

Virtual knots and Miyazawa polynomials

東京女子大学大学院 修士2年 毛塚美海
(この研究は大山淑之先生との共同研究です.)

1 Introduction

virtual knot diagram とは図 1 の real crossing とともに virtual crossing ももつ knot diagram である. ある virtual knot diagram が他の virtual knot diagram に図 2 に示す *generalized Reidemeister move* ([3]) の有限回の操作によって得られるとき, 2 つの virtual knot diagram は同値であるという. virtual knot diagram の同値類を *virtual knot* とよぶ.

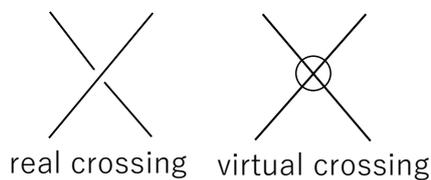


図 1

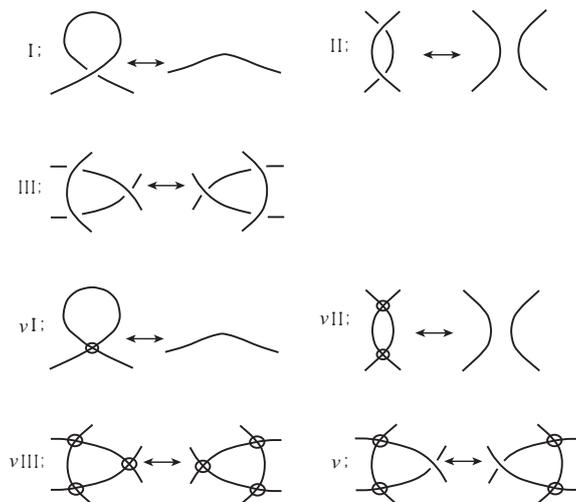


図 2

任意の virtual knot diagram が有限回の local move と Generalized Reidemeister move で trivial knot diagram に移すことができるとき, その local move を virtual knot に対する *unknotting operation* とよぶ.

real crossing を virtual crossing に変える図 3 の local move を *virtualization* とよぶ. virtualization は unknotting operation である. virtual knot K に対して K の virtual knot diagram を trivial knot diagram にするために必要な virtualization の最小回数を $u^v(K)$ であらわす.

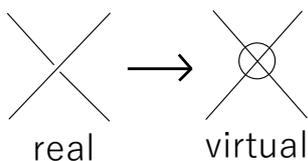


図 3

virtual knot diagram において real crossing の上下を入れ換える操作 (図 4) を *crossing change* とよぶ. virtual crossing をもたないような diagram をもつ classical knot において crossing change は unknotting operation であるが virtual knot においては unknotting operation ではない. crossing change によって trivial knot にうつすことができる virtual knot の集合において, virtual knot K に対して K の diagram を trivial knot diagram にするために必要な crossing change の最小回数を $u^c(K)$ であらわす.

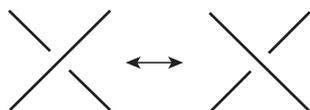


図 4

virtual knot diagram において図 5 の local move を *Delta move* とよぶ. classical knot において Delta move は unknotting operation であるが virtual knot においては unknotting operation ではない. Delta move によって trivial knot にうつすことができる virtual knot の集合において, virtual knot K に対して K の diagram を trivial knot diagram にするために必要な Delta move の最小回数を $u^\Delta(K)$ であらわす.

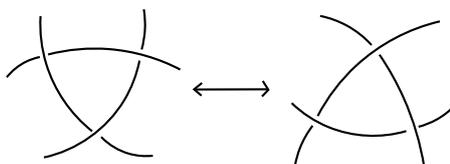


図 5

佐藤と谷口は 0 ではない整数 n に対し, n -writhe とよばれる仮想結び目不変量 J_n を定義した ([7]). n -writhe は virtual knot の polynomial 不変量 index polynomial p_t , odd writhe polynomial f_t , affine index polynomial P の係数を与える. n -writhe は仮想結び目特有の不変量で classical knot に対する値は 0 となる.

大山, 櫻井の論文では Kishino's knot ([4]) と同じ性質をもつ無限個の仮想結び目の存在が示された ([6]). Kishino's knot K は $J_i(K) = 0$ ($i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), $V_K(t) = 1$, $u^v(K) = 1$ をみたす. ここで $V_K(t)$ は K の Jones Polynomial をあらわす. $J_i(K) = 0$ より $p_t(K) = f_t(K) = P(K) = 0$ となる.

Theorem 1.1 ([6]).

次の条件を満たす無限個の virtual knot K_n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) が存在する ;
 $J_i(K_n) = 0$ ($i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), $V_{K_n}(t) = 1$ かつ $u^v(K_n) = 1$.

角田の論文では $J_i(K_n) = 0$ ($i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), $V_{K_n}(t) = 1$, $u^c(K) = 1$ をみたす無限個の仮想結び目の存在が示された [9].

Theorem 1.2 ([9]).

次の条件を満たす無限個の virtual knot K_n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) が存在する ;
 $J_i(K_n) = 0$ ($i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), $V_{K_n}(t) = 1$ かつ $u^c(K_n) = 1$.

中村, 比嘉, 中西, 佐藤の論文では $J_i(K_n) = 0$ ($i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), $V_{K_n}(t) = 1$ and $u^v(K_n) = 1$, $R_{K_n}(A, x) = R_O(A, x) = -A^2 - A^{-2}$ (O : trivial knot) をみたす無限個の仮想結び目の存在が示された ([1]). ここで $R_{K_n}(A, x)$ は K_n の Miyazawa polynomial をあらわす.

Theorem 1.3 ([1]).

次の条件を満たす無限個の virtual knot K_n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) が存在する ;
 $J_i(K_n) = 0$ ($i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), $V_{K_n}(t) = 1$, $u^v(K_n) = 1$ かつ $R_{K_n}(A, x) = R_O(A, x) = -A^2 - A^{-2}$.
 ここで, O は trivial knot を表す.

竹岡の論文では $J_i(K_n) = 0$ ($i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), $V_{K_n}(t) = 1$, $u^c(K_n) = 1$, $R_{K_n}(A, x) = R_O(A, x) = -A^2 - A^{-2}$ を満たす無限個の仮想結び目の存在が示された ([8]).

Theorem 1.4 ([8])

次の条件を満たす無限個の virtual knot K_n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) が存在する ;
 $J_i(K_n) = 0$ ($i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), $V_{K_n}(t) = 1$, $u^c(K_n) = 1$ かつ $R_{K_n}(A, x) = R_O(A, x) = -A^2 - A^{-2}$.

本研究では、以下の定理を示す。

Theorem 1.5

次の条件を満たす無限個の virtual knot K_m ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) が存在する；

$$V_{K_m}(t) = V_T(t), u^\Delta(K_m) = 1, J_i(K_m) = 0 (i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \text{ かつ } I_{K_m}(t) = I_O(t), II_{K_m}(t) = II_O(t), III_{K_m}(t) = III_O(t).$$

ここで T は trefoil knot を表す。

Delta move で n -writhe と intersection polynomial は不変である ([1]). $u^\Delta(K_m) = 1$ から $J_i(K_m) = 0, I_{K_m}(t) = I_O(t), II_{K_m}(t) = II_O(t), III_{K_m}(t) = III_O(t)$ が導かれる。

2 Virtual knot invariants

Definition 2.1

K を virtual knot, D を virtual knot diagram とする. D は generic immersion $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の像としてみなせる. D の preimage において real crossing の preimage をコードで繋いだものを D の Gauss diagram とよぶ. Gauss diagram において real crossing の上交差から下交差へコードに矢印をつけ、以下のような交点の符号をそれぞれのコードに割り当てる.

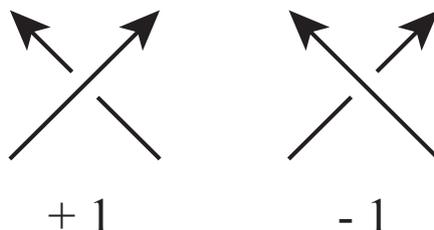


図 6

Gauss diagram G は向きのついた円周 S^1 と、端点が S^1 上にある m 本のコードから構成されているグラフであり、コードには矢印と符号がつけられている. Gauss diagram における Reidemeister move は図 8 のようになる.

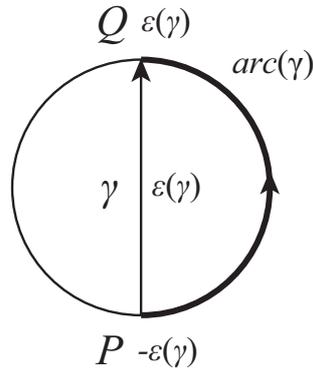


図 7

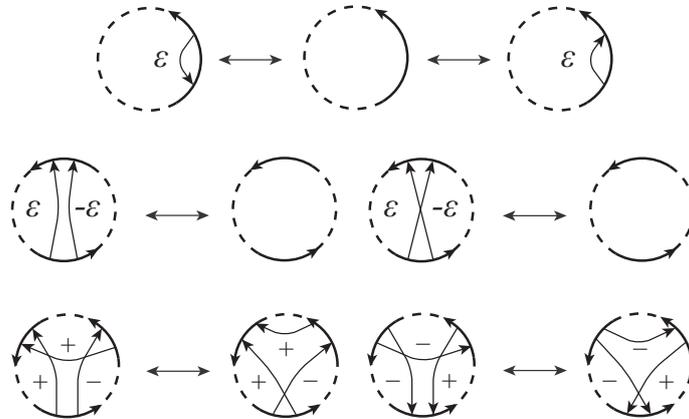


図 8

$\gamma = \overrightarrow{PQ}$ を図 7 で示す符号 $\varepsilon(\gamma)$ のついた G のコードとする. γ は P から Q へ矢印がついている. 端点 P と Q に符号 $\varepsilon(P) = \varepsilon(\gamma), \varepsilon(Q) = \varepsilon(\gamma)$ を与える. $\gamma = \overrightarrow{PQ}$ に対し, $arc(\gamma)$ は円周 S^1 に沿い P から Q へ向きづけられた端点 P, Q を含む弧である. $\gamma = \overrightarrow{PQ}$ の *index* を P と Q を除いた $arc(\gamma)$ 上にある全ての端点の符号の和と定義し, それを $i(\gamma)$ と表す. 整数 n に対し G の n -writhe $J_n(G)$ を *index* n をもつ全てのコードの符号の和と定義する. ([7]);

$$J_n(G) = \sum_{i(\gamma)=n} \varepsilon(\gamma).$$

$n \neq 0$ に対して $J_n(G)$ は virtual knot K の不変量となる. 以後 $J_n(G)$ を $J_n(K)$ で表す.

Definition 2.2 ([2]).

poled states を用いて Miyazawa polynomial ([5]) を定義する. 向きづけられた virtual knot diagram D に関して, real crossing の splice は同調している (*coherent*) ものと非同調しているものとを区別する.

調 (*non-coherent*) しているものの 2 通りである (図 9). 非同調 (*non-coherent*) splice に対して図 9 で示されているように short pole のペアをつける. state S とは, すべての real crossing を splice して得られる virtual knot diagram である. S のそれぞれの loop は偶数個の pole をもつ.

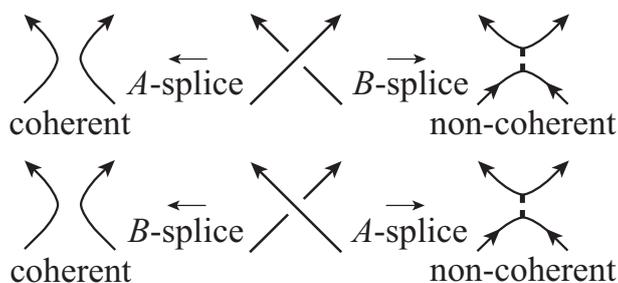


図 9

ここで S の loop C に対して, 図 10 に表されたように virtual crossing を通過し C に沿って pole をスライドすることを許し, 隣接した pole が C と同じ側にあるとき, 図 11 のように pole のペアを取り除く. その結果, 図 12 に示されるような C に沿った交互の pole の集合が残る. pole の数の $\frac{1}{2}$ を $\lambda(C)$ で表す.



図 10



図 11



図 12

$\lambda(C) = i$ の S の loop 数を $\lambda_i(S)$ とする. すなわち

$$\sum_{i \geq 0} \lambda_i(S) = |S|.$$

が成り立つ.

$a(S), b(S)$ を S に対する A-splice と B-splice の数とし, $x = (x_1, x_2, \dots)$ とおく. Miyazawa polynomial $R_K(A, x)$ は以下のように定義される.

$$R_K(A, x) = (-A^3)^{-w(D)} \sum_S A^{a(S)-b(S)} (-A^2 - A^{-2})^{\lambda_0(S)} x_1^{\lambda_1(S)} x_2^{\lambda_2(S)} \dots$$

Miyazawa polynomial は virtual knot の不変量であり, Jones polynomial の一般化である. 実際 $R_K(A, x)$ で $i \geq 1$ に対し $x_i = -A^2 - A^{-2}$ とすることにより $(-A^2 - A^{-2})f_K(A)$ を得ることができる. Miyazawa polynomial $R_K(A, x)$ は classical knot K のとき, 任意の i に対して x_i の項を持たない.

D を 向きづけられた virtual knot K の 向きづけられた virtual knot diagram とする. Miyazawa polynomial $R_K(A, x)$ は以下の関係を満たすブラケット polynomial $\langle D \rangle$ を用いて $(-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$ と定義することもできる.

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \underbrace{\hspace{2cm}}_{2i} \end{array} \right\rangle &= \begin{cases} -A^2 - A^{-2} & (i = 0) \text{ and} \\ x_i & (i \neq 0), \end{cases} \\ \left\langle \begin{array}{c} \nearrow \quad \searrow \\ \searrow \quad \nearrow \end{array} \right\rangle &= A \left\langle \begin{array}{c} \curvearrowright \quad \curvearrowleft \\ \curvearrowleft \quad \curvearrowright \end{array} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \curvearrowright \quad \curvearrowleft \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \end{array} \right\rangle, \\ \left\langle \begin{array}{c} \searrow \quad \nearrow \\ \nearrow \quad \searrow \end{array} \right\rangle &= A \left\langle \begin{array}{c} \curvearrowleft \quad \curvearrowright \\ \curvearrowleft \quad \curvearrowright \end{array} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \curvearrowleft \quad \curvearrowright \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \end{array} \right\rangle, \\ \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \end{array} \right\rangle &= \left\langle \text{---} \right\rangle, \\ \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \oplus \text{---} \\ | \quad | \end{array} \right\rangle &= \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \oplus \text{---} \\ | \quad | \end{array} \right\rangle \text{ and} \\ \left\langle D \cup \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \underbrace{\hspace{2cm}}_{2i} \end{array} \right\rangle &= \langle D \rangle \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \underbrace{\hspace{2cm}}_{2i} \end{array} \right\rangle. \end{aligned}$$

intersection polynomial については省略. [1] を参照のこと.

3 Sketch proof of Theorem 1.5

図 13 に示す virtual knot diagram D_m をもつ virtual knot K_m を考える. K_m の Gauss diagram G_m は図 14 のようになる.

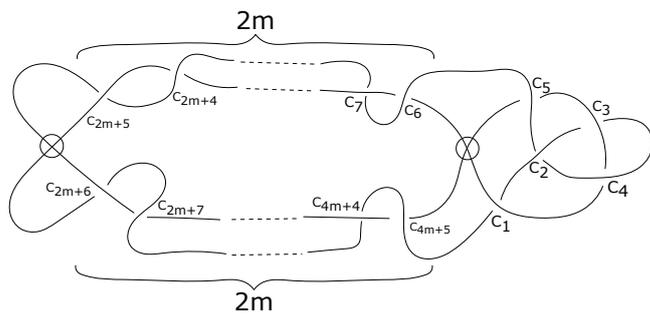


図 13

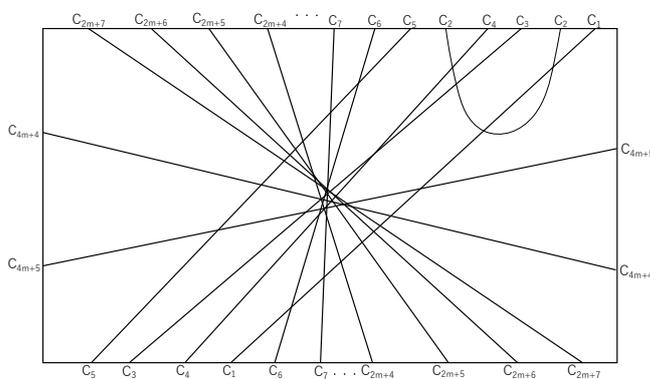


図 14

まず K_m は図 15 の \circ の部分で 1 回の delta move を行うと trivial knot diagram となることを確認する。

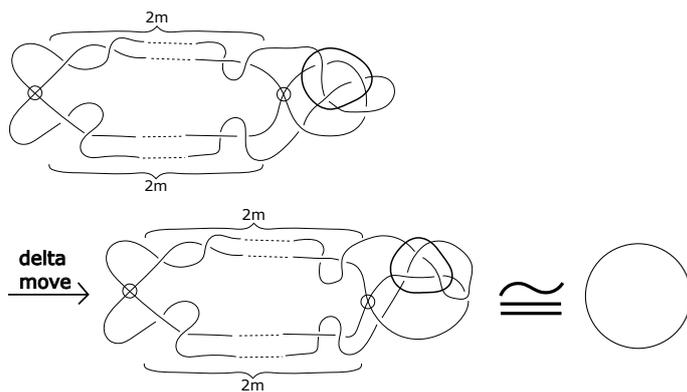
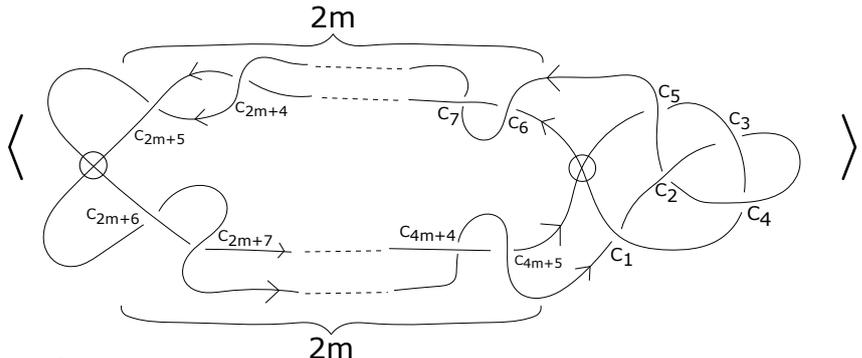


図 15

図 15 より $u^\Delta(K_m) = 1$,

次に Jones polynomial を計算すると $V(K_m) = t + t^3 - t^4$ が得られる.

最後に Miyazawa polynomial を計算する.



$$\begin{aligned}
 &= \left\{ (-A^{-1} - A^{-9} + A^{-13}) + (-A^3 + 2A^{-1} - 2A^{-5} + 2A^{-9} - A^{-13})(\sum_{i=0}^{2m-1} (-1)^i A^{-4i}) \right. \\
 &+ (-A^7 + 2A^3 - 2A^{-1} + 2A^{-5} - A^{-9})(\sum_{i=0}^{2m-1} (-1)^i A^{4i}) \left. \right\} \left\langle \bigcirc \right\rangle \\
 &+ \left\{ (-A^5 + A - A^{-3})(\sum_{i=0}^{2m-1} (-1)^i A^{-4i}) + (-A^9 + A^5 - A)(\sum_{i=0}^{2m-1} (-1)^i A^{4i}) \right. \\
 &+ (\sum_{i=0}^{2m-1} (-1)^i A^{4i})(\sum_{i=0}^{2m-1} (-1)^i A^{-4i})(A^9 + A^{-3}) \left. \right\} \left\langle \bigcirc \uparrow \right\rangle \\
 &+ (\sum_{i=0}^{2m-1} (-1)^i A^{4i})(\sum_{i=0}^{2m-1} (-1)^i A^{-4i})(-A^5 + 2A - 2A^{-3} + 2A^{-7} - A^{-11}) \left\langle \bigcirc \uparrow \right\rangle^2
 \end{aligned}$$

上記より K_m の Miyazawa polynomial x_1^2 の係数は $w(D_m) = 1$ より $(-A^3)^{-1}(-A^5 + 2A - 2A^{-3} + 2A^{-7} - A^{-11})(\sum_{i=0}^{2m-1} (-1)^i A^{4i})(\sum_{i=0}^{2m-1} (-1)^i A^{-4i})$ したがって, 異なる整数 m, n に対して $R_{K_m}(A, x) \neq R_{K_n}(A, x)$.

参考文献

- [1] R.Higa, T.Nakamura, Y.Nakanishi and S.Satoh, The intersection polynomials of a virtual knot(2021), preprint
- [2] A.Ishii, The pole diagram and the Miyazawa polynomial, *International J.of Math.* 19(2018),193-207. MR2384899(2009m:57022).
- [3] L.H. Kauffman, Virtual knot theory, *Europ.J.combin.*20(1999), no. 7, 663-691.

- [4] T.Kishino and S.Satoh, A note on non-classical virtual knots, *J. Knot Theory Ramifications* 13 (2004), no.7, 845-856.
- [5] Y.Miyazawa, A multivariable polynomial invariant for virtual knots and links, *J. Knot Theory Ramifications* 28(2008), no.11,1311-1326.
- [6] Y.Ohyama and M.Sakurai, Virtual knots with properties of Kishino's knot, *Tokyo J. Math.* vol.46, No.1(2023),19-31.
- [7] S.Satoh and K.Taniguchi, The writhe of a virtual knot, *Fund. Math* 225(2014), no.1,327-342.
- [8] M.Takeoka, Virtual knots and polynomial invariants, 修士論文, Graduate School of Science, Tokyo Woman's Christian University(2023).
- [9] S.Tsunoda, Virtual knots with special properties, 修士論文, Graduate School of Science, Tokyo Woman's Christian University(2022).