **1** 1 1 1 1 1 1 **1** 1 1 1 1 1

(iii) $\frac{s}{M}$ の有理絡み目の Kauffman bracket 多項式を計算するために, 緑の「正弦曲線」の方に注目し, 最大値「 M 」のところを下図のように, , この曲線を折り曲げる:



- (iv) 以下のルールで緑の数字を線で結んで各線分に符号をつけてゆく :
- (S1) M から左下の (南西方向の) 1 に向かう線分には全てマイナス $-$ の符号をつけ, M から右下の (南東方向の) 1 に向かう線分には全てプラス $+$ の符号をつける.
- (S2) M から左下の 1 に伸びている線分上の自然数, M から右下の 1 に伸びている線分上の自然数たちについて, 上にある数が下にある 2 つの数の和になる三角形になるように線分で結び, 上の頂点から, プラスの線分とマイナスの線分が下に伸びているように線分に符号をつける.
- (S3) 各符号付き線分について, プラス $+$ を $\text{weight} - A^4$, マイナス $-$ を $\text{weight} - A^{-4}$ に取り換える.
- (S4) M から左下の 1, 右下の 1 に向かう各パスごとに weight の積を計算する.
- (S6) 各パスの weight の積の総和をとる.

こうして各 path γ 上のプラスの個数 p , マイナスの個数 q について, 符号付の単項式 $(-1)^{p+q} A^{4(p-q)}$ を考えて,

$\text{path}(CCF) :=$ decreasing path from maximal M to left ①, or right ①

$\text{path}(CCF)_{\text{numerate}} :=$ decreasing path from maximal M to left ①

$$\langle CCF \rangle := \sum_{\gamma \in \text{path}(CCF)} (-1)^{p(\gamma)+q(\gamma)} A^{4(p(\gamma)-q(\gamma))}$$

$$\langle CCF \rangle_{\text{numerate}} := \sum_{\gamma \in \text{path}(CCF)_{\text{numerate}}} (-1)^{p(\gamma)+q(\gamma)} A^{4(p(\gamma)-q(\gamma))}$$

where $p(\gamma), q(\gamma)$ means number of $+$'s, $-$'s respectively in the path γ .

(cf. [KW1], [KW2],)

こうして, 与えられた word w を持つ Conway-Coxeter Frieze $CCF = \Gamma(w)$ から $\langle \Gamma(w) \rangle$ が計算できるが, これが, 分数 $\frac{s}{M}$ の有理絡み目 (M が奇数なら結び目, 偶数なら 2 本の絡み目) の有理絡み目 $L(\frac{s}{M})$ の Kauffman bracket 多項式 $\langle L(\frac{s}{M}) \rangle$ と $(-A^3)$ の冪積を除いて一致する.

Claim1 $\langle \Gamma(w) \rangle = (-A^3)^{\sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} a_i} \langle L(\frac{s}{M}) \rangle$ for $\frac{s}{M} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$.

Claim2 Let $\langle \Gamma(w) \rangle_S^{\text{numerate}}$ be the sum of products of each path from "M" to right "1". Then the followings hold.

(1) $\langle \Gamma(w) \rangle \xrightarrow{A^4 = -1} M$

$$(2) \langle \Gamma(w) \rangle^{\text{numerate } \xrightarrow{A^4=-1} s}$$

注意：分数 $\frac{v}{M}$ についての有理絡み目についての Kauffman bracket 多項式を計算するのは「余弦曲線」について同様のことをすればいいが、その説明は省略する。

4 計算例と補足説明

4.1 具体的な計算例

分数 $\frac{7}{19}$ の有理結び目 $L(\frac{7}{19})$ の Kauffman bracket 多項式 $\langle L(\frac{7}{19}) \rangle$ を $\langle \Gamma(w(\frac{7}{19})) \rangle$ を經由して計算したいとしよう。このとき先ず、以下のように真ん中の「19」を取り囲むダイヤモンド型に数が並んでいるモデルを考える：

$$\begin{array}{ccccc} & & s & & \\ & & & & \\ & 7 & & b & \\ & & & & \\ t & & 19 & & v \\ & & & & \\ & c & & d & \\ & & & & \\ & & u & & \end{array}$$

このダイヤモンドを「19」を最大値とする Conway-Coxeter Frieze と考えると、各小さなダイヤモンドが $SL(2, \mathbb{Z})$ の元とみなせるので以下のような関係式が現れる：

$$\begin{aligned} 7 + d &= b + c = 19 \\ s + t &= 7, \\ u + t &= c, \\ v + u &= d, \\ s + v &= b, \\ 7b - 17s &= 1, \\ 17t - 7c &= 1, \\ 17v - bd &= 1, \\ cd - 17u &= 1, \\ tv - su &= 1, \end{aligned}$$

これは解けて、また Conway-Coxeter Frieze の性質から上下左右に数字が決まっていて下記のような RL^2RL -型の Conway-Coxeter Frieze が定まる。このとき、Conway-Coxeter Frieze は半周期性、周期性をもち、以下、下記の第一基本領域 $D(RL^2RL) - 1$ で考える。

上記の RL^2RL -型の Conway-Coxeter Frieze の最大値「19」を通る黄色い正弦曲線と青い余弦曲線を考えて、 $D(RL^2RL) - 1$ のところの「19」のところ、黄色い正弦曲線はそれを通過するまでマイナス、それを越えて次の「19」までプラス、それを越えた後はマイナス、青い余弦曲線は $D(RL^2RL) - 1$ のところの「19」のところまでマイナス、それを越えて次の「19」までプラス、それを越えた後はマイナス、というように符号をつける (Figure 6 参照)。

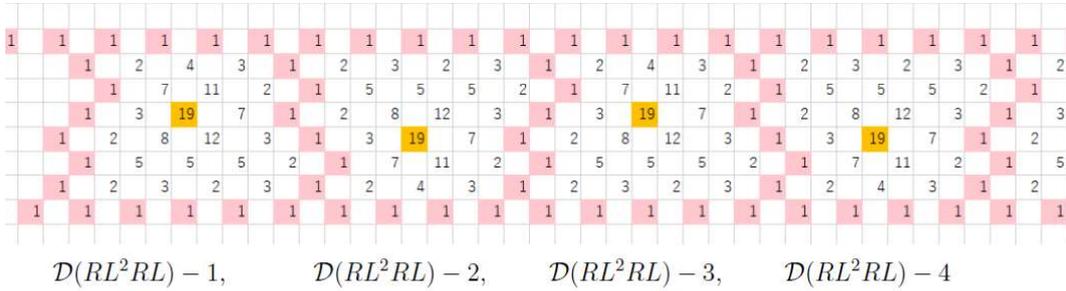


Figure 4:

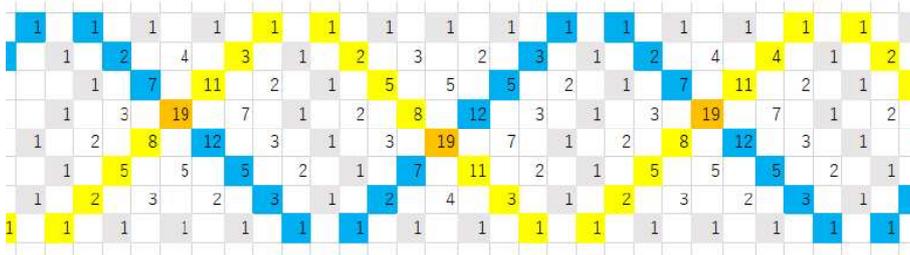


Figure 5:

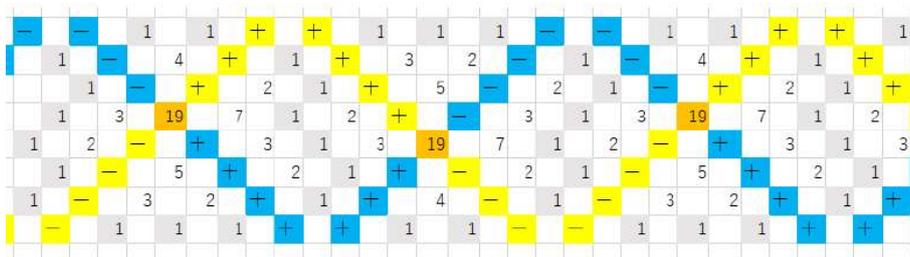


Figure 6:

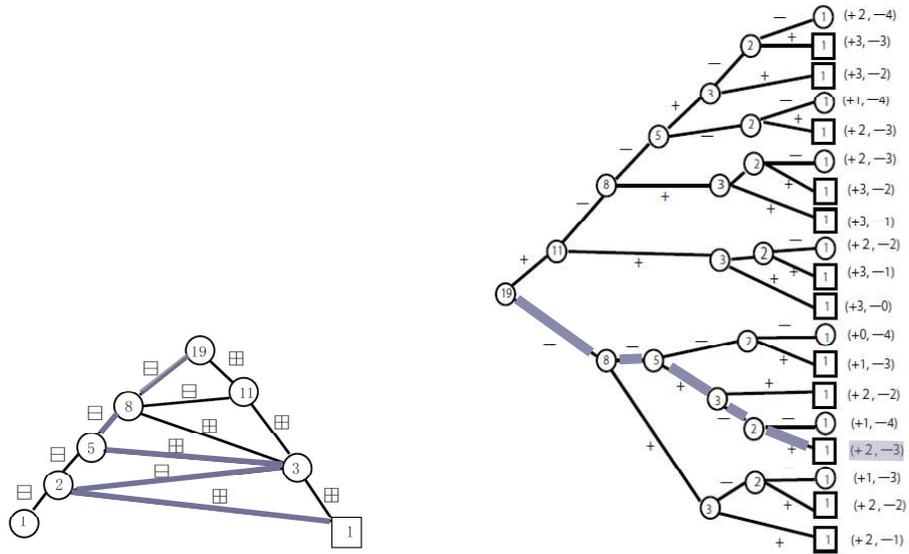


Figure 9:

次に「19」から左下の①と右下の①に向かうパスを考える。ただし「19」をスタートとし、数字が小さくなるようなパスをたどる。それを図式化したものが Figure 8 の右側の図である。

次に各パスについて、プラス + を $\text{weight} - A^4$, マイナス - を $\text{weight} - A^{-4}$ に置き換えて、各パスごとにその weight の積を計算する。例えば Figure 9 にあるような

$$\text{Path } \gamma: 19 \xrightarrow{-} 8 \xrightarrow{-} 5 \xrightarrow{+} 3 \xrightarrow{-} 2 \xrightarrow{+} \boxed{1}$$

については

$$\text{Path } \gamma: 19 \xrightarrow{-A^{-4}} 8 \xrightarrow{-A^{-4}} 5 \xrightarrow{-A^4} 3 \xrightarrow{-A^{-4}} 2 \xrightarrow{-A^4} \boxed{1}$$

$$\text{Path } \gamma\text{-monomial} : (-A^{-4}) \cdot (-A^{-4}) \cdot (-A^4) \cdot (-A^{-4}) \cdot (-A^4) = (-1)^{2+3} A^{(2-3) \cdot 4} = -A^{-4}$$

とする。

そして、全てのパスについてそれらの符号付き A の単項式の総和を考えると

例えば Figure 9 のパス γ については、

$$\text{Path } \gamma: 19 \xrightarrow{-} 8 \xrightarrow{-} 5 \xrightarrow{+} 3 \xrightarrow{-} 2 \xrightarrow{+} \boxed{1}$$

\Rightarrow

$$\text{Path } \gamma: 19 \xrightarrow{-A^{-4}} 8 \xrightarrow{-A^{-4}} 5 \xrightarrow{-A^4} 3 \xrightarrow{-A^{-4}} 2 \xrightarrow{-A^4} \boxed{1}$$

$$\text{Path } \gamma\text{-monomial} : (-A^{-4}) \cdot (-A^{-4}) \cdot (-A^4) \cdot (-A^{-4}) \cdot (-A^4) = (-1)^{2+3} A^{(2-3) \cdot 4} = -A^{-4}$$

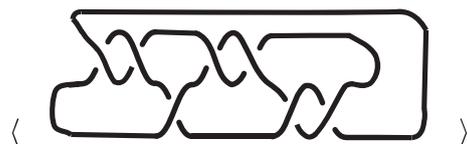
となり、他のパスについても同様の計算をして、それらの総和をとって

$$\langle \Gamma(RL^2RL) \rangle = -A^{12} + 2A^8 - 3A^4 + 4 - 3A^{-4} + 3A^{-8} - 2A^{-12} + A^{-16}$$

を得る。

この $\langle \Gamma(RL^2RL) \rangle(A)$ は $\frac{7}{19} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$ = [0; 2, 1, 2, 2]

の有理結び目の Kauffman bracket 多項式に $(-A^3)$ の整数べき倍を除いて一致する。即ち、



$$= A^{15} - 2A^{11} + 3A^7 - 4A^3 + 3A^{-1} - 3A^{-5} + 2A^{-9} - A^{-13} = (-A^3)^{-0+2-1+2-2} \langle \Gamma(RL^2RL) \rangle(A)$$

$$\begin{cases} \langle \Gamma(RL^2RL) \rangle = -A^{12} + 2A^8 - 3A^4 + 4 - 3A^{-4} + 3A^{-8} - 2A^{-12} + A^{-16} \\ \langle \Gamma(RL^2RL) \rangle_{\text{numerate}} = 1 - A^{-4} + 2A^{-8} - 2A^{-12} + A^{-16} \end{cases}$$

\Rightarrow substitute $A^4 = -1$

$$\begin{cases} \langle \Gamma(RL^2RL) \rangle \xrightarrow{A^4=-1} 19 = \text{denominator of the fraction } \frac{7}{19} \\ \langle \Gamma(RL^2RL) \rangle_{\text{numerate}} \xrightarrow{A^4=-1} 7 = \text{numerator of the fraction } \frac{7}{19} \end{cases}$$

となる。

4.2 絡み目の交点解消と Conway-Coxeter Frieze の余弦曲線の除外縮小との関係

$\frac{7}{19} = \frac{4}{11} \# \frac{3}{8}$ なる分数の farey 和は以下のように、有理絡み目の交点の横外しと縦外しに関係している (Figure10 参照) :

ここで、この $\frac{7}{19}$ の結び目の右下の立体交差の横外しは RL^2RL の Conway-Coxeter Frieze の 19 を通る青い余弦曲線を除去して、空いたスペースを斜めに圧縮してワンサイズ小さな CCF を作るとそれが「11」を最大値とする L^2RL -型の CCF になる。(これは $\frac{4}{11}$ に対応している)。さらに、 $\frac{7}{19}$ の結び目の右下の立体交差の縦外しは「11」を最大値とする L^2RL -型の CCF について、「19」のときと同様に正弦曲線と余弦曲線を考えて、「11」を通る余弦曲線を除去して圧縮し、さらにワンサイズ小さな「8」を最大値とする LRL -型の CCF になる。(これは $\frac{3}{8}$ に対応する。) (Figure10 参照)。

注意 Figure 10 で $\frac{3}{8}$ のところの \approx を挟む右辺と左辺の絡み目は Kauffman bracket 多項式は一致しないが、 A の整数べきを除いて一致している、

4.3 山田の祖先三角形, Stern-Brocot tree との関係

1996 年に山田修司氏は [Y] の中で、以下のような「既約分数の祖先三角形」というものを導入し、これを用いて、当該分数の有理絡み目の Kauffman bracket 多項式を、隣接分数による Farey 分解で現れる「右親」と「左親」に分け、それらの Kauffman bracket

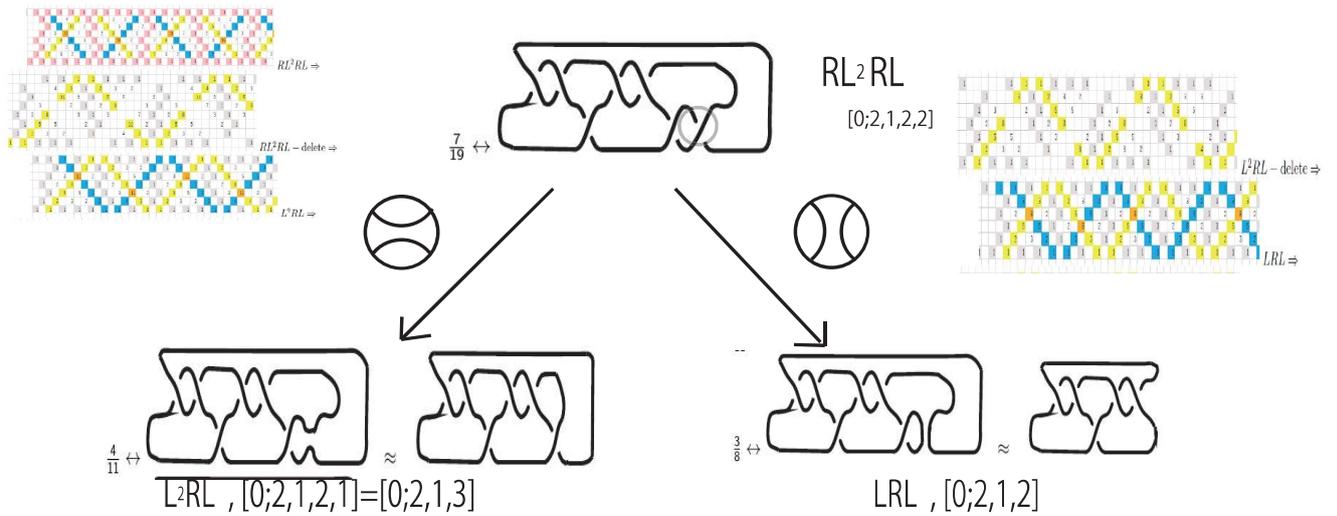


Figure 10:

多項式の計算に帰着して定理を証明した. これと今回との Conway-Coxeter Frieze を用いる方法とは以下のような関連がある. 上記の節で扱った分数 $\frac{7}{19}$ の「祖先三角形」は以下の Figure 11 である.

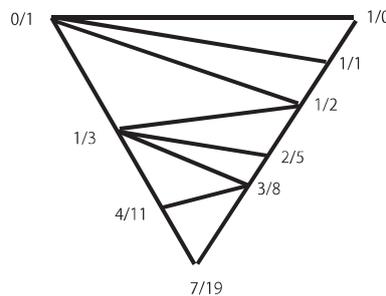


Figure 11:

これは一番下の分数 $\frac{7}{19}$ の隣接分数による Farey 和が $\frac{7}{19} = \frac{4}{11} \# \frac{3}{8}$ であり, 以下同様に, $\frac{4}{11} = \frac{1}{3} \# \frac{3}{8}$, $\frac{3}{8} = \frac{1}{3} \# \frac{2}{5}$, $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} \# \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} = \frac{0}{1} \# \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} = \frac{0}{1} \# \frac{1}{1}$, $\frac{1}{1} = \frac{0}{1} \# \frac{1}{0}$ と下から上の先祖をたどっていく三角形である. この祖先三角形とここで紹介した三角形のパスは以下の Figure 12 のようなパスがそれぞれ対応している.

ここで, Theorem 3.1 に現れる関数 $v \circ \phi$ を上記の $\alpha = \frac{7}{19}$ の祖先三角形 Figure 11 を例に説明すると,

$\phi: \mathbb{Q}^+ \cup \{\infty\} \rightarrow \Lambda^2$, $\Lambda = \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ を次のように定義する: $\phi(\infty) = A^6[\infty]$, $\phi(0) = [0]$ と定め, 各 $\alpha \in \mathbb{Q}^+ - \{0\}$ に対して,

$$\phi(\alpha) = (A^6(-A^4)^{-r(\alpha)}) \sum_{\gamma \in P_\infty(\alpha)} (-A^4)^{w_R(\gamma)}[\infty] + ((-A^4)^{\ell(\alpha)}) \sum_{\gamma \in P_0(\alpha)} (-A^4)^{-w_L(\gamma)}[0]$$

ここで,

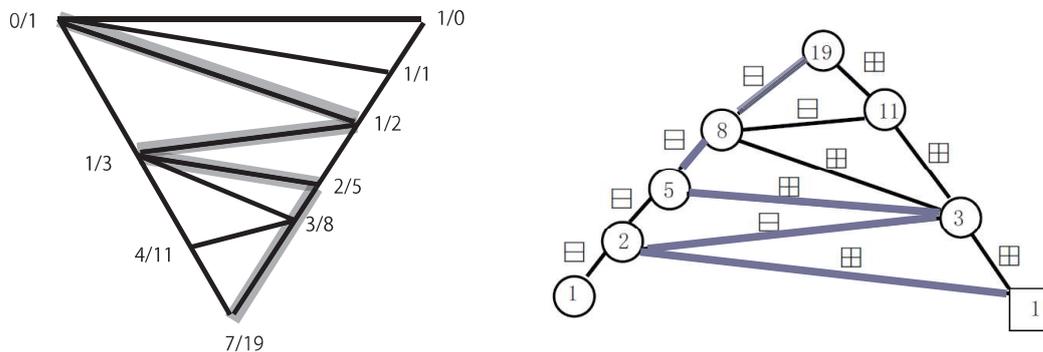


Figure 12:

$r(\alpha) := (\alpha$ の祖先三角形において右斜辺上にある辺の個数),
 $l(\alpha) := (\alpha$ の祖先三角形において左斜辺上にある辺の個数),
 $P_\infty(\alpha) = \{\infty$ から α へ至る下降道の全体 $\}$,
 $P_0(\alpha) = \{0$ から α へ至る下降道の全体 $\}$,
 であり, 各 $\gamma \in P_\infty(\alpha) \cup P_0(\alpha)$ に対して,
 $w_R(\gamma) := (\alpha$ の祖先三角形内において, γ の右側にある基本三角形の総数),
 $w_L(\gamma) := (\alpha$ の祖先三角形内において, γ の左側にある基本三角形の総数),
 これに対して, 写像 $v: \Lambda^2 \rightarrow \Lambda$, $v(a[\infty] + b[0]) = a(-A^2 - A^{-2}) + b$ を合成した写像が $v(\phi(\alpha))$ である.

Figure 13のように「19」を通る正弦ラインに沿って, 斜めに下から $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{7}{19}, \frac{4}{11}, \frac{1}{3}, \frac{0}{1}$ が現れるが, これらは $\frac{7}{19} = \frac{4}{11} \# \frac{3}{8}$ で, 青い余弦ラインを抜いて斜めに圧縮すると「11」が最大値のCCFになり, 上記と同様に $\frac{4}{11} = \frac{1}{3} \# \frac{3}{8}$ となり, 「11」を通る余弦ラインを抜いて圧縮して「8」が最大値になるCCFを作って, と同様のことを繰り返すことは, Figure 14にあるように, $\frac{7}{19}$ の祖先三角形では下から順に三角形を削っていくことに対応している.

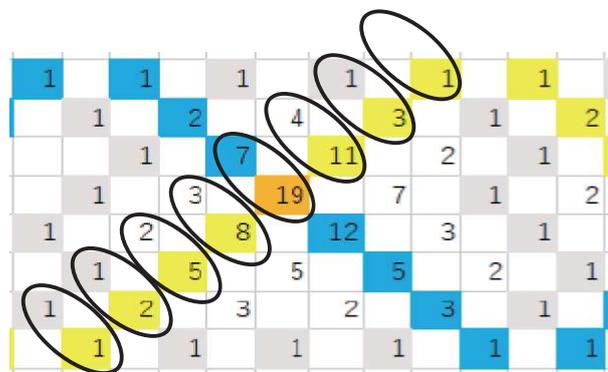


Figure 13:

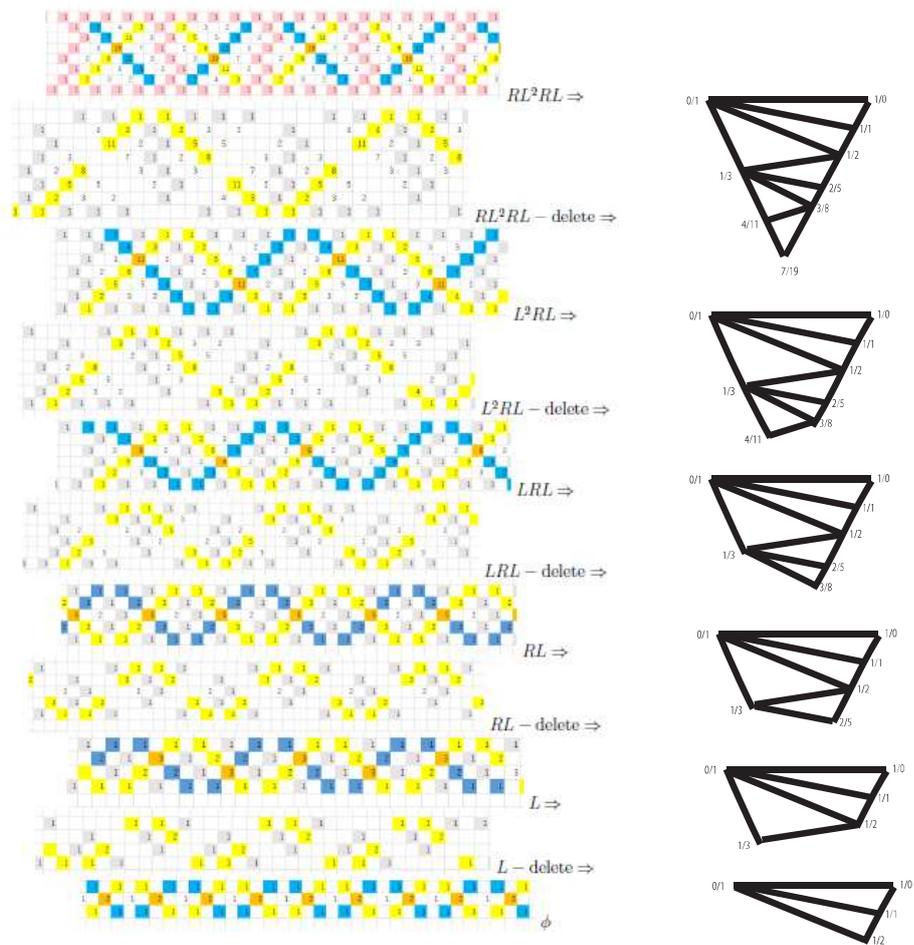


Figure 14:

4.4 CCF, 山田の祖先三角形と Stern Brocot tree 上のパスとの関係

$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ の自然数解の 3 つ組 (x, y, z) をマルコフ 3 数というが, これと関連し Stern-Brocot tree と呼ばれる分数の Farey 和の関係の tree があり, この tree 上のパスと CCF の LR-word, 山田の祖先三角形は Figure15, Figure16 のような関係があることが分かる.

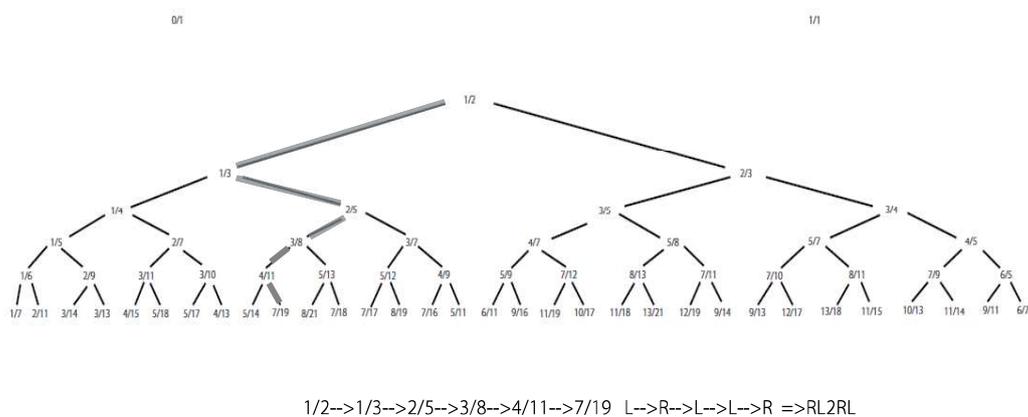


Figure 15:

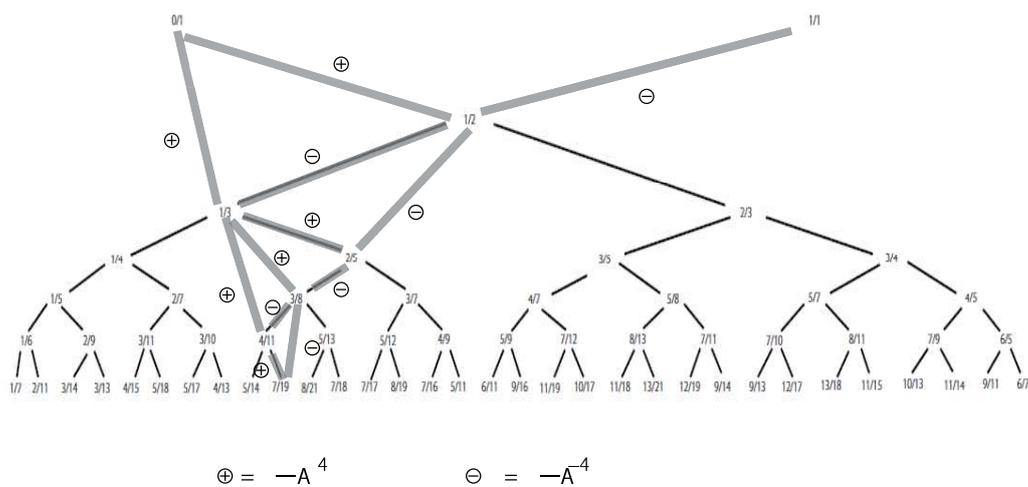


Figure 16:

5 Conway-Coxeter Frieze を用いて有理絡み目の Kauffman bracket 多項式を計算するメリット

有理絡み目の計算で例えば,

(1) 足して1になる2つの分数は何故, 一方を $A \mapsto A^{-1}$ とすると他方になるのか? つまり

$$\text{When } p < q, v(\phi(\frac{p}{q}))(A^{-1}) = v(\phi(\frac{q-p}{q}))$$

が何故成立するのか?

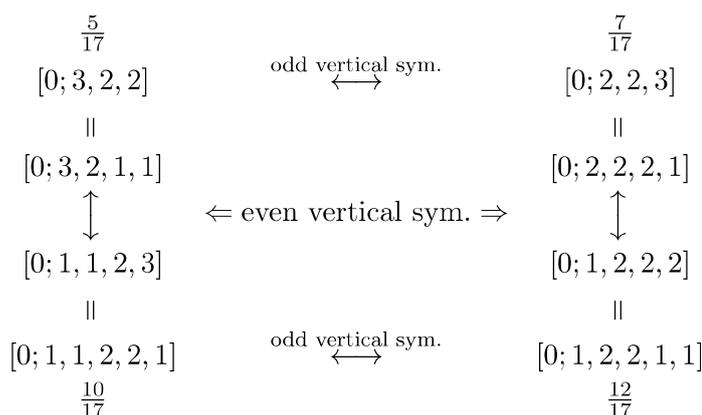
(2) 何故, Stern-Brocot tree に現れる, 同じ世代の共通分母の分数の中に下記のような対応する Kauffman bracket 多項式が一致するものや, $A \mapsto A^{-1}$ の関係になっているのだろうか?

fraction	word	Kauffman Bracket polynomial $v(\phi(\frac{p}{q}))$
$\frac{5}{17}$	LR^2L^2	$-A^{12} + 2A^8 - 3A^4 - 3A^{-4} + 3A^{-8} - A^{-12} + A^{-16} + 3$
$\frac{7}{17}$	L^2R^2L	$-A^{12} + 2A^8 - 3A^4 - 3A^{-4} + 3A^{-8} - A^{-12} + A^{-16} + 3$
$\frac{10}{17}$	R^2L^2R	$A^{16} - A^{12} + 3A^8 - 3A^4 - 3A^{-4} + 2A^{-8} - A^{-12} + 3$
$\frac{12}{17}$	RL^2R^2	$A^{16} - A^{12} + 3A^8 - 3A^4 - 3A^{-4} + 2A^{-8} - A^{-12} + 3$

$$v(\phi(\frac{5}{17})) = v(\phi(\frac{7}{17})), v(\phi(\frac{10}{17})) = v(\phi(\frac{12}{17})) = v(\phi(\frac{5}{17}))(A^{-1})?$$

これらは例えば以下のように, 連分数展開に注意して説明することも出来る:

$\frac{p}{q}$	$\frac{5}{17}$	$\frac{7}{17}$	$\frac{10}{17}$	$\frac{12}{17}$
conti.frac. exp.	$[0, 3, 2, 2]$	$[0, 2, 2, 3]$	$[0, 1, 1, 2, 3]$	$[0, 1, 2, 2, 2]$
$w(\frac{p}{q})$	LR^2L^2	L^2R^2L	R^2L^2R	RL^2R^2
	w	$r(w)$	$i(w)$	$r(w)$



これは Conway-Coxeter Frieze を使っても以下のように説明できる.

上記の 17 を分母にする 4 つの分数 $\frac{5}{17}, \frac{7}{17}, \frac{10}{17}, \frac{12}{17}$ について, は以下の Conway-Coxeter Frieze が対応することから上記のことが説明できる:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 7 & & \\
 & 12 & & 10 & \\
 5 & & 17 & & 3 \Rightarrow \\
 & 7 & & 5 & \\
 & & 2 & &
 \end{array}$$

また別の問題として

分母が共通の分数についてその有理絡み目の分類を行えという問題については、例えば分母が「17」の分数については以下のような分類ができる：

最大値が「17」の Conway-Coxeter Frieze で、それを取り囲むダイヤモンドが、

$$\begin{array}{ccccc}
 & & s & & \\
 & a & & b & \\
 t & & 17 & & v \\
 & c & & d & \\
 & & u & &
 \end{array}$$

のとき、これは以下の関係式を満たす：

$$a + d = b + c = 17$$

$$s + t = a,$$

$$u + t = c,$$

$$v + u = d,$$

$$s + v = b,$$

$$ab - 17s = 1,$$

$$17t - ac = 1,$$

$$17v - bd = 1,$$

$$cd - 17u = 1,$$

$$tv - su = 1,$$

各小さなダイヤモンドが $SL(2, \mathbb{Z})$ の元であることや

$$\begin{array}{ccccc}
 & & s & & \\
 & a & & b & \\
 t & & 17 & & v \\
 & c & & d & \\
 & & u & &
 \end{array} = \text{CCF} \text{ とするとき, その水平線での鏡映, 水平線での鏡映など}$$

$$\text{CCF} \quad \text{FCO}$$

$$\text{CCE} \quad \text{FOC}$$

も現れるので、

これらの代表元は以下である：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & 1 \\
 & 1 & & 1 & \\
 1 & & 17 & & 1 \Rightarrow \frac{1}{17}, \frac{16}{17} \\
 & 16 & & 16 & \\
 & & 15 & & \\
 & & & & 1 \\
 & & & & 2 \\
 1 & & 17 & & 8 \Rightarrow \frac{2}{17}, \frac{8}{17}, \frac{9}{17}, \frac{15}{17} \\
 & & & & 8 \\
 & & & & 15 \\
 & & & & 7
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& 1 & 3 \\
3 & & 6 & & 4 & 13 \\
2 & 17 & 5 \Rightarrow \frac{3}{17}, \frac{6}{17}, \frac{11}{17}, \frac{14}{17} & 1 & 17 & 10 \Rightarrow \frac{4}{17}, \frac{13}{17} \\
& 11 & 14 & & 4 & 13 \\
& & 9 & & & 3 \\
& & 2 & & & \\
& 5 & 7 & & & \\
3 & 17 & 5 \Rightarrow \frac{5}{17}, \frac{7}{17}, \frac{10}{17}, \frac{12}{17} & & & \\
& 10 & 12 & & & \\
& & 7 & & &
\end{array}$$

参考文献

- [CoCo] J.H.Conway, H.S.M.Coxeter, Triangulated polygons and frieze patterns , Math. Gaz. 57 (1973), no. 400, 87-94., no. 401, 175-183.
- [FWZ] S. Fomin, L.Williams and A.Zelevinsky Introduction to Cluster Algebras , <https://arxiv.org/pdf/1608.05735.pdf>
- [KW1] T.Kogiso and M.Wakui, Kauffman bracket polynomials of Conway-Coxeter Friezes, to appear in Proceedings of Meeting for Number theory , Hopf algebras and related topics.
- [KW2] T.Kogiso and M.Wakui, Conway-Coxeter Friezes and rational links, preprint (tentative).
- [N] 中島啓, 「クラスター代数とルート系」, 講座: 数学の発見, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Talks/12_Hakken/hakken.pdf
- [W] 和久井道久 「結び目と連分数」, 2017, http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/~wakui/Knots_and_ContiFrac.pdf
- [Y] 山田修司, 「2 橋結び目の Jones 多項式」 研究集会『結び目の諸問題と最近の成果』 報告集, 1996 年 2 月.