

On finiteness of the geodesics joining a pair of points in curve complexes

奈良女子大学 大学院人間文化総合科学研究科 数物科学専攻 修士2年
大家佳奈子 (Kanakano OIE) *

概要

S を種数が g , 境界成分の数が c , puncture の数が p である向き付け可能曲面とする. 本稿では以下の結果について紹介する.

1. “ $g = 1, c + p \geq 3$ ” または “ $g \geq 2, c + p \geq 1$ ” のとき, S の curve complex 上の 2 点 a_0, a_2 で次のようなものが存在する: $d_S(a_0, a_2) = 2$, a_0 と a_2 を結ぶ curve complex 内の geodesic の個数は丁度 2 個である.
2. “ $g = 2, c + p \geq 1$ ” または “ $g \geq 3$ ” のとき, S の curve complex 上の 2 点 a_0, a_2 で次のようなものが存在する: $d_S(a_0, a_2) = 2$, a_0 と a_2 を結ぶ curve complex 内の geodesic の個数は丁度 3 個である.

1 Introduction

Curve complex は Riemann 面の Teichmüller 空間を研究していた Harvey によって最初に導入され [3], 今も多くの研究者によって研究されている. 特に Masur-Minsky は, curve complex 内の geodesic がもつ特定の幾何的性質を用いて定義された, curve complex の δ -hyperbolicity を示した [7]. この結果は, ending lamination conjecture の解決 [8, 2] など, 重要な帰結をもたらした.

2012 年に Birman-Menasco は, curve complex 内における行き止まり (dead ends) を持つ geodesic の存在を示した [1]. 彼らの論文では, そのような例は「明らかに見逃されていたもの」であると述べられている. そのため, curve complex の geodesic がもつ定性的な性質の研究は意味深いものと思われる.

これに関して, Ido-Jang-Kobayashi は curve complex 内の 2 点でそれらを結ぶ geodesic が 1 つしかないものが存在することを示している [5, 6]. 一方容易にわかるように curve complex 内の 2 点でそれらを結ぶ geodesic が無限個存在するようなものがある (図 6). したがって, 以下の問題を考えることは自然である.

Question. Curve complex 内の 2 点でそれらを結ぶ全ての geodesic の個数は 1 よりも大きな有限の数となるようなものは存在するか?

本稿では, 上記の問いに対する肯定的な回答を報告する. 具体的には以下の結果が得られた.

この報告では以下 S は種数が g , 境界成分の数が c , puncture の数が p である向き付け可能曲面とする (図 1).

Theorem 1. “ $g = 1, c + p \geq 3$ ” または “ $g \geq 2, c + p \geq 1$ ” のとき, S の curve complex 上の 2 点 a_0, a_2 で次のようなものが存在する: $d_S(a_0, a_2) = 2$, a_0 と a_2 を結ぶ curve complex 内の geodesic の個数は丁度 2 個である.

*E-mail: wak_oie@cc.nara-wu.ac.jp

Theorem 2. “ $g = 2, c + p \geq 1$ ” または “ $g \geq 3$ ” のとき, S の curve complex 上の 2 点 a_0, a_2 で次のようなものが存在する: $d_S(a_0, a_2) = 2$, a_0 と a_2 を結ぶ curve complex 内の geodesic の個数は丁度 3 個である.

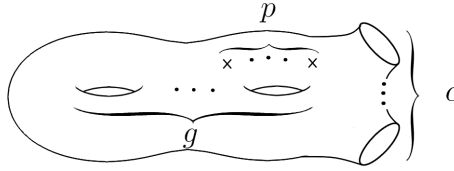


図 1: Surface S

以下ではこの結果に関する基本的な用語の定義, 証明に用いた概念および証明の概略を紹介する.

2 Preliminaries

2.1 Curve complex

この節では, S の curve complex について紹介する.

Definition 1. S が *sporadic* であるとは, “ $g = 0, c + p \leq 4$ ” 又は “ $g = 1, c + p \leq 1$ ” が成り立つときにいう. また S が *sporadic* でないとき, S は *non-sporadic* であるという.

Definition 2. S 内の simple closed curve α について “ α は高々 1 点の puncture を含む S 内の disk を bound する” 又は “ α は ∂S のある component に parallel である” とき, α は *inessential* であるという. また α が *inessential* でないとき α は *essential* であるという.

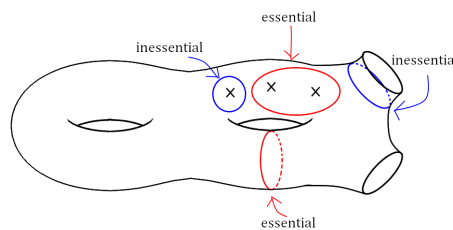


図 2: Essential curve の例

Definition 3. S が essential simple closed curve を含まないとき, S は *simple* であるという. また S が *simple* でないとき, S は *non-simple* であるという.

すべての *sporadic surfaces* を 図 3 に描いておく. 定義から S が *simple* であるならば *sporadic* であることは容易にわかる. また, 図 3 から S が *sporadic* かつ *non-simple* である場合, “ $g = 1, c + p \leq 1$ ” または “ $g = 0, c + p = 4$ ” となることもわかる.

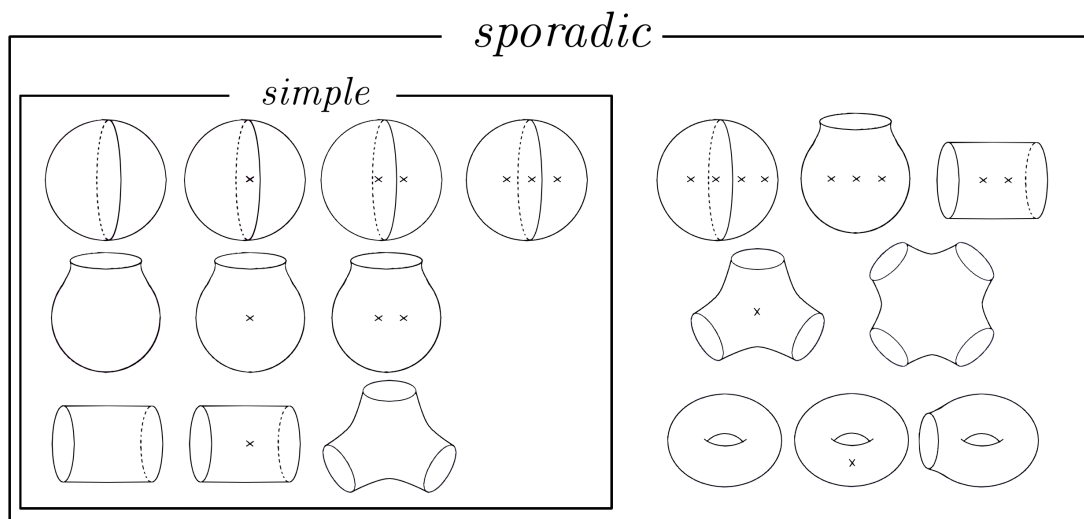
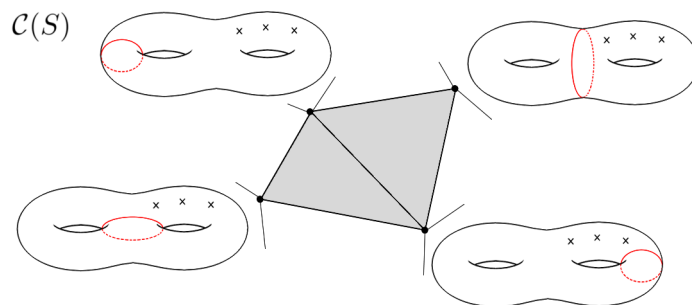


図 3: Sporadic surface

Definition 4. S は non-sporadic とする. 以下で定義される simplicial complex を S の *curve complex* といい, $\mathcal{C}(S)$ で表す.

$\mathcal{C}^0(S)$: S 上の essential simple closed curves の isotopy 類の集合,

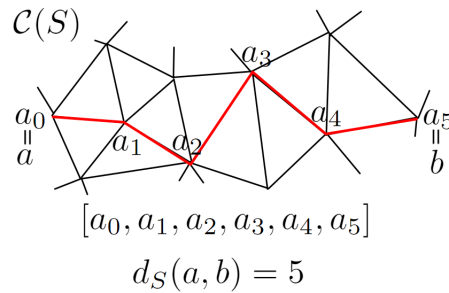
$\mathcal{C}^0(S)$ の $n+1$ 個の 0-simplex が S 上の disjoint curves で実現されるとき, それらは n -simplex を張る.

図 4: $g = 2, c = 0, p = 3$ のときの S の curve complex $\mathcal{C}(S)$.

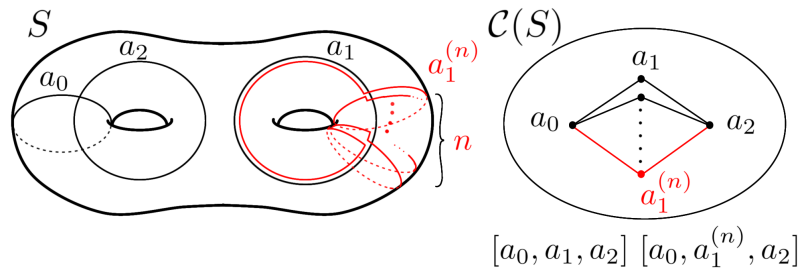
Remark. $\mathcal{C}(S)$ は 局所的に無限な simplicial complex である.

尚, S が sporadic かつ non-simple のときも curve complex は定義できるが本稿では省略する. $\mathcal{C}^0(S)$ の 2 点 a, b に対して a と b を結ぶ simplicial path を $[a_0 = a, a_1, \dots, a_n = b]$ と表すことにする.

Definition 5. $\mathcal{C}^0(S)$ に単体的距離を導入することにより $\mathcal{C}^0(S)$ は距離空間になる. 以下この距離を d_S と書くことにする.

図 5: a と b を結ぶ path

Definition 6. $\mathcal{C}(S)$ 内の path $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ が $d_S(a_0, a_n)$ を実現している時, $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ は $\mathcal{C}(S)$ 内の geodesic であるという.

図 6: a_0 と a_2 を結ぶ geodesics の集合が無数個の元からなる例

2.2 Subsurface projection

この節では, 主結果の証明に用いられる subsurface projection について紹介する.

Definition 7. S の subsurface X が S の essential subsurface であるとは, ∂X の各 component が S で essential であるときにいう.

X を S の essential subsurface とする. 以下では $\ell \in \mathcal{C}^0(S)$ に対して ℓ と ∂X の交点の数は ℓ の S における isotopy 類の中で最小であるとする. (本報告では ℓ の isotopy 類とその幾何的な実現を同じ記号で表す.)

Definition 8. $\ell \cap X \neq \emptyset$ であるとき ℓ は X を cut する という.

X を S の essential な subsurface で non-simple なものとする. また $\ell \in \mathcal{C}^0(S)$ は X を cut するとする. このとき次のように定義される $\mathcal{C}^0(S)$ から $\mathcal{C}^0(X)$ の power set への写像 π_X を subsurface projection とよぶ.

$\ell \cap X$ の component を α_i ($i = 1, \dots, n$) とする. いま $\partial X \cup \alpha_i$ の X における regular neighborhood の boundary component のうち “ ∂X に含まれないもので X で essential であるもの” を元とする集合を $\pi_0(\alpha_i)$ とかくことにする. このとき:

$$\pi_X(\ell) := \bigcup_{i=1}^n \pi_0(\alpha_i).$$

Example. $g = 2, c = 0, p = 2$ とする. また S の essential subsurface X と, $\ell \in \mathcal{C}^0(S)$ を図 7(a) のようにとる. いま $\ell \cap X = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ である (図 7(b)). このとき, $\pi_0(\alpha_1)$ (resp. $\pi_0(\alpha_2)$) は 2 つの元 m_1 と m_2 (resp. n_1 と n_2) から成る (図 7(c)). この m_1, m_2, n_1, n_2 は互いに異なる $\mathcal{C}^0(X)$ の元となる. したがって $\pi_X(\ell) = \pi_0(\alpha_1) \cup \pi_0(\alpha_2) = \{m_1, m_2, n_1, n_2\}$ となる (図 8).

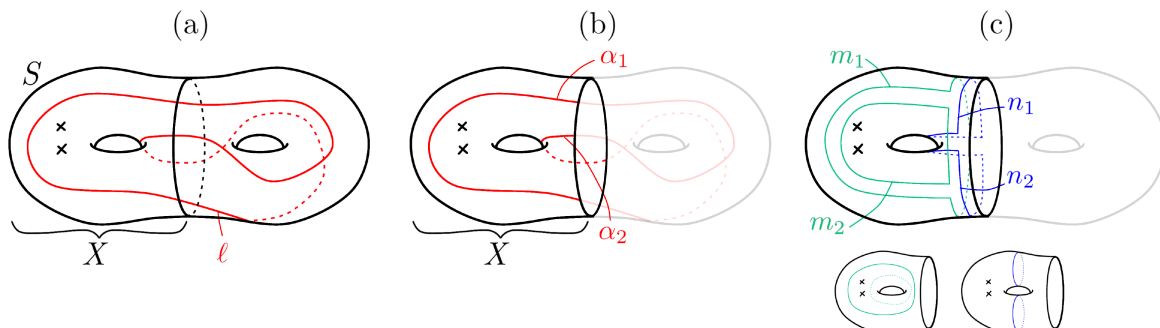


図 7: S, X, ℓ と $\pi_X(\ell)$

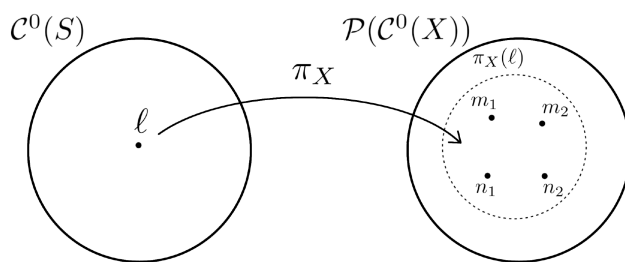


図 8: π_X のイメージ

Subsurface projection に関して知られている事実を 2 つ紹介する.

Lemma 1 (Lemma 2.1 [4]). X は S の non-simple で essential な subsurface とする. $[\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n]$ を $\mathcal{C}(S)$ の path ですべての ℓ_i が X を cut しているものとする. この時, $\text{diam}_X(\pi_X(\ell_0), \pi_X(\ell_n)) \leq 2n$ (図 9).

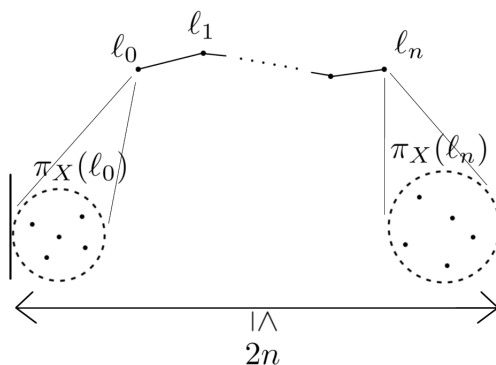


図 9: Lemma 1 のイメージ

Lemma 2 (Lemma 2.3 [6]). $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^0(S)$ とし, α と β は X を cut するものとする. この時, $\forall k \in \mathbb{N}, \exists h : S \rightarrow S$ s.t. $h|_{S \setminus X} = id_{S \setminus X}$, $\text{diam}_X(\pi_X(\alpha), \pi_X(h(\beta))) > k$.

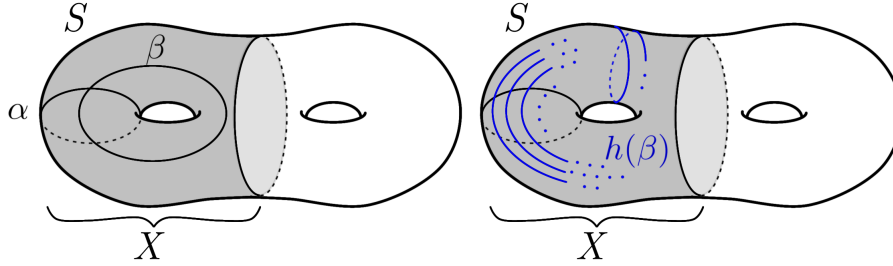


図 10: Lemma 2 のイメージ

3 Proof of main results

この節では, 主結果の証明を紹介する.

S は種数が g , 境界成分の数が c , puncture の数が p の向き付け可能曲面であることを思い出しておく. S が *annulus* (resp. *pants*) with q (≥ 0) *punctures* であるとは, $g = 0$, $c = 2$ (resp. $c = 3$), $p = q$ であるときにいう.

Proof of Theorem 1. Theorem 1 の仮定 (“ $g = 1, c + p \geq 3$ ” または “ $g \geq 2, c + p \geq 1$ ”) より S には互いに disjoint な essential simple closed curves $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}$ で, $a_1^{(1)} \cup a_1^{(2)}$ は S を P と X に分けるようなものが存在する. 但しここで $P \cong$ (annulus with a puncture) または (pants with no puncture), かつ X は non-simple である. 図 11 を参照のこと.

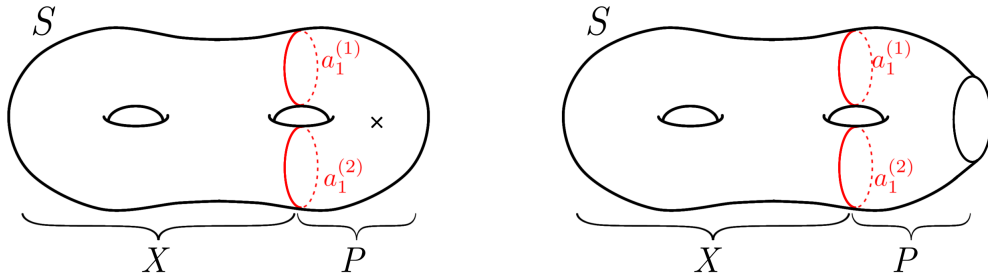
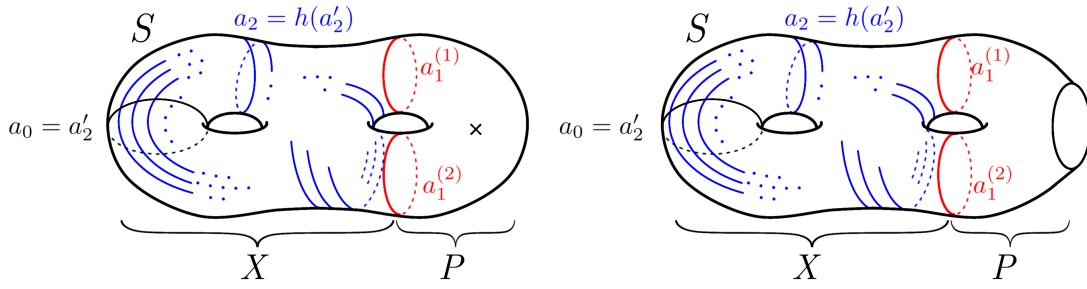


図 11: S を P と X に分ける $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}$ の例

X は non-simple であるので, X 内には essential simple closed curves が存在する. その中から 2 つを選び, それらを a_0, a'_2 とする. Lemma 2 より, $\exists h : S \rightarrow S$ s.t. $h|_P = id_P$, $\text{diam}_X(\pi_X(a_0), \pi_X(h(a'_2))) > 4$ (図 12). ここで $a_2 = h(a'_2)$ とする. このとき a_0, a_2 は Theorem 1 の結論をみたすことを示す.

図 12: $h(a'_2)$ のイメージ

Claim 1. $[a_0, a_1^{(i)}, a_2] (i = 1, 2)$ は $\mathcal{C}(S)$ 内の geodesic である.

Proof. $\text{diam}_X(\pi_X(a_0), \pi_X(a_2)) > 4$ であるので, a_0 と a_2 は交わる. したがってそれらを結ぶ 1-simplex は存在しない. 一方, $a_1^{(1)} \cup a_1^{(2)}$ は S を P と X に分けていたので, a_0 と $a_1^{(i)}$ は交わらない, また $a_1^{(i)}$ と a_2 も交わらない ($i = 1, 2$). よって $[a_0, a_1^{(i)}, a_2] (i = 1, 2)$ は a_0 と a_2 を結ぶ path である. 以上により $[a_0, a_1^{(i)}, a_2] (i = 1, 2)$ は $\mathcal{C}(S)$ 内の geodesic である. $\square$

Claim 2. a_0 と a_2 を結ぶ geodesic は $[a_0, a_1^{(i)}, a_2] (i = 1, 2)$ のいずれかである.

Proof. a_0 と a_2 を結ぶ geodesic でこれ以外のものが存在したとする, 即ち 「 $\exists a_1 \neq a_1^{(1)}, a_1^{(2)}$ s.t. $[a_0, a_1, a_2]$ が $\mathcal{C}(S)$ 内の geodesic」とする. このとき, P は simple であり, S 内の essential simple closed curves で P に含まれるものは $a_1^{(1)}$ か $a_1^{(2)}$ に isotopic になるので, a_1 は X を cut する. したがって Lemma 1 より,

$$\text{diam}_X(\pi_X(a_0), \pi_X(a_2)) \leq 4$$

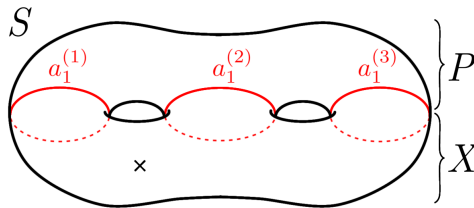
が成り立つ. しかし a_2 のとり方により,

$$\text{diam}_X(\pi_X(a_0), \pi_X(a_2)) > 4$$

となるのでこれは矛盾である. $\square$

Theorem 1 の証明終わり. $\square$

Proof of Theorem 2. Theorem 2 の仮定 (“ $g = 2, c + p \geq 1$ ” または “ $g \geq 3$ ”) より S には互いに disjoint な essential simple closed curves $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_1^{(3)}$ で, $a_1^{(1)} \cup a_1^{(2)} \cup a_1^{(3)}$ は S を P と X に分けるようなものが存在する. 但しここで $P \cong (\text{pants with no puncture})$, かつ X は non-simple である. 図 13 を参照のこと.

図 13: S を P と X に分ける $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_1^{(3)}$ の例

X は non-simple であるので, X 内には essential simple closed curves が存在する. その中から 2 つを選び, それらを a_0, a'_2 とする. Lemma 2 により, $\exists h : S \rightarrow S$ s.t. $h|_P = id_P, \text{diam}_X(\pi_X(a_0), \pi_X(h(a'_2))) > 4$ (図 14). ここで $a_2 = h(a'_2)$ とする. このとき a_0, a_2 は Theorem 2. の結論をみたすことを示す.

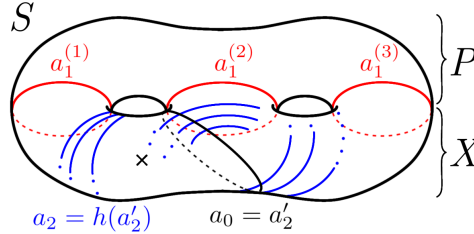


図 14: $h(a'_2)$ のイメージ

Claim 3. $[a_0, a_1^{(i)}, a_2] (i = 1, 2, 3)$ は $\mathcal{C}(S)$ 内の geodesic である.

Proof. $\text{diam}_X(\pi_X(a_0), \pi_X(a_2)) > 4$ であるので, a_0 と a_2 は交わる. したがってそれらを結ぶ 1-simplex は存在しない. 一方, $a_1^{(1)} \cup a_1^{(2)} \cup a_1^{(3)}$ は S を P と X に分けていたので, a_0 と $a_1^{(i)}$ は交わらない, また $a_1^{(i)}$ と a_2 も交わらない ($i = 1, 2, 3$). よって $[a_0, a_1^{(i)}, a_2] (i = 1, 2, 3)$ は a_0 と a_2 を結ぶ path である. 以上により $[a_0, a_1^{(i)}, a_2] (i = 1, 2, 3)$ は $\mathcal{C}(S)$ 内の geodesic である. $\square$

Claim 4. a_0 と a_2 を結ぶ geodesic は $[a_0, a_1^{(i)}, a_2] (i = 1, 2, 3)$ のいずれかである.

Proof. a_0 と a_2 を結ぶ geodesic でこれ以外のものが存在したとする, 即ち「 $\exists a_1 \neq a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_1^{(3)}$ s.t. $[a_0, a_1, a_2]$ が $\mathcal{C}(S)$ 内の geodesic」とする. このとき, P は simple であり, S 内の essential simple closed curves で P に含まれるものは $a_1^{(1)}$ か $a_1^{(2)}$ か $a_1^{(3)}$ に isotopic になるので, a_1 は X を cut する. したがって Lemma 1 より,

$$\text{diam}_X(\pi_X(a_0), \pi_X(a_2)) \leq 4$$

が成り立つ. しかし a_2 のとり方により,

$$\text{diam}_X(\pi_X(a_0), \pi_X(a_2)) > 4$$

となるのでこれは矛盾である. $\square$

Theorem 2 の証明終わり. $\square$

参考文献

- [1] J. Birman and W. Menasco, The curve complex has dead ends, Geom. Dedicata 177(2015), 71–74.
- [2] J. Brock, R.Canary and Y. Minsky, “The classification of Kleinian surface groups II: the ending lamination conjecture,” Ann. of Math. 176(2012), 1–149.

- [3] W. J. Harvey, Boundary structure of the modular group, *Riemann Sur-faces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference* (I. Kra, B. Maskit, eds.), *Ann. of Math. Stud.* 97, Princeton (1981), 245–251.
- [4] A. Ido, Y. Jang and T. Kobayashi, Heegaard splittings of distance exactly n , *Algebr. Geom. Topol.*, 14(2014), 1395–1411.
- [5] A. Ido, Y. Jang, and T. Kobayashi, On keen Heegaard splittings, *Adv. Stud. Pure Math.*, 78(2018), 293–311.
- [6] A. Ido, Y. Jang, and T. Kobayashi, On keen bridge splittings of links, preprint.
- [7] H. Masur, and Y. Minsky, Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity, *Invent. Math.*, 138(1999), 103–149.
- [8] Y.N. Minsky, The classification of Kleinian surface groups I: models and bounds, *Ann. of Math.* 171(2010), 1–107.