Extending homeomorphisms of the genus-2 surface over S^3

船吉　健太　(広島大学大学院理学研究科)*

1. はじめに

以下, 多様体と写像は全て PL カテゴリーで考える.

種数 g の向き付け可能な閉曲面を Σ_g とし, Σ_g の自己同相写像を f とする. 同相写像 f が**零同境**であるとは, 境界が Σ_g であるようなコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体 M と M の自己同相写像 $\hat{f}$ で $\hat{f}|_{\partial\Sigma_g} = f$ を満たすものが存在するときをいう. Bonahon [1] により f が向きを保つ有限位数の零同境写像ならばハンドル体の有限位数の同相写像に拡張可能であることが示されている. また f が種数 2 の閉曲面の既約な零同境写像ならば f はハンドル体の同相写像に拡張可能であることも示されている. このように, f が 3 次元多様体の自己同相写像へ拡張可能なとき, より "簡単" な 3 次元多様体を用いて拡張可能であるかを調べることは自然な問題である.

零同境写像の定義を強めて, 曲面の同相写像の S^3 の同相写像への拡張可能性を以下で定義する.

定義 1.1. f を Σ_g の自己同相写像とする. 図式

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_g & \xrightarrow{f} & \Sigma_g \\ \iota\downarrow & & \downarrow\iota \\ S^3 & \xrightarrow[\hat{f}]{} & S^3 \end{array}$$

を可換にする埋め込み $\iota\colon \Sigma_g \hookrightarrow S^3$ と, 同相写像 $\hat{f}\colon (S^3, \iota(\Sigma_g)) \to (S^3, \iota(\Sigma_g))$ が存在するとき, f は S^3 に**拡張可能**であるという. 特に $\iota(\Sigma_g)$ が Heegaard 曲面であるとき f は S^3 に **standard に拡張可能**であるという.

注意 1.2. Bai, Guo, Robins, C. Wang, S. Wang, Zhang, Zimmermann らによる S^3 に "拡張可能" である有限部分群 $G < \mathrm{Homeo}(\Sigma_g)$ の分類に関する一連の仕事がある. その "多く" の場合は standard に拡張している.

本稿の主定理は以下の通りである.

定理 1.3. f を Σ_2 の自己同相写像とする. f が S^3 に拡張可能であることと f が S^3 に standard に拡張可能であることは同値である.

注意 1.4. Σ_0, Σ_1 に関する同様の主張は容易に確かめられる. 種数が 3 以上の閉曲面に対して同様の主張が成り立つかどうかは未解決である.

2. 主定理の証明

これより主定理の証明の概略を述べる. ここで曲面の同相写像が S^3 へ拡張可能であるという性質は写像のイソトピーのもとで不変である. 以下, 写像と写像類を同じ記号で表し, 両者の違いについては断らない.

* 〒739-0044 広島県東広島市鏡山 1-3-1 広島大学大学院理学研究科
e-mail: kfunayoshi@gmail.com

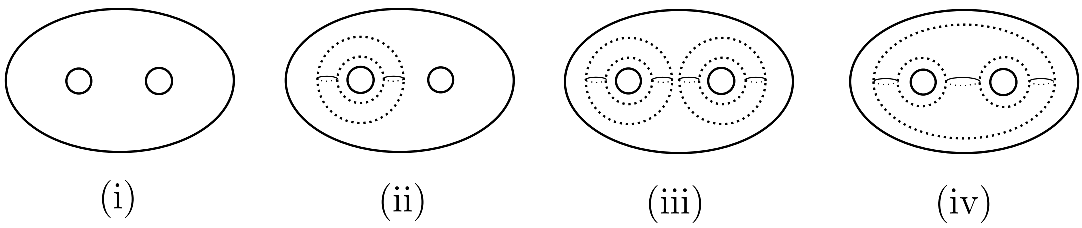

図 1

S^3 に standard に拡張可能ならば S^3 に拡張可能であることは明らかなので, 逆を示す. したがって同相写像 $f\colon \Sigma_2 \to \Sigma_2$ が S^3 に拡張可能であると仮定する. つまり埋め込み $\iota_0\colon \Sigma_2 \to S^3$ と同相写像 $\hat{f}_0 : (S^3, \iota_0(\Sigma_2)) \to (S^3, \iota_0(\Sigma_2))$ が存在して $\hat{f}_0 \circ \iota_0 = \iota_0 \circ f$ を満たすと仮定する.

主張 2.1. 以下の (1), (2) のいずれかが成り立つ.
(1) f は S^3 に standard に拡張可能である,
(2) 以下の (i) 〜 (iv) を満たす埋め込み $\iota_1\colon \Sigma_2 \to S^3$ と同相写像 $\hat{f}_1\colon (S^3, \iota_1(\Sigma_2)) \to (S^3, \iota_1(\Sigma_2))$ が存在する.

(i) $\hat{f}_1 \circ \iota_1 = \iota_1 \circ f$.

(ii) $S^3 = V \cup_{\iota_1(\Sigma_2)} M$.

(iii) V は種数 2 のハンドル体である.

(iv) M は境界既約な 3 次元多様体である.

注意 2.2. まず主張 2.1 は f の S^3 への拡張可能性を保ったまま Σ_2 を埋め込みなおすことで, S^3 を Σ_2 で切り開いて得られるもののうち少なくとも 1 つの成分をハンドル体にできることを意味している. さらにこのとき, もう一方の成分 M をハンドル体か境界既約な 3 次元多様体にできることも意味している.

主張 2.1 の証明. 主張 2.1 を証明するためにハンドル体の一般化である圧縮体 (compression body) を考える. Bonahon [1] により, 既約な 3 次元多様体 M に対して, ∂M に対する圧縮体 V で $\overline{M \setminus V}$ が境界既約であるものがイソトピーを法として一意的に存在することが示されている. このような圧縮体 V を**特性圧縮体 (characteristic compression body)** とよぶ.

S^3 を $\iota_0(\Sigma_2)$ で切り開いて得られる 3 次元多様体を M_1, M_2 とおく. W_1, W_2 をそれぞれ M_1, M_2 の特性圧縮体とする. W_1, W_2 はそれぞれ図 1 のいずれかと同相である. ここで (i) は種数 2 のハンドル体を表していて, 例えば W_1, W_2 がどちらもハンドル体である場合は主張 2.1 の (1) が成り立っている. また W_i が (iv) と同相であるとき, W_i は境界既約である. つまり, 例えば W_1 が (i) と同相で W_2 が (iv) と同相である場合は主張 2.1 の (2) が成り立っている. W_1, W_2 がどちらも (iv) と同相であることはないので, W_1, W_2 の少なくとも一方が (ii) または (iii) と同相である場合を考えればよい.

例えば W_1, W_2 が どちらも (ii) と同相である場合を考える. 他のパターンは同様に示せる. つまり $S_1 = \partial W_1 \setminus \iota_0(\Sigma_2)$, $S_2 = \partial W_2 \setminus \iota_0(\Sigma_2)$ とおくと S_1, S_2 はそれぞれトーラスと同相である. $S^3 = (W_1 \cup M_2) \cup_{S_1} (S^3 \setminus (W_1 \cup M_2))$ と表すことができる

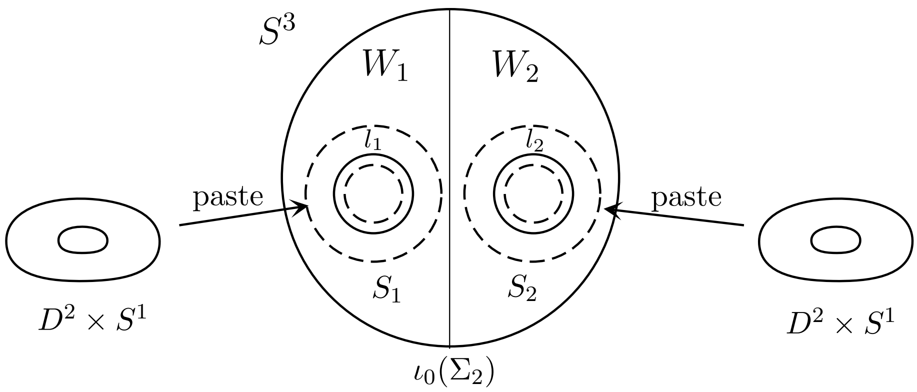

図 2

が, W_1 が特性圧縮体であることから $S^3 \setminus (W_1 \cup M_2)$ はソリッドトーラスでない. したがって $W_1 \cup M_2$ はソリッドトーラスである. $W_1 \cup M_2$ の preferred longitude を l_1 とおく. 同様にして $W_2 \cup M_1$ もソリッドトーラスであることがわかる. $W_2 \cup M_1$ の preferred longitude を l_2 とおく. ここで 2 つのソリッドトーラス $D^2 \times S^1$ を meridian が l_1, l_2 に一致するように S_1, S_2 に沿って $W_1 \cup W_2$ に貼り合わせる (図 2). こうして得られる S^3 において $\iota_0(\Sigma_2)$ (厳密には貼り合わせた後なので元々の $\iota_0(\Sigma_2)$ とは異なる) は Heegaard 曲面である. ここで preferred longitude の一意性により $\hat{f}_0|_{W_1 \cup W_2}$ は $l_1 \cup l_2$ を保つので, 貼り付けるソリッドトーラスにも拡張可能である. このようにして W_1, W_2 が どちらも (ii) と同相である場合に S^3 への拡張性を保ったまま Σ_2 を埋め込みなおすことでどちらも (i) と同相にできることが示せる.

以上で主張 2.1 が示せた.

□

主張 2.3. 主張 2.1 の (2) が成り立つとき以下の (1), (2) のいずれかが成り立つ.
(1) f は S^3 に standard に拡張可能である,
(2) 以下の (i) 〜 (iv) を満たす埋め込み ι_2: $\Sigma_2 \to S^3$ と同相写像 $\hat{f}_2$: $(S^3, \iota_2(\Sigma_2)) \to (S^3, \iota_2(\Sigma_2))$ が存在する.

(i) $\hat{f}_2 \circ \iota_2 = \iota_2 \circ f$.

(ii) $S^3 = V \cup_{\iota_2(\Sigma_2)} M$.

(iii) V は種数 2 のハンドル体である.

(iv) M は atoroidal かつ境界既約な 3 次元多様体である.

主張 2.3 の証明. M が atoroidal でない場合, 以下の定理から得られる本質的トーラスの族 T を主張 2.1 の証明と同様の方法で埋めなおすことで, M から本質的トーラスを取り除くことができる.

定理 2.4 (トーラス分解定理, Jaco-Shalen [2], Johannson [3])**.** M は Haken 多様体で $\partial M = \phi$ または ∂M は圧縮不可能曲面であるとする. M 内の有限個の本質的トーラスの族 T で以下の (i) 〜 (iv) を満たすものが, M のアンビエントイソトピーを法として一意的に存在する.

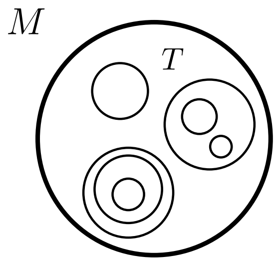

図 3

(i) T の成分はそれぞれ互いに共通部分をもたず，かつ平行でもない.

(ii) M を T で切り開いた各成分は Seifert ファイバー空間または atoroidal である.

(iii) T の真部分集合で条件 (ii) を満たすものは存在しない.

ただし図 3 のように T の成分が互いに “入れ子” になっている場合も考えられるが, その場合は最も外側にあるトーラスを “取り除く” ように Σ_2 を埋めなおせばよいことに注意する .

このようにして主張 2.3 は示せる.

□

主張 2.5. 主張 2.3 の (2) が成り立つとき f は有限位数または S^3 に standard に拡張可能である.

主張 2.5 の証明. まず, M が本質的アニュラスを含まない場合を考える. M は atoroidal であるので, M は本質的アニュラスも本質的トーラスも含まない既約かつ境界既約な 3 次元多様体である. このとき Thurston による双曲化定理 [4] と同変トーラス分解定理 [5] より M は全測地的境界を備えた双曲構造を許容する. よって $\hat{f}|_M$ は有限位数であるので, f は有限位数であることがわかる.

次に, M が本質的アニュラスを含む場合を考える. 主張 2.5 を示すために一般のコンパクト多様体に対して JSJ 分解にあたるものを考える.

定義 2.6 (Neumann-Swarup [6])**.** M を境界既約な Haken 多様体, S を M に埋め込まれた本質的アニュラスまたは本質的トーラスとする. S が M 内で **canonical** であるとは M 内に埋め込まれた任意の本質的アニュラスまたは本質的トーラスをイソトピー変形により S と共通部分をもたないようにできるときをいう. M 内のそれぞれ互いに共通部分をもたず，かつ平行でもない canonical 曲面の族のうち極大なものを **W-system** と呼ぶ.

注意 2.7 (Neumann-Swarup [6])**.** W-system は有限集合かつ M のイソトピーを法として一意的に定まる.

M の W-system を $\mathcal{W}$ とおくと, $\mathcal{W} \neq \phi$ が成り立つ. なぜなら $\mathcal{W} = \phi$ と仮定すると [6] の Proposition 3.2 より M は Seifert ファイバー空間または I-バンドルとなるがこれは M の仮定に反するからである. したがって $\mathcal{W}$ は本質的アニュラスのみから

成る集合で, $\hat{f}_2$ によって保たれる. S^3 に埋め込まれた種数 2 のハンドル体の外部空間内の本質的アニュラスについては Koda-Ozawa [7] によって分類されている. その分類に基づいて主張 2.5 が成り立つことを示すことができる.

□

主張 2.8. f が有限位数のとき S^3 に standard に拡張可能である.

主張 2.8 の証明. 種数 2 の閉曲面の有限位数の同相写像のうち S^3 に拡張可能なものは Guo-Wang-Wang-Zhang [8] により 13 パターンに分類されている. そのすべてのパターンで f が S^3 に standard に拡張可能であることは容易に確かめられる.

□

以上で主定理の証明は完了した.

謝辞

講演の機会を与えてくださった東京女子大学の大山淑之先生, 新國亮先生に心より感謝いたします. また, 講演後にコメントをくださった方々にも感謝いたします.

参考文献

[1] Bonahon, F., Cobordism of automorphisms of surfaces, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **16** (1983), no. 2, 237–270.

[2] Jaco, W, H., Shalen, P., Seifert fibered spaces in 3-manifolds, Mem. Amer. Math. Soc. **21** (1979), no. 220.

[3] Johannson, K., *Homotopy equivalences of* 3*-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Mathematics, **761**. Springer, Berlin, 1979.

[4] Kapovich, M., Hyperbolic manifolds and discrete groups, Progress in Mathematics, **183** Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.

[5] Holzmann, W. H., An equivariant torus theorem for involutions. Trans. Amer. Math. Soc. **326** (1991), no. 2, 887–906.

[6] Neumann, W, D., Swarup, G, A. Canonical decompositions of 3-manifolds. Geom. Topol. **1** (1997), 21–40.

[7] Koda, Y. Ozawa, M., Essential surfaces of non-negative Euler characteristic in genus two handlebody exteriors. With an appendix by Cameron Gordon. Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 4, 2875–2904.

[8] Guo, Y., Wang, C., Wang, S., Zhang, Y., Embedding periodic maps on surfaces into those on S^3, (English summary) Chin. Ann. Math. Ser. B **36** (2015), no. 2, 161–180.