交差交換と Alexander 多項式

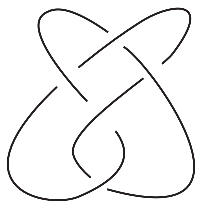
内田　樹　(神戸大学大学院理学研究科)

§1. Introduction

ある結び目 K に対し, K に 1 回交差交換を施して得られる結び目の集合を $k^{\times}$, $k^{\times}$ に含まれる結び目の Alexander 多項式の集合を $\Delta k^{\times}$ と書くことにする. このとき, 次の問題を考える.

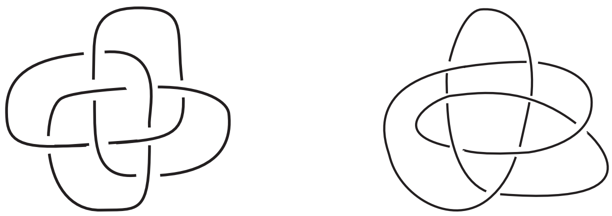
問: ある多項式 $f(t)$ が $\Delta k^{\times}$ に属するための必要十分条件を求めよ.

この問題に対し, 近藤氏 [2] と酒井氏 [10] は k が trivial knot のときについて独立に解を与えた. さらに, k が trefoil や figure-eight knot, 8_{20}, 8_{21}, granny knot $3_1\#3_1$, square knot $3_1\#3_1^*$ のときは中西氏 [5, 7] が, k が 10_{132} や (5, 2)-torus knot のときは中西氏と岡田氏 [6] が解を与えている. [6] により, $\Delta_k(t)$ がモニックであるときは必要十分条件を与えることができる. そこで k が 5_2 (Fig. 1) のときの必要十分条件を与えることを考えたところ, $2n$ 次式 ($n = 1,\ 2,\ 3$) の Alexander 多項式について必要十分条件を与えることができた. ここでは必要十分条件とその証明について述べ, それらを用いた例と, Gordian distance に関する結果を紹介する.



5_2

Fig. 1



8_{18}　　8_{21}

Fig. 2

Theorem 1.1.
整数 $a_1 \in \mathbb{Z}$ に対し, $f(t) = a_1(t + t^{-1}) + 1 - 2a_1$ を Laurent 多項式とする. このとき, $f(t)$ が $\Delta 5_2^{\times}$ に含まれることの必要十分条件は, $|a_1 - 2| = x^2 + xy + 2y^2$ を満たすような整数 $x,\ y \in \mathbb{Z}$ が存在することである.

Theorem 1.2.
整数 $a_1,\ a_2 \in \mathbb{Z}$ に対し, $f(t) = a_2(t^2+t^{-2})+a_1(t+t^{-1})+1-2(a_1+a_2)$ を Laurent 多項式とする. このとき, $f(t)$ が $\Delta 5_2^{\times}$ に含まれることの必要十分条件は, $|7a_2+2a_1-4| = x^2+xy+2y^2$ を満たすような整数 $x,\ y \in \mathbb{Z}$ が存在することである.

Theorem 1.3.
整数 $a_1,\ a_2,\ a_3 \in \mathbb{Z}$ に対し, $f(t) = a_3(t^3 + t^{-3}) + a_2(t^2 + t^{-2}) + a_1(t + t^{-1}) + 1 - 2(a_1 + a_2 + a_3)$ を Laurent 多項式とする. このとき, $f(t)$ が $\Delta 5_2^{\times}$ に含まれることの必要十分条件は, $|25a_3 + 14a_2 + 4a_1 - 8| = x^2 + xy + 2y^2$ を満たすような整数 $x,\ y \in \mathbb{Z}$ が存在することである.

Corollary 1.4.
Gordian distance between 5_2 and 8_{18} ($8_{18}^*,\ 8_{21}$) (Fig. 2) is 2.

Theorem 1.1 の証明を §3 で, Theorem 1.2 と Theoem 1.3 の証明を §4 で与える. §2 では, 証明に用いる surgical description について述べる.

§2. Surgical description

k_0 を 1 回交差交換を施すと trivial knot になる結び目とする. 1 回交差交換を施すと k_0 になる結び目を考えると, k は 2 回の交差交換により trivial knot となる. Alexander 行列の surgical description により, 次がわかる.

Proposition 2.1.
1 回交差交換を施すと trivial knot になる結び目を k_0, 1 回交差交換を施すと k_0 になる結び目を k とおく. このとき, 次の行列 $M(t)$ は k の Alexander 行列となる.

$$M(t) = \begin{pmatrix} \Delta_{k_0}(t) & r(t^{-1}) \\ r(t) & m(t) \end{pmatrix}$$

ただし, $M(t)$ の各成分について, $m(t),\ r(t)$ は整数係数の Laurent 多項式であって,

(1) $\Delta_{k_0}(t)$: k_0 の Alexander 多項式

(2) $m(t) = m(t^{-1}),\ |m(1)| = 1$

(3) $|r(1)| = 0$

である. 逆に, 上の (1), (2), (3) を満たす行列 $M(t)$ に対し, $M(t)$ を Alexander 行列として持ち, 1 回交差交換を施すと k_0 になる結び目 k が存在する.

ここで, 5_2 は 1 回交差交換を施すと trivial になることに注意する.

§3. Proof of Theorem 1.1

§3.1. Necessity Part

k を 1 回交差交換を施すと 5_2 になる結び目とすると, Proposition 2.1 より,

$$\Delta_k(t) = \pm \det \begin{pmatrix} \Delta_{5_2}(t) & r(t^{-1}) \\ r(t) & m(t) \end{pmatrix}.$$

$f(t)$ は 2 次式 Laurent 多項式なので,

$$r(t) = t^p(t-1)(c_1t-c_0),\ m(t) = \frac{c_1c_0}{2}(t+t^{-1}) \pm 1 - c_1c_0\ (p,\ c_0,\ c_1 \in \mathbb{Z},\ c_1c_0 \equiv 0 \mod 2)$$

としてよい. このとき, $c_0 \equiv 0 \mod 2$ としても一般性は失われない. c_0 を $2c_0$ と書き直すことにより,

$$\pm f(t) = (c_1^2 - 3c_1c_0 + 4c_0^2 \pm 2)(t+t^{-1}) - 2(c_1^2 - 3c_1c_0 + 4c_0^2) \mp 3.$$

したがって,

$$\begin{aligned} |a_1 - 2| &= |c_1^2 - 3c_1c_0 + 4c_0^2| \\ &= (c_1 - c_0)^2 + (c_1 - c_0)\cdot(-c_0) + 2(-c_0)^2. \end{aligned}$$

§3.2. Sufficiency Part

$|a_1-2| = x^2+xy+2y^2$ となるような整数 $x,\ y \in \mathbb{Z}$ をとる. このとき, 整数 c_0, c_1 を用いて $x = c_1-c_0,\ y = -c_0$ と変数変換すると,

$$\begin{aligned}|a_1-2| &= (c_1-c_0)^2+(c_1-c_0)\cdot(-c_0)+2(-c_0)^2\\ &= {c_1}^2-3c_1c_0+4{c_0}^2,\\ a_1 &= \pm({c_1}^2-3c_1c_0+4{c_0}^2)+2.\end{aligned}$$

$m(t) = c_1c_0(t+t^{-1})\pm 1-2c_1c_0,\ r(t) = (t-1)(c_1t-2c_0)$ とおくと,

$$\begin{aligned}\pm\det\begin{pmatrix}\Delta_{5_2}(t) & r(t^{-1})\\ r(t) & m(t)\end{pmatrix} &= (\pm(c_1^2-3c_1c_0+4c_0^2)+2)(t+t^{-1})+1\mp 2(c_1^2-3c_1c_0+4c_0^2)+2\\ &= a_1(t+t^{-1})+1-2a_1\\ &= f(t).\end{aligned}$$

したがって Proposition 2.1 により題意は成立する.

§4. Proofs of Theorem 1.2 and Theorem 1.3

Theorem 1.3 は Theorem 1.2 と同様に証明できるため, ここでは Theorem 1.2 の証明について述べる.

§4.1. Necessity part

k を 1 回交差交換を施すと 5_2 になる結び目とすると, Proposition 2.1 より,

$$\Delta_k(t) = \pm\det\begin{pmatrix}\Delta_{5_2}(t) & r(t^{-1})\\ r(t) & m(t)\end{pmatrix}.$$

$f(t)$ は 4 次式 Laurent 多項式なので,

$$r(t) = t^p(t-1)(c_1t-c_0),\ m(t) = m_1(t+t^{-1})\pm 1-2m_1\ (p,\ c_0,\ c_1,\ m_1 \in \mathbb{Z})$$

としてよい. このとき,

$$\pm f(t) = (2m_1+c_1c_0)(t^2+t^{-2})+((c_1-c_0)^2-7m_1\pm 2)(t+t^{-1})+10m_1-2(c_1-c_0)^2\mp 3.$$

したがって

$$\begin{aligned}|7a_2+2a_1-4| &= |2c_1^2+3c_1c_0+2c_0^2|\\ &= (-c_0)^2+(c_1+c_0)\cdot(-c_0)+2(c_1+c_0)^2.\end{aligned}$$

§4.2. Sufficiency part

$|7a_2+2a_1-4| = x^2+xy+2y^2$ となるような整数 $x,\ y\ \in \mathbb{Z}$ をとる. このとき, 整数 c_0, c_1 を用いて $x = -c_1,\ y = c_1+c_0$ と変数変換すると,

$$\begin{aligned}7a_2+2a_1-4 &= \pm((-c_1)^2+(c_1+c_0)\cdot(-c_1)+2(c_1+c_0)^2)\\ &= \pm(2c_1^2+3c_1c_0+2c_0^2).\end{aligned}$$

$2(a_1\mp(c_1-c_0)^2-2) = 7(\pm c_1c_0-a_2)$ より, $\pm 2m = \mp c_1c_0+a_2\ (m \in \mathbb{Z})$ とおける. このとき,

$$\pm a_2 = 2m+c_1c_0,\ \pm a_1 = (c_1-c_0)^2-7m+2,\ 1-2(a_1+a_2) = \pm(10m_1-2(c_0^2+c_1^2)\mp 3).$$

よって,

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \pm\{(2m+c_1c_0)(t^2+t^{-2})+((c_1-c_0)^2-7m+2)(t+t^{-1})+10m_1-2(c_0^2+c_1^2)\mp 3\} \\
&= \pm\det\begin{pmatrix} \Delta_{5_2}(t) & (t^{-1}-1)(c_1t^{-1}+c_0) \\ (t-1)(c_1t+c_0) & m(t+t^{-1})+1-2m \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

したがって Proposition 2.1 により題意は成立する.

§5. Corollary and Examples

このセクションでは, Corollary 1.4 の証明と Theorem 1.1 を用いた例について述べる. ここで, 整数論における基本的な議論 [9] により次がわかる.

Proposition 5.1.
非負整数 N がある整数 $x,\ y \in \mathbb{Z}$ を用いて $N = x^2+xy+2y^2$ と表せるための必要十分条件は $N = 0,\ 1$, または N が奇素数 $q \equiv 3,\ 5,\ 6 \mod 7$ を因数として奇べきで含まないことである.

§5.1. Proof of Corollary 1.4

I.D.Darcy [1] は 5_2 と 8_{18} $(8_{18}^*,\ 8_{21})$ の Gordian distance が 1 か 2 であることを計算した. $8_{18},\ 8_{18}^*,\ 8_{21}$ の Alexander polynomial は以下の通りである;

$$
\begin{aligned}
\Delta_{8_{18}}(t) &= \Delta_{8_{18}^*}(t) \\
&= -(t^3+t^{-3})+5(t^2+t^{-2})-10(t+t^{-1})+13, \\
\Delta_{8_{21}}(t) &= -(t^2+t^{-2})+4(t+t^{-1})-5.
\end{aligned}
$$

Theorem 1.2 を $\Delta_{8_{21}}(t)$ に, Theorem 1.3 を $\Delta_{8_{18}}(t),\ \Delta_{8_{18}^*}(t)$ に適用する.

$$|7\cdot(-1)+2\cdot 4-4| = 3$$

$$|25\cdot(-1)+14\cdot 5+4\cdot(-10)-8| = 3.$$

したがって, $\Delta_{8_{18}}(t),\ \Delta_{8_{18}^*}(t),\ \Delta_{8_{21}}(t) \notin \Delta 5_2^\times$, すなわち $8_{18},\ 8_{18}^*,\ 8_{21} \notin 5_2^\times$ である. これは 5_2 と 8_{18} $(8_{18}^*,\ 8_{21})$ の Gordian distance が 1 でないことを意味しているため, 5_2 と 8_{18} $(8_{18}^*,\ 8_{21})$ の Gordian distance は 2 である. 8_{18} と 8_{18}^* については, Hyeyong Moon [4] が同じ結果を独立に得ている.

§5.2. Examples

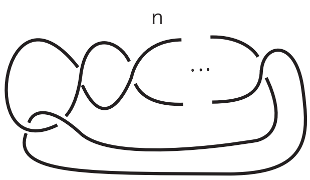


Fig. 4

(1) n-Twist knot T_n (n is odd, Fig. 4)

$$\Delta_{T_n}(t) = \frac{n+1}{2}(t+t^{-1})-n$$

$|\frac{n+1}{2}-2| = \frac{|n-3|}{2}$, $2 \equiv 2 \mod 7$ より, $\Delta_{T_n}(t)$ が $\Delta 5_2^\times$ に含まれることの必要十分条件は, $|n-3| = x^2+xy+2y^2$ を満たす整数 $x,\ y \in \mathbb{Z}$ が存在することである. 例えば, $n = -9,\ -7,\ -3,\ 9,\ 13,\ 15$ のとき $T_n \in 5_2^\times$ となる.

(2) pretzel knot $P(p,\ q,\ r)$ $(p,\ q,\ r:$ 奇数, Fig. 5)

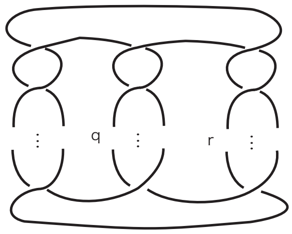


Fig. 5

$$\Delta_{P(p,\ q,\ r)}(t) = \frac{1}{4}\{(pq+qr+rp)(t-1)^2 + (t+1)^2\}$$
$$= t\{\frac{1}{4}(pq+qr+rp+1)(t+t^{-1}) - \frac{1}{2}(pq+qr+rp-1)\}$$

$|\frac{1}{4}(pq+qr+rp+1)-2| = \frac{|pq+qr+rp-7|}{2^2}$, $2 \equiv 2 \mod 7$ より, $\Delta_{P(p,\ q,\ r)}(t)$ が $\Delta 5_2^{\times}$ に含まれることの必要十分条件は, $|pq+qr+rp-7| = x^2+xy+2y^2$ を満たす整数 $x,\ y \in \mathbb{Z}$ が存在することである. 例えば, $(p,\ q,\ r) = (1,\ 1,\ 9),\ (-1,\ 3,\ 11),\ (3,\ -7,\ 19)$ のとき $P(p,\ q,\ r) \in 5_2^{\times}$ となる.

§6. Future problem

Theorem 1.1, Theorem 1.2, Theorem 1.3 の一般化として次が予想される.

Conjecture 6.1.

非負整数 $n \in \mathbb{N}$ と整数 $a_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に対し, $f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t^i + t^{-i}) + a_0$ を $f(1) = 1$ となるような Laurent 多項式とする. このとき, $f(t)$ が $\Delta 5_2^{\times}$ に含まれることの必要十分条件は, $|\sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} P_j a_j - 2^n| = x^2+xy+2y^2$ を満たす整数 $x\ y \in \mathbb{Z}$ が存在することである. ここで, $P_j = 2^{j+1} - \left(\frac{3+\sqrt{7}i}{2}\right)^j - \left(\frac{3-\sqrt{7}i}{2}\right)^j$ である.

Conjecture 6.1 の必要性については証明を与えることができる. 十分性についても $n \leq 12$ において証明を与えることができるため, Conjecture 6.1 は成立することが期待できる.

§7. References

[1]I.D. Darcy. *Strand passage metric table*,
http://homepage.divms.uiowa.edu/~idarcy/research.html

[2]H. Kondo, *Knots of unknotting number* 1 *and their Alexander polynominals*, Osaka J. Math. **16** (1979), 551-559.

[3]J. Levine, *A characterization of knot polynomials*, Topology **4** (1965), 135-141.

[4]H. Moon, Calculating knot distances and solving tangle equations involving Montesinos links, Doctoral Dissertation, Univ. Iowa, 2010.

[5]Y. Nakanishi, Alexander polynomials of knots which are transformed into the trefoil knot by a single crossing change, Kyungpook Math J., volume 52, No.2(2012), 201-205.

[6]Y. Nakanishi, Y. Okada, Differences of Alexander polynomials for knots caused by a single crossing change, Topol. Appl., 152(2012), 1016-1025.

[7]Y. Nakanishi, Differences of Alexander polynomials for knots caused by a single crossing change, Ⅱ. J. Knot Theory Ramifications Vol. 26, No. 14, 1750097 (2017)

[8]D. Rolfsen, *Knots and Links*, Math. Lecture Series **7**, Publish or Perish Inc., Berkeley, 1976.

[9] ボレビッチ · シャハレビッチ著, 佐々木義雄 訳, 整数論 (上), 吉岡書店, Kyoto, 2000.

[10]T. Sakai, *A remark on the Alexander polynomials of knots*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **5** (1997), 451-456.

[11]H. Wendt, *Die gordishe Auflösung von Knoten*, Math. Z. **42** (1937), 680-696.