3-orbifold 群と branched twist spin

福田瑞季 (MathAM-OIL)
石川昌治 (慶應大)

概 要

Branched twist spin とは 4 次元球面になめらかに埋め込まれた，S^1-作用で不変な 2 次元結び目である．この結び目は 1 次元結び目と互いに素な自然数の組 m,n によって特徴づけられており，特にその結び目群は 1 次元結び目の群と S^1-作用を用いて記述できる．2 次元結び目は，古典的な結び目とは異なり，補空間は同相だが異なる結び目の組が無限個知られている．また，branched twist spin はファイバー結び目であるが，補空間のファイバー構造が一意とは限らないため，結び目の判別が困難である．そこで本講演では branched twist spin の結び目群をその中心で割った商群が 3-orbifold 群と同型になることに着目し，orbifold の性質から branched twitst spin の分類について得られた結果を紹介する．本研究は石川昌治氏 (慶應義塾大学) との共同研究である．

1 導入

2 次元結び目とは S^4 に滑らかに埋め込まれた S^2 のことをいい，同値類は S^4 におけるアンビエントイソトピー類で考える．具体的な 2 次元結び目の構成については Artin によるスパン結び目 [1]，Zeeman によるツイストスパン結び目 [13]，Litherland による deformed スパン結び目が知られている [8]．それぞれのクラスの包含関係は図 1 のようになっている．本節ではまず branched twist spin の定義について述べる．

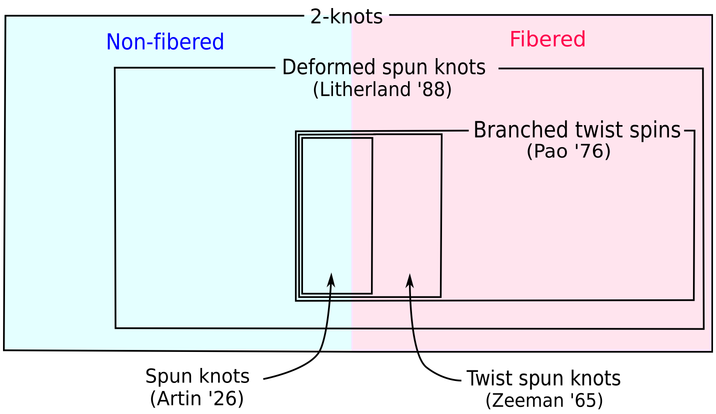

図 1: 2 次元結び目のクラス比較

Fintushel と Pao によって S^4 上の S^1-作用に対し次の分類が与えられている．

定理 1.1 (Fintushel [3], Pao [9])**.** m,n を互いに素な自然数とする．S^4 上の局所滑らかで効果的な S^1-作用の弱同値類は次の 4 つのタイプに分類される．

$$\{D^3\}, \{S^3\}, \{S^3, m\}, \{(S^3, K), m, n\}$$

ここで，D^3, S^3 は軌道空間を表し，m, n は例外軌道の固定部分群の位数を表す．位数が m の軌道の事を $\mathbb{Z}_m$-タイプの例外軌道と呼ぶ．

$\{(S^3, K), m, n\}$ について考える．今，E_n と F をそれぞれ，

$$E_n = \{G(x) \mid x \in S^4, G_x \cong \mathbb{Z}_m\},$$
$$F = \{G(x) \mid x \in S^4, G_x \cong S^1\}$$

とおく．E_n は $\mathbb{Z}_n$-タイプの例外軌道全体の集合であり， F は固定点集合である．E_n と F の軌道写像の像をそれぞれ E_n^*, F^* と書くことにすると，E_m^* と E_n^* は 開区間と同相であり，$E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ は軌道空間 S^3 内の 1 次元結び目になっている．これを K と書く．一方で，$E_n \cup F$ は，$E_n^* \cup F^*$ の軌道写像の逆像であることに注意すると，2 次元球面と微分同相であることがわかる．よって branched twist spin を次のように定義する．

定義 1.1. $K = E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ を S^3 内の 1 次元結び目とする．$K^{m,n} = E_n \cup F$ を K の (m, n)-branched twist spin という．

定義から branched twist spin は S^4 上の S^1-作用によって不変な集合である．

これまでの研究では，Alexander イデアル，Gluck twist，二面体群への表現を考察することで，以下のことが知られている．

定理 1.2 (F. [4])**.** K_1 と K_2 を非自明な 1 次元結び目とし， m_1 を偶数とする．次のいずれかを満たすとき $K_1^{m_1,n_1}$ と $K_2^{m_2,n_2}$ は異なる．

- m_2 が偶数かつ $|\Delta_{K_1}(-1)| \neq |\Delta_{K_2}(-1)|$,
- m_2 が奇数かつ $|\Delta_{K_1}(-1)| \neq 1$.

定理 1.3 (F. [5], c.f. [10])**.** m を 3 以上の奇数とし，K を非自明な 1 次元結び目とする．このとき $K^{m,n}$ と $K^{m,m+n}$ は異なる．

定理 1.4 (F. [6])**.** m_1 と m_2 を異なる自然数とする．このとき，$K_1^{m_1,n_2}$ と $K_2^{m_2,n_2}$ は異なる．

本研究では branched twist spin の完全分類を目的としており，定理 1.4 によって $K^{m,n}$ の m に該当する部分が異なれば branched twist spin は異なることがわかっている．また，定理 1.3 は Gluck twist を用いて得られる結果であるが，Gluck twist は対合的手術なので $K^{m,n}$ と $K^{m,n+2m}$ は同じ 2 次元結び目である．後に記述する branched twist spin の群表示を見ると n の情報はない．そのため，一般に n の変化に対して branched twist spin の決定を行うのは難しい．この後の章では m, n を固定して K の情報を用いた $K^{m,n}$ の分類について考える．

2 Branched twist spin の knot group と 3-orbifold 群

1 次元結び目 K の Wirtinger 表示 $\langle x_1, \ldots, x_l \mid r_1, \ldots, r_l \rangle$ が与えられているとする．この表示を用いて，S^1-作用に沿った S^4 の分解とファンカンペンの定理から branched twist spin の結び目群は以下の表示を持つ．

$$\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n}) \cong \langle x_1, \ldots, x_l \mid r_1, \ldots, r_l, x_i h x_i^{-1} h^{-1}, x_1^m h^\beta \rangle. \tag{2.1}$$

ここで β は $n\beta \equiv 1 \pmod m$ を満たす整数である．注意として，$m=0$ のとき，$K^{m,n}$ はスパン結び目であり，$\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n}) \cong \pi_1(S^3 \setminus K)$ が成り立つ．$m=1$ のときは1-ツイストスパン結び目であるが，Zeeman によって自明な2次元球面と同値であることが知られている [13]．よって以下では $m \geq 2$ を考える．

式 (2.1) より $\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})$ は非自明な中心の元 h を持つことが確認できる．一方で1次元結び目に対し，その結び目群の中心が非自明であることと，その結び目がトーラス結び目であることが同値である．特にトーラス結び目の結び目群の中心は $\mathbb{Z}$ と同型である．従って次が成り立つ．

補題 2.1.

$$Z(\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (K: \text{トーラス結び目}) \\ \mathbb{Z} & (K: \text{その他}). \end{cases}$$

K をトーラス結び目でないとすると，$\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n})/Z(\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n}))$ は

$$\pi_1(S^4 \setminus K^{m,n}) \cong \langle x_1, \ldots, x_l \mid r_1, \ldots, r_l, x_1^m \rangle. \tag{2.2}$$

という表示をもつ．これは底空間を S^3，位数 m の特異集合を K とする cyclic type の 3-orbifold 群 $\mathcal{O}(K,m)$ の基本群 $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K,m))$ の表示そのものである．Orbifold については例えば [2] を参照されたい．以下の3つは主定理を示すために用いた 3-orbifold 群に関する先行研究と補題である．

定理 2.1 (竹内-横山 [12])**.** k を2以上の自然数とする．このとき1次元結び目 L が合成結び目であるための必要十分条件は，非自明な群 G_1, G_2 が存在して

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(L,m)) \cong G_1 *_{\mathbb{Z}_m} G_2$$

となることである．ここで $G_1 *_{\mathbb{Z}_m} G_2$ は G_1 と G_2 の融合積である．

補題 2.2. m を3以上の自然数とし，L を双曲結び目とする．$m=3$ かつ L が8の字結び目の場合を除いて次が成り立つ．

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(L,m)) \not> \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

次の定理を述べるために1つ用語を導入する．1次元結び目 L が *sufficiently large* であるとは，ある2以上の自然数 k が存在して，L に沿った S^3 の k 重分岐被覆 $M_k(L)$ がハーケンになるときをいう．

定理 2.3 (竹内 [11])**.** L_1 と L_2 をそれぞれ 素な1次元結び目かつ sufficiently large とする．このとき，L_1 と L_2 が同値になるための必要十分条件は，ある2以上の自然数 k が存在して

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(L_1,k)) \cong \pi_1^{orb}(\mathcal{O}(L_2,k))$$

が成り立つことである．

3 主結果

Thurston の幾何化予想によって 1 次元結び目全体の集合は次のクラスに分けすることができる.

$$\mathcal{T} = \{\text{素なトーラス結び目}\},\ \ \mathcal{H} = \{\text{素な双曲結び目}\},$$
$$\mathcal{S} = \{\text{素なサテライト結び目}\},\ \ \mathcal{C} = \{\text{合成結び目}\}.$$

注意として，一般にサテライト結び目は合成結び目を含むが，証明で成分数の議論を行うので素な結び目と合成結び目を分けている.

まず異なるクラスの 1 次元結び目から構成される branched twist spin の比較に関する結果を紹介する.

定理 3.1 (石川-F.). 次のいずれかを満たすとき，$K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ は異なる.

(1) $m \geq 2$, $K_1 \in \mathcal{T}$ かつ $K_2 \notin \mathcal{T}$.

(2) $m \geq 2$, $K_1 \in \mathcal{C}$ かつ $K_2 \notin \mathcal{C}$.

(3) $m \geq 3$, $K_1 \in \mathcal{H}$ かつ $K_2 \in \mathcal{S}$.

(1) は群の中心は群の同型写像で不変なので，補題 2.1 から従う. (2) は，$m = 3$ かつ L が 8 の字結び目の場合は $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(L, m)) > \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ が成立することに注意すると定理 2.1 から従う. (3) はサテライト結び目の補空間に本質的トーラスが存在することと，補題 2.2 から従う.

以下では同じクラスの 1 次元結び目から構成される branched twist spin の比較に関する結果を紹介する. 次の定理はサテライト結び目が sufficiently large であることと定理 2.3 から従う.

定理 3.2 (石川-F.). $K_1, K_2 \in \mathcal{S}$ で $m \geq 2$ とする. このとき，K_1, K_2 が同値であることと，$K_1^{m,n}, K_2^{m,n}$ が同値であることは必要十分である.

次の定理は 3-orbifold における Mostow の剛性定理から従う.

定理 3.3 (石川-F.). $K_1, K_2 \in \mathcal{H}$ で $m \geq 3$ とする. このとき，K_1, K_2 が同値であることと，$K_1^{m,n}, K_2^{m,n}$ が同値であることは必要十分である.

次の定理は定理 1.2 をトーラス結び目に限定して考察することで得られる.

定理 3.4 (石川-F.). $m \geq 2$ とし，$K_1 = T(p_1, q_1), K_2 = T(p_2, q_2)$ とする. さらに p_1 は偶数と仮定する. 次のいずれかを満たすとき，$K_1^{m,n}$ と $K_2^{m,n}$ は異なる.

(1) p_2 : 偶数かつ $q_1 \neq q_2$.

(2) p_2, q_2 : 奇数.

定理 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 をまとめると以下の表 1 が得られる. 表内にある $*$ は，今回我々の研究では未解決だった部分に対して Hillman が weight orbit を用いた考察を行っており，特別な場合について branched twist spin が異なる事を示している [7].

	$\mathcal{T}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{C}$
$\mathcal{T}$	△$*$	◯	◯	◯
$\mathcal{H}$		△	△	◯
$\mathcal{S}$			◯	◯
$\mathcal{C}$				$*$

表 1: 完全分類に関して ◯: 解決，△: 部分的解決

参考文献

[1] E. Artin, *Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im* R^4, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1925), no. 1, 174–177.

[2] M. Boileau and J. Porti, Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type, Astérisque, no. 272 (2001), 208 pp.

[3] R. Fintushel, *Locally smooth circle actions on homotopy 4-spheres*, Duke Math. J. **43** (1976), no. 1, 63–70.

[4] M. Fukuda, *Branched twist spins and knot determinants*, Osaka. J. Math, Vol.54, no.4, (2017), 679–688.

[5] M. Fukuda, *Gluck twists along 2-knots with periodic monodromy*, arXiv:1811.05109 [math.GT].

[6] M. Fukuda, *Representations of branched twist spins with a non-trivial center of order 2*, arXiv:2209.11583 [math.GT].

[7] J.A. Hillman, *The groups of branched twist–spun knots*, arXiv:2305.00443 [math.GT].

[8] R. A. Litherland, *Deforming twist-spun knots*, Trans. Amer. math. Soc. **250** (1979), 311–331.

[9] P. S. Pao, *Non-linear circle actions on the 4-sphere and twisting spun knots*, Topology, **17** (3) (1978), 291–296.

[10] S. P. Plotnick, *The homotopy type of four-dimensional knot complements*, Math. Z. **183** (1983), 447–471.

[11] Y. Takeuchi, *Waldhausen's classification theorem for finitely uniformizable 3-orbifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **328** (1991), no. 1, 151–200.

[12] Y. Takeuchi and M. Yokoyama, *The realization of the decompositions of the 3-orbifold groups along the spherical 2-orbifold groups*, Topology Appl. 124 (2002), 103–127.

[13] E.C. Zeeman, *Twisting spun knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **115** (1965), 471–495.