

折り紙と3次方程式の解法 ～折ることで写った点の軌跡について～

On Beloch's curve that appears when solving real cubics with origami,
a précis in Japanese

新島愛美 (Manami Nijima)*

ABSTRACT. Beloch によって 1936 年に発表された実 3 次方程式の折り紙による解法は, Justin–Huzita–Hatori によって整理された折り紙の公理 6 (滑り折りの公理) によって保証される. 本稿では, その作図の際に現れる, ある実 3 次曲線 $F(x, y) = 0$ (Beloch 曲線と呼ぶ) の概形が, 唯一存在する特異点 (p, q) における Hessian $\mathcal{H}_F = -4(4p + q^2)$ の符号によって決定されることを示す. この観点から, 折り紙の公理 5 と 6 の関係性に新たな光が当たると考えられる. 本稿は同一著者による論文 [Nii23] の日本語による概説であり, 2023 年 12 月に東京女子大学にて開催された研究集会「結び目の数理 VI」の報告集原稿である.

CONTENTS

1. 導入	1
2. 基礎となる事実の証明	3
3. 点 P' の軌跡と実 3 次曲線 $\mathcal{F}$	4
4. 実 3 次曲線 $\mathcal{F}$ の性質	4
4.1. 点 P と $\mathcal{F}$ の関係	5
4.2. 線分 AP と $A'P'$ が交わる条件	6
4.3. $\mathcal{F}_C$ の点 A 周りの回転数	6
4.4. 放物線 $\mathcal{G}: 4x + y^2 = 0$ と $\mathcal{F}$ の関係	8
4.5. 点 P の座標と, 点 P での $\mathcal{F}$ の形	9
4.6. 曲面 $z = F(x, y)$	9
5. 実代数曲線 $a_0y^2 - a_1xy^2 - a_2xy - a_3x^2 - a_4x^3 = 0$ の概形	10
References	10

1. 導入

折り紙による作図は, 7つの公理によって定義されるのが一般的である. 折り紙作図の理論は古くから存在していたが, 1980 年代に Justin, Huzita, Hatori らによって改めて基礎づけが与えられた (cf. [Jus86, p.40–45], [Lan10]). このうち公理 6 では, コンパスと定規のみの作図では不可能な, いわゆる滑らせ作図 (neusis construction) の一種が許容される.

公理 1.1 (折り紙の公理 6). 平面上に 2 点 A, B および 2 本の直線 l_1, l_2 が与えられたとき, A と B を同時にそれぞれ l_1, l_2 上に移すような“折り方”が存在する. つまり, ある直線 l であって, l に関して点 A, B と対称な点がそれぞれ直線 l_1, l_2 上に位置するようなものの作図が可能である.

この公理 6 によって, 与えられた実数係数 3 次方程式の実数解すべてを, (十分大きな) 折り紙を用いて作図できることが知られている. この方法は Lill のアイディア [Lil67] に基づいてイタリアの女性数学者 Beloch [Bel36] が初めに与えたとされている (cf. [Kat99], [Hul11], [NO15]). 正確に述べると, 次のようになる.

定理 1.2. $a, b, c \in \mathbb{R}$ を長さに持つ線分が与えられているとき, 3 次方程式

$$x^3 - ax^2 - bx + c = 0 \quad \cdots (*)$$

の全ての实数解を発見し, かつその解を長さに持つ線分を作図することができる. より詳しく,

(1) Fig. 1 の状況で, 次の 2 つの条件を同時に満たすように, ある直線 l に沿って 2 つ折りにする.

(I) 点 $A(-1, 0)$ が直線 $x = 1$ 上の点に重なる.

(II) 点 $P(b, a + c)$ が直線 $y = a - c$ 上の点に重なる.

このとき, 折り目となる直線 l の y 切片 r は, 3 次方程式 $(*)$ の解である.

(2) 逆に, 3 次方程式 $(*)$ の任意の実数解 $x = r$ に対し, 点 A を直線 $x = 1$ 上の点 $A'(1, 2r)$ に移すような折り方は, (1) の条件 (I), (II) を満たす.

Date: January 27, 2024 11:32pm.

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 51M15, 14P25; Secondary 14Q30.

Key words and phrases. origami, real cubic equation, geometric construction, real algebraic curve, Axioms 5 and 6.

* Email address: sakura5.2ijima@gmail.com 株式会社 JVC ケンウッド (JVCKENWOOD Corporation)

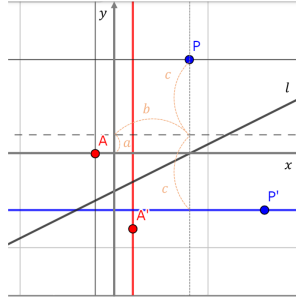


FIGURE 1. 折り紙による 3 次方程式の解の作図方法

これは言い換えると、公理 6 によって許容される、条件 (I), (II) を満たす折り方の全体と、(*) の実数解の全体の間に全単射がある、ということである。また、十分大きな理想的な折り紙があったとすれば、条件 (I) を満たす折り方の全体を、点 A の移り先 $A'(1, 2r)$ によってパラメータ付けて考えることで、すべての解を発見することができる。読者の便利のため、我々はこの定理の証明を Section 2 で与える。

この論文では、条件 (I) を満たす折り方の全体を考えたときの、点 P の移り先 $P' = P'(r)$ ($r \in \mathbb{R}$) の軌跡について調べる。議論の都合、 $(p, q) = (b, a + c)$ と置く。最終的に得られる主要な結果は次である。

定理 1.3. 点 P' の軌跡と点 $P(p, q)$ の和集合は、実 3 次曲線

$$\mathcal{F} : F(x, y) := 2(q - y)^2 - (q + y)(q - y)(p - x) - (p - x)^2(p + x) = 0$$

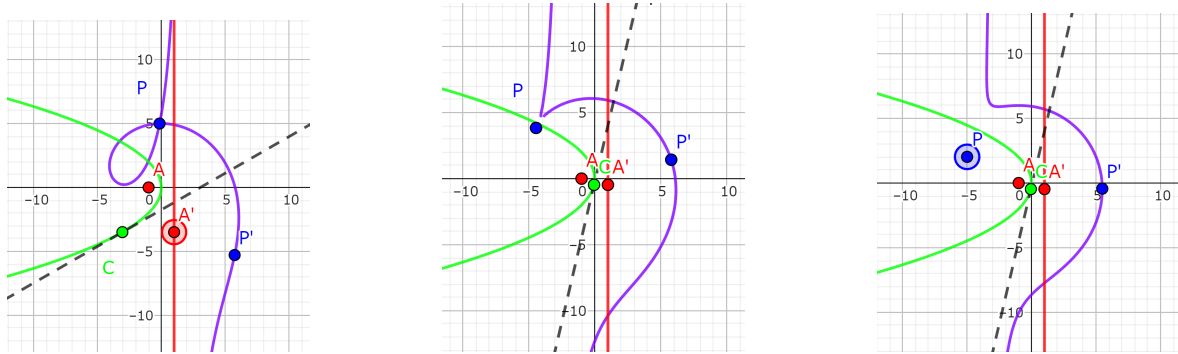
である。この実 3 次曲線 $\mathcal{F}$ を Beloch 曲線と呼ぶ。

点 P はこの曲線の一意的な特異点であり、 $F(x, y)$ の P での Hessian は

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F}} = -4(4p + q^2)$$

である。放物線 $G : 4x + y^2 = 0$ を考えると、次の同値性が成り立つ。

- P が G の左側 $\iff$ 点 P' の軌跡が点 P を通らない $\iff$ 点 P は $\mathcal{F}$ の孤立点。
- P が G 上 $\iff$ 点 P' の軌跡が点 P を丁度 1 回通る $\iff$ 点 P は $\mathcal{F}$ の尖点。
- P が G の右側 $\iff$ 点 P' の軌跡が点 P を丁度 2 回通る $\iff$ 点 P は $\mathcal{F}$ の自己交叉点。

FIGURE 2. 点 P と放物線 G の位置関係で曲線 $\mathcal{F}$ の概形が決まる

また、自己交叉がある場合に、点 P と直線 $x = 1$ の位置関係に応じて、 $\mathcal{F}$ の閉曲線部分 $\mathcal{F}_c$ の点 A 周りの回転数が決まるということも示す (定理 4.10)。定理の応用として、ある形の実 3 次曲線の概形が、ある放物線と原点の位置関係によって、3 通りに分類されることも証明する (定理 5.1)。

定理 1.3 によって折り紙の公理 5 と公理 6 が関連付けられる。折り紙の公理 5 は、点 A, Q と直線 m が与えられたとき、点 Q を通る折り目によって点 A を直線 m 上に移すことができる、というものである。今回の定理 1.3 の状況では、折り目 l は放物線 G の点 $Q(-2r, r^2)$ における接線となっている (補題 4.11) ため、折り目が放物線 G の接線でありかつ点 A を $x = 1$ に移すような折り方の全体を考えていると見ることもできる。Lang は定理 1.2 の条件 (II) のみを満たす状況で点 A の移り先の軌跡を考えることで得られる実 3 次曲線の性質を幾許か調べている [Lan10, p.47]。他方、(I) のみを満たす状況で点 P の移り先の軌跡に 3 次曲線が現れることも知られてはいた。しかし、その曲線を詳しく調べる研究は、先例が見あたらない。我々の視点から、Beloch の曲線を通じて折り紙の公理に新たな光が当たると考えられる (cf. 注意 4.14)。

論文の構成と議論の流れを以下に述べる。まず Section 2 で、定理 1.2 の証明を与える。Section 3 では、点 P' の軌跡と図形 $\mathcal{F}$ の関係性について、点 P が放物線 $G : 4x + y^2 = 0$ の左側に存在 $\iff \mathcal{F}$ が P' の軌跡と点 P の非交和、点 P が放物線 G 上または右側に存在 $\iff \mathcal{F}$ が P' の軌跡に一致という同値性 (定理 3.1) を計算によって確かめる。Section 4

では、より詳しく点 P' の軌跡の性質を調べ、定理 1.3 の証明を完成させる。まず Section 4.1 では、点 P が $\mathcal{F}$ の唯一の特異点であることを確認する (命題 4.1)。また、 P' の軌跡が点 P を 0, 1, 2 回通る $\iff P$ が放物線 $\mathcal{G}: 4x + y^2 = 0$ の左側、曲線上、右側 という同値性 (定理 4.4) を示す。ここでは、点 P を中心とし AP を半径とする円周 C が重要な役割を果たす。Section 4.2 では、線分 AP と $A'P'$ が交わるための必要十分条件を幾つか得る (命題 4.5, 命題 4.6)。これは定理 1.3 の証明で重要な役割を果たす。Section 4.3 では、点 A と P' の軌跡の関係について、定理 1.3 とは独立な次の結果を得る: 条件 $p < 1, p = 1, p > 1$ (点 P と直線 $x = 1$ の位置関係) に応じて、 $\mathcal{F}$ の点 A 周りの回転数は 0, 定義されない, 1 となる (定理 4.10)。

Section 4.4 では、放物線 $\mathcal{G}$ と P' の軌跡との関係を調べる。また、線分 AA' の垂直二等分線が放物線 $\mathcal{G}$ の接線であること (これは折り紙の公理 5 と密接な関係がある) に注意して、定理 4.4 の場合分けの条件は、 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の交点が 0, 1, 2 個であることも同値であることを示す (定理 4.12)。Section 4.5 で定理 1.3 の証明が完了する。点 $P(p, q)$ と放物線 $\mathcal{G}$ の位置関係は、 $\mathcal{F}$ の点 P における $\mathcal{H}_{\mathcal{F}} = -4(4p + q^2)$ の符号の条件に言い換えられる。命題 4.5, 命題 4.6 の帰結として、次を得る。点 P' の軌跡 (図形 $\mathcal{F}$ の曲線部分) が点 P を 0, 1, 2 回通る $\iff$ 点 P が 3 次曲線 $\mathcal{F}$ の孤立点・尖点・自己交叉点という同値性がある (定理 4.13)。こうした状況は、図形 $\mathcal{F}$ を 3 次元空間内の曲面 $z = F(x, y)$ の断面と見ると視覚的に捉えやすいので、Section 4.6 では 3 次元的な図を考察する。

Section 5 では、より一般的な状況 ($A(-1, 0)$ を $A(-\frac{a}{2}, 0)$ に取り替える) について、パラメータを取り替え、点 P を原点に平行移動した場合を考え、上の結果の帰結を考える。これを踏まえ、一般に実代数曲線 $a_0y^2 - a_1xy^2 - a_2xy - a_3x^2 - a_4x^3 = 0$ の概形が、ある放物線と原点の位置関係によって 3 パターンに分類されることを示す (定理 5.1)。

謝辞. 本資料を作成するにあたり、議論に対するアドバイスや本資料の添削していただいた植木潤先生 (お茶の水女子大学、講師) に深く感謝申し上げます。そして、私の進捗状況を気にかけて下さった大場清先生 (同、准教授)、折り紙について考えるきっかけを下さった中居功先生 (同、名誉教授)、問いかけを下さった丸木和彦先生 (熊谷女子高等学校) をはじめとする多くの先生方、数学科生の皆さまのおかげで研究をすることが出来ました。本当にありがとうございました。

2. 基礎となる事実の証明

ここでは読者の便利のために、前節に掲げた定理 1.2 の証明を与える。

証明. まず (1) を示す。(1) の条件 (I), (II) を満たす折り方を 1 つ見つけたとして、折り目 l と y 軸の交点を $(0, r)$ とする。このとき、直線 l の方程式は

$$l: x + ry - r^2 = 0$$

である。 l について P と対称な点 P' の座標を $(s, a - c)$ とする。線分 PP' の中点 $(\frac{b+s}{2}, a)$ が直線 l 上にあるので、

$$\frac{b+s}{2} + ra - r^2 = 0$$

が成り立つ。また直線 l と PP' は直交するので、ベクトル $\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} s-b \\ (a-c) - (a+c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-b \\ -2c \end{pmatrix}$ と l の法線ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}$ とが平行、つまり

$$\begin{vmatrix} s-b & 1 \\ -2c & r \end{vmatrix} = r(s-b) + 2c = 0$$

である。これらを連立して s を消去すれば

$$r^3 - ar^2 - br + c = 0 \quad (2.1)$$

となる。よって r は 3 次方程式 $x^3 - ax^2 - bx + c = 0$ の解である。

次に (2) を示す。 $r^3 - ar^2 - br + c = 0$ をみたす任意の $r \in \mathbb{R}$ を取り、 $A(-1, 0)$ と $A'(1, 2r)$ の垂直二等分線 l で折ることを考える。するとこの折り目 l は条件 (I) を満たし、 y 切片が r であることが分かる。あとは、点 $P(b, a+c)$ の移り先である点 $P'(s, t)$ について条件 (II) つまり $t = a - c$ であることを確かめればよい。

直線 l は点 $(0, r)$ を通り $\begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}$ を法線ベクトルにもつので、方程式 $x + r(y - r) = 0$ と表される。直線 l の方向ベクトルは $\begin{pmatrix} r \\ -1 \end{pmatrix}$ で、 PP' と l が直交することから、以下の式が得られる。

$$\begin{pmatrix} s-b \\ t - (a+c) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ -1 \end{pmatrix} = r(s-b) - (t - (a+c)) = 0$$

また、線分 PP' の中点 $(\frac{b+s}{2}, \frac{a+c+t}{2})$ が l 上にあることから、

$$\frac{b+s}{2} + \frac{a+c+t}{2}r - r^2 = 0$$

が得られ、 s を消去すると以下の式になる。

$$-2r^3 + (a+c+t)r^2 + 2br + (t - (a+c)) = 0. \quad (2.2)$$

ここで (2.2)+(2.1) $\times 2$ により b を消去すると

$$(-a+c+t)r^2 + (t-a+c) = (t-(a-c))(r^2+1) = 0$$

となり, $t = a - c$ を得る. 上で触れた折り紙の公理により (パラメータを連続的に変形させながら条件を満たす折り目を見つけていけば), すべての実数解を見つけることができる. $\square$

3. 点 P' の軌跡と実 3 次曲線 $\mathcal{F}$

定理 1.2 の作図について詳しく考察するため, 条件 (I) の折り方の全体を考え, そのときの点 P の移り先 P' の軌跡を考察していく. 以後, 簡単のため, 点 $P(b, a+c)$ の座標を (p, q) と取り直す. すると次が言える.

定理 3.1. 曲線 $\mathcal{F}: F(x, y) = 2(q-y)^2 - (q+y)(q-y)(p-x) - (p-x)^2(p+x) = 0$ および放物線 $\mathcal{G}: 4x + y^2 = 0$ を考える. 点 P' の軌跡と $\mathcal{F}$ の関係は以下になっている.

- 点 P が $\mathcal{G}$ の左側にあるとき, $\mathcal{F}$ は点 P' の軌跡と点 P の非交和である.
- 点 P が $\mathcal{G}$ 上または $\mathcal{G}$ の右側にあるとき, $\mathcal{F}$ は点 P' の軌跡と一致する.

証明. 点 P' の軌跡 $\subset \mathcal{F}$ であること. 条件を満たす点 $P'(s, t)$ を考える. 折り目 l は $x + ry - r^2 = 0$ で表され, 直線 PP' と l が直交することから

$$\begin{pmatrix} s-p \\ t-q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ -1 \end{pmatrix} = r(s-p) - (t-q) = 0, \quad (3.1)$$

また線分 PP' の中点 $(\frac{p+s}{2}, \frac{q+t}{2})$ が l 上にあることから,

$$\frac{p+s}{2} + \frac{q+t}{2}r - r^2 = 0 \quad (3.2)$$

が成り立つ. ここで Eq.(3.1) から得られる $r(s-p) = t-q$ を Eq.(3.2) $\times 2(s-p)^2$ に代入して, 次を得る:

$$F(s, t) = 2(q-t)^2 - (q+t)(q-t)(p-s) - (p-s)^2(p+s) = 0.$$

点 P' の軌跡 $\subset \mathcal{F}$ となる条件 点 (s, t) が $\mathcal{F}$ 上にあるならば, $F(s, t) = 0$ より

$$2(q-t)^2 - ((q+t)(q-t) - (p-s)(p+s))(p-s) = 0 \quad (3.3)$$

を得る. 点 P と点 (s, t) の垂直二等分線 m は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q-t \\ -p+s \end{pmatrix} k + \begin{pmatrix} \frac{p+s}{2} \\ \frac{q+t}{2} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R},$$

$$2(p-s)x + 2(q-t)y - (q+t)(q-t) + (p+s)(p-s) = 0 \quad (3.4)$$

で表される. $A(-1, 0)$ を直線 m に対して対称移動した点 $A'(u, 2r)$ が $x = 1$ 上に実際に存在することを示せば, $(s, t) \in (P' \text{ の軌跡})$ であることが言える. 直線 m は AA' の中点 $(\frac{u-1}{2}, r)$ を通るため, Eq.(3.4) に代入して変形すると

$$(p-s)(u-1) + 2r(q-t) - (q+t)(q-t) + (p+s)(p-s) = 0 \quad (3.5)$$

を得る. ここで Eq.(3.5) $\times (p-s)$ -Eq.(3.3) より

$$(p-s)^2(u-1) + 2(p-s)(q-t)r - 2(q-t)^2 = 0 \quad (3.6)$$

を得る. また, 直線 m と直線 AA' は垂直に交わることから,

$$(u+1)(q-t) = 2r(p-s) \quad (3.7)$$

を得る. ここで Eq.(3.6) $\times (u+1)^2$ に Eq.(3.7) を代入すると, 次を得る.

$$\begin{aligned} 0 &= (p-s)^2(u+1)^2(u-1) + 4r^2(p-s)^2(u+1) - 8r^2(p-s)^2 \\ &= \cdots = (p-s)^2(u-1)((u+1)^2 + 4r^2). \end{aligned}$$

このとき $u = 1$ または $s = p$ である. $u = 1$ のとき, 点 A' は $x = 1$ 上についている. $s = p$ のとき, $(s, t) \in \mathcal{F}$ より $t = q$ であり, $P = P'$ である. これは $AP = A'P$ と同値なので, そのような A' の存在条件を考える.

放物線 $\mathcal{G}$ が焦点 A と準線 $x = 1$ によって定義されることに注意しておく. 以下の議論では Section 1 の Fig.2 が理解の助けになる. 点 P が $\mathcal{G}$ 上または右側にあるとき, つまり $4p + q^2 \geq 0$ のとき, 放物線の性質より, そのような点 A' が存在する. 一方, 点 P が $\mathcal{G}$ の左側にあるとき, つまり $4p + q^2 < 0$ のとき, 放物線の性質より常に $AP < A'P$ となってしまうため, 条件を満たす点 A' は存在しない.

以上により, $\mathcal{F} \setminus (\text{点 } P' \text{ の軌跡})$ が元を持つならばそれは P に限られること, また, P が P' の軌跡上にあることは P が $\mathcal{G}$ の左側にあることと同値だということが示された. $\square$

系 3.2. $P'(s, t)$ の軌跡 $\subset \mathcal{F}$ は, パラメータ r を使うと以下のように表せる.

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{r^2+1} \begin{pmatrix} (2+p)r^2 - 2qr - p \\ 2r^3 - qr^2 - 2pr + q \end{pmatrix}$$

証明. 定理 3.1 の証明前半で, Eq.(3.1)–Eq.(3.2)×2r と Eq.(3.1)×r+Eq.(3.2)×2 を整理すれば, s, t について r をパラメータとした媒体変数表示の形を得る. $\square$

4. 実3次曲線 $\mathcal{F}$ の性質

ここでは点 P' の軌跡と点 P の合併である実3次曲線 $\mathcal{F}$ の定義多項式 $F(x, y)$ の性質, および P' の軌跡を $A'(1, 2r)$ の y 座標を決める r でパラメータ付けられた曲線と見たものの性質について, 詳しく調べる.

4.1. 点 P と $\mathcal{F}$ の関係.

命題 4.1. $F(x, y) = 0$ の特異点全体の集合は $\{P\}$ である.

証明. $F(x, y)$ の x と y での偏微分はそれぞれ,

$$F_x = (q + y)(q - y) + (p - x)(p + 3x),$$

$$F_y = -4(q - y) + 2y(p - x).$$

ここで $F = F_x = F_y = 0$ を解くと, $x = p, y = q$ を得る. なおこの計算には Mathematica [Inc23] を援用した. $\square$

命題 4.2. 点 P が固定されているとき, 定理 1.2 の条件 (I) を満たす折り目 l および対応する点 A' と点 P' について, 次の4つの条件は同値である.

- (i) 点 P と点 P' が重なる.
- (ii) 折り目 l が点 P を通る.
- (iii) $AP = A'P$ である.
- (iv) 点 A' は, 点 P を中心とし, 半径 AP である円周 C 上にある.

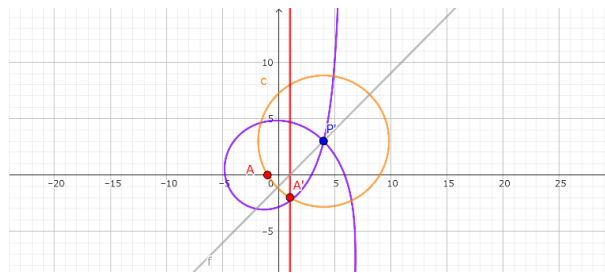


FIGURE 3. 命題 4.2 の条件 (i)~(iv) を満たしている例

証明. (i) $\iff$ (ii): 点 P' は直線 l について点 P と線対称な点なので, 点 P が l 上にあることと $P = P'$ は同値である. (ii) $\iff$ (iii): l は線分 AA' の垂直二等分線なので, 点 P が l 上に乗る条件は $AP = A'P$ である. (iii) $\iff$ (iv): 円周 C の定義より明らかである. $\square$

このうち (i) と (iv) の同値性によって, P' の性質を, A' の言葉に翻訳して調べられる.

命題 4.3. 点 A' が動く直線 $x = 1$ と円周 C の交点の個数は, 点 $P(p, q)$ と放物線 $\mathcal{G}: 4x + y^2 = 0$ の位置関係によって次のように定まる.

- 交点が0個 $\iff 4p + q^2 < 0$,
- 交点が丁度1個 $\iff 4p + q^2 = 0$,
- 交点が2個以上 $\iff 4p + q^2 > 0$.

なお $\mathcal{G}$ は準線が $x = 1$, 焦点が点 $A(-1, 0)$ の二次曲線である.

証明. 交点が2個の時を考える. 円と直線の交点が2つあるということは, 中心と直線の距離が円の半径よりも短いということである. よって $|AP|^2 > (p - 1)^2$ から $4p + q^2 > 0$ を得る. これは点 P が放物線の右側にあることを意味する. 交点が1個, 0個の場合も同様. $\square$

曲線 $\mathcal{F}$ の連結成分である曲線は, 定理 1.2 の条件 (I) を満たす点 P' 全体の軌跡であり, 点 $A'(1, 2r)$ の座標を指定する $r \in \mathbb{R}$ の値でパラメータ付けられた曲線と見られる.

定理 4.4. P' の軌跡を $r \in \mathbb{R}$ でパラメータ付けられた曲線と見たとき, 次の同値性がある.

- P' の軌跡が点 P を0回通る $\iff 4p + q^2 < 0$,
- P' の軌跡が点 P を1回通る $\iff 4p + q^2 = 0$,
- P' の軌跡が点 P を2回通る $\iff 4p + q^2 > 0$.

証明. 命題 4.2 と命題 4.3 より成り立つ. $\square$

4.2. 線分 AP と $A'P'$ が交わる条件. ここで得る命題 4.5, 命題 4.6 は, 定理 1.3 の証明で重要な役割を果たす.

命題 4.5. 点 A と円周 C の位置関係で, 線分 AP と $A'P'$ の交わり方が次のように決まる:

- $P = P' \iff$ 点 A' は円周 C 上にある.
- 線分 AP と $A'P'$ が交わり, $P \neq P' \iff$ 点 A' は円周 C の内部にある.
- 線分 AP と $A'P'$ が交わらない $\iff$ 点 A' は円周 C の外部にある.

証明. $P = P'$ の場合の同値性は命題 4.2 によって既に示されている.

$P \neq P'$ のときを考える. 折り目 l は線分 AA' と PP' の垂直二等分線なので, A と A' , P と P' は, それぞれ l について互いに異なる側にある. ここで次の同値性から結論を得る.

線分 AP と $A'P'$ が交わる $\iff A$ と P が l について異なる側にある

$$\iff \text{折り目 } l \text{ の定義多項式 } x + ry - r^2 \text{ に } A, P \text{ の座標を代入した値の符号が異なる} \iff (-1 - r^2)(p + qr - r^2) < 0$$

$$\iff p + qr - r^2 > 0 \iff q - \sqrt{q^2 + 4p} < r < q + \sqrt{q^2 + 4p} \iff A' \text{ は円周 } C \text{ の内部.} \quad \square$$

命題 4.6. 点 $P(p, q)$ と $P'(s, t)$ の x 座標について,

- $P = P' \iff p = s,$
- 線分 AP と $A'P'$ が交わり, $P \neq P' \iff p > s,$
- 線分 AP と $A'P'$ が交わらない $\iff p < s.$

証明. 1 つ目は明らか. $P \neq P'$ のときを考える. 直線 l は線分 AA' と PP' の共通の垂直二等分線なので, AA' と PP' は平行であり, また

$$\text{線分 } AA' \text{ と } PP' \text{ が交わる} \iff \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2r \end{pmatrix} \text{ と } \overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} s-p \\ t-q \end{pmatrix} \text{ が同じ向き} \iff s > p. \quad \square$$

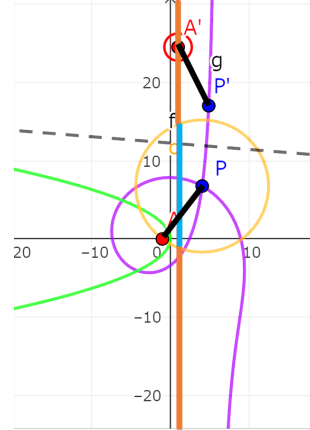
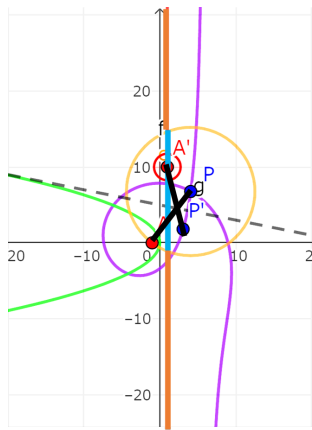


FIGURE 4. AP と $A'P'$ の交わりかた

4.3. $\mathcal{F}_C$ の点 A 周りの回転数. 定理 4.4 により, $4p + q^2 > 0$ のとき曲線 $\mathcal{F}$ は点 $P(p, q)$ で自己交差する. 曲線 $\mathcal{F}$ の自己交差点 P に挟まれる部分がなす閉曲線を $\mathcal{F}_c$ とする. この節では, 点 A 周りの $\mathcal{F}_c$ の回転数を調べる. ここで得られる結果は定理 1.3 とは独立である.

定義 4.7. 閉区間 $\subset \mathbb{R}$ でパラメータ付けられた閉曲線 Γ および Γ 上にはない点 A を考える. 動点 P' が Γ 上をパラメータ付けにしたがって動くとき, 写像 $\varphi: \Gamma \rightarrow S^1; P' \mapsto \overrightarrow{AP'} / |\overrightarrow{AP'}|$ による P' の像が S^1 上を反時計回りに何周するかを, Γ の点 A 周りの回転数と呼ぶ.

補題 4.8. xy 平面上で, 区分的に滑らかな閉曲線 Γ と, Γ 上にはない点 A について, 点 A を始点とし x 軸, y 軸に平行な 4 つの半直線と Γ の交点がそれぞれ 1 個ずつ存在していたならば, Γ の点 A の周りの回転数は 1 である.

証明. 4 つの半直線と Γ の交点を, A からみて x 軸正方向にある点から順に反時計回りに $P_1, \dots, P_4$ とする. 以後, 添字は mod 4 で考える. 十分小さな $\varepsilon > 0$ を取り, 各 P_i を中心とし, 半径を ε とする円周 C_i を考える. Γ に沿って点 P' 動くとき, P_i に至る前に最後に C_i と交わる点を P_i^- , P_i を出てから最初に C_i と交わる点を P_i^+ とする. Γ のうち P_i^- から P_i^+ までの部分, $P_i^\pm$ たちを片方の端点とし x 軸, y 軸に平行であるような線分 $L_i^\pm$ たちを適切につなげることで, 十字架型の単純閉曲線 $\mathcal{X}$ を作る. また L_{i+1}^-, L_i^+ , および Γ のうち P_i^+ から P_{i+1}^- までの部分をつなげて得られる閉曲線を Γ_i とする. すると, 自然な向き付けのもと, 1 サイクルとして $\Gamma = \mathcal{X} + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ となり, Γ_i の A の周りの回転数は 0, $\mathcal{X}$ の A の周りの回転数は 1 なので, Γ の A の周りの回転数は 1 である. $\square$

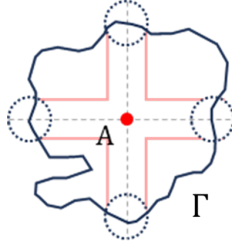


FIGURE 5. 補題 4.8 の状況

補題 4.9. $4p + q^2 > 0$, $p > 1$ を仮定する. 曲線 $\mathcal{F}$ の定義多項式 $F(x, y)$ は次を満たす.

- (1) $F(-1, t) = 0$ を t について解くと, 符号の異なる 2 つの実数解 α, β がある.
- (2) $F(s, 0) = 0$ を s について解くと, 相異なる 3 つの実数解があり, 1 つは $s < -1$ の範囲, ほかの 2 つは $s > -1$ の範囲にある. また, $\mathcal{F}_c$ 上に制限すれば, それぞれの範囲に 1 つずつある.

証明. (1) $F(-1, t) = 1 + p - p^2 - p^3 + q^2 - pq^2 - 4qt + 3t^2 + pt^2$ について, $D > 0$ と $\alpha\beta < 0$ を示せばよい. まず,

$$\alpha\beta = \text{定数項/最高次係数} = (1 + p - p^2 - p^3 + q^2 - pq^2)/(3 + p)$$

であるが, この符号は $1 + p - p^2 - p^3 + q^2 - pq^2 = (1 - p)(1 + 2p + p^2 + q^2)$ に一致する. ここで $1 - p < 0$, $1 + 2p + p^2 + q^2 > 1 - 2p + p^2 = (1 - p)^2 > 0$ より, $\alpha\beta < 0$ である. すると

$$D = (4q)^2 - 4(1 + p - p^2 - p^3 + q^2 - pq^2)(3 + p) = (4q)^2 - 4\alpha\beta(3 + p)^2 > 0$$

である. 以上により結論が得られた.

(2) $F(s, 0) = -p^3 + 2q^2 - pq^2 + (p^2 + q^2)s + ps^2 - s^3$ は変数 s について最高次係数が負の 3 次関数である. いま $-1 < p$ であり, $s = -1, p$ での値について

$$F(-1, 0) = (1 - p)(1 + 2p + p^2 + q^2) < 0, \quad F(p, 0) = 2q^2 > 0$$

なので, 実数解は $s < -1$ の範囲に 1 つ, $s > -1$ の範囲に 2 つある. また $\mathcal{F}$ の自己交叉点の x 座標が p なので, $F(p, 0) = 2q^2 > 0$ により, 2 つの自己交叉点の間に限ると, 2 つの範囲に実数解が 1 つずつある. $\square$

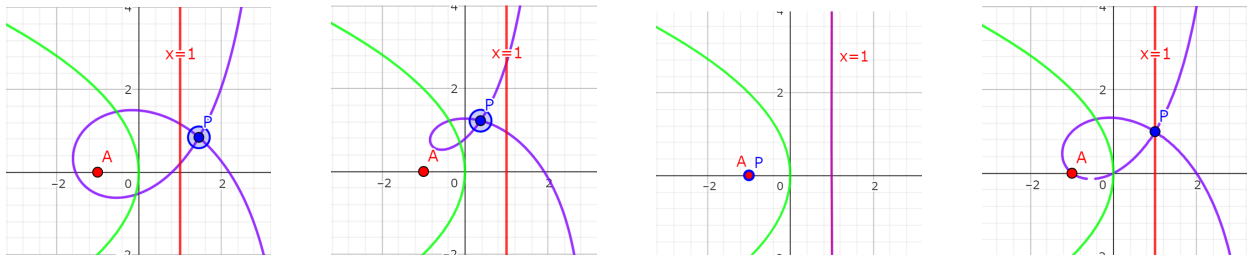
定理 4.10. $4p + q^2 > 0$ のもとで, 閉曲線 $\mathcal{F}_c$ と点 A の関係は点 P の位置によって以下のように決まる.

- $p > 1 \iff$ 曲線 $\mathcal{F}_c$ の点 A 周りの回転数=1.
- $p < 1 \iff$ 曲線 $\mathcal{F}_c$ の点 A 周りの回転数=0, または $A = P$.
- $p = 1 \iff$ 点 A は曲線 $\mathcal{F}_c$ 上にあり, $A \neq P$.

証明. $p > 1$ のとき, 直前の 2 つの補題により, 求める回転数は 1 である. $p < 1$ のとき, もし求める回転数が 0 でなかったとすると, 連続写像 $\varphi: \mathcal{F}_c \rightarrow S^1; P' \mapsto \overrightarrow{AP'}/|\overrightarrow{AP'}|$ は全射となり, 特に $\varphi(P') = \overrightarrow{PA}/|\overrightarrow{PA}|$ となる P' が存在するが, そのとき A' は線分 AP 上に乗る. これは $p < 1$ に反するので, 求める回転数は 0 である. 曲線 $\mathcal{F}$ が点 $A(-1, 0)$ を通る条件は

$$F(-1, 0) = -(p - 1)((p + 1)^2 + q^2) = 0,$$

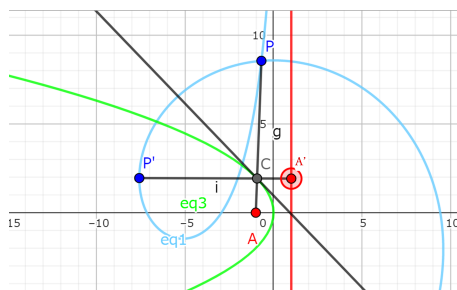
つまり $p = 1$ または $P(p, q) = A(-1, 0)$ である. $p = 1$ のとき $P \neq A$ なので, 結論を得る. $\square$

FIGURE 6. 点 P の位置と図形 $\mathcal{F}$ の点 A 周りの回転数の関係

4.4. 放物線 $\mathcal{G} : 4x + y^2 = 0$ と $\mathcal{F}$ の関係.

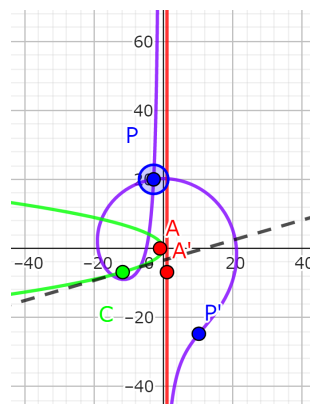
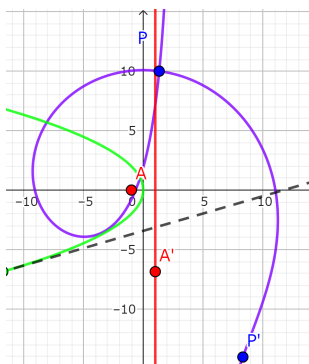
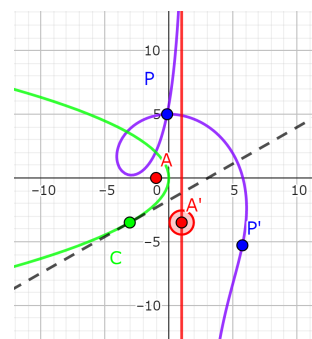
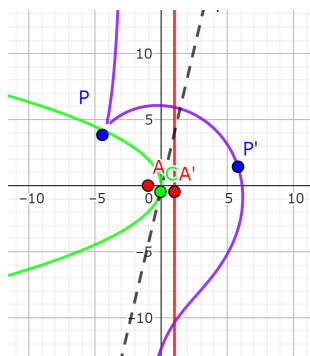
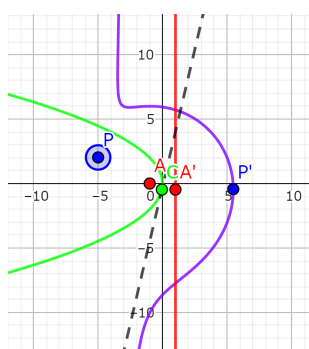
補題 4.11. 任意の $r \in \mathbb{R}$ に対し, $A(-1, 0)$ と $A'(1, 2r)$ の垂直二等分線 l は, 放物線 $\mathcal{G} : 4x + y^2 = 0$ の点 $(-r^2, 2r)$ における接線に等しい.

証明. 直線 l の方程式は $\overrightarrow{AA'} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}) \right) = 0$ より $x + ry - r^2 = 0$ である. 一方, 点 $(-r^2, 2r)$ における $\mathcal{G}$ の接線は, 全微分の式 $d(4x + y^2) = 4dx + 2ydy$ より $4(x - (-r^2)) + 2(2r)(y - 2r) = 0$, よって $x + ry - r^2 = 0$ である. よって両者は一致する. $\square$

FIGURE 7. 接線と点 A' の関係

定理 4.12. 点 P の放物線 $\mathcal{G}$ に対する位置関係と, 2 曲線の交点の個数について, 次の同値性がある.

- $4p + q^2 < 0 \iff$ 放物線 $\mathcal{G}$ と曲線 $\mathcal{F}$ の交点は 0 個.
- $4p + q^2 = 0 \iff$ 放物線 $\mathcal{G}$ と曲線 $\mathcal{F}$ の交点は 1 個.
- $4p + q^2 > 0 \iff$ 放物線 $\mathcal{G}$ と曲線 $\mathcal{F}$ の交点は 2 個以上.

FIGURE 8. 放物線 $\mathcal{G}$ と曲線 $\mathcal{F}$ の交点の例

証明. $4p + q^2 > 0$ のとき, 点 $A(-1, 0)$ は放物線の左側, 点 $P(p, q)$ は放物線の右側にあるため, 必ず線分 AP と放物線の交点がある. この交点を点 $C(-c^2, 2c)$ とする. 点 A' の y 座標が点 C の y 座標と同じになる時, つまり $A'(1, 2c)$ の時, 点 P' , 点 C , 点 A は一直線上になり, 線分 $A'P'$ は x 軸と平行になっている. 点 P は放物線の右側にあり, 折り目は点 C での $\mathcal{G}$ の接線であるため, P', C, A' の順で直線上に並んでいることを踏まえると, 点 P' は放物線の左側にあることが分かる. 曲線 $\mathcal{F}$ は $q - \sqrt{q^2 + 4p} \leq r \leq q + \sqrt{q^2 + 4p}$ の範囲では閉曲線であるため, 放物線 $\mathcal{G}$ と曲線 $\mathcal{F}$ の交点は 2 個以上である.

$4p + q^2 = 0$ のとき, 線分 AP と放物線の交点は点 P である (点 $C = \text{点 } P$). そのため, $A' = (1, 2q)$ のとき, $P = P'$ となり, P' は放物線上に載っている. また $A' \neq (1, 2q)$ のとき, 折り目は放物線の接線であるため, 点 P' は放物線の右側にある. ゆえに放物線 $\mathcal{G}$ と曲線 $\mathcal{F}$ の交点は 1 個である.

$4p + q^2 < 0$ のとき, 点 A , 点 P とともに放物線の左側にあるため, 線分 AP と放物線の交点は存在しない. また点 P の位置と折り目は接線であることから, 点 P' は必ず放物線の右側にあり, よって $\mathcal{G}$ と曲線 $\mathcal{F}$ との交点は 0 個である. $\square$

4.5. 点 P の座標と, 点 P での $\mathcal{F}$ の形.

定理 4.13. 曲線 $\mathcal{F}$ の形は点 P の位置によって以下のように決まる.

- $4p + q^2 < 0 \iff$ 点 P は $\mathcal{F}$ の孤立点.
- $4p + q^2 = 0 \iff$ 点 P は $\mathcal{F}$ の尖点.
- $4p + q^2 > 0 \iff$ 点 P は $\mathcal{F}$ の自己交叉.

ここに尖点とは, x と y での偏微分が 0 であり, 自己交叉, 孤立点でないような点のことをいう.

証明. 命題 4.1 より, 点 P は $F(x, y)$ の特異点である. $F(x, y)$ の Hessian について,

$$\mathcal{H}_F = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2p - 6x & -2y \\ -2y & 4 + 2p - 2x \end{vmatrix} = (2p - 6x)(4 + 2p - 2x) - 4y^2,$$

$$\mathcal{H}_F(p, q) = -4(4p + q^2)$$

となる. 2 変数関数の極値判定法により, 点 $P(p, q)$ は, $\mathcal{H}_F(p, q) > 0$ ならば曲面 $z = F(x, y)$ の極値点, $\mathcal{H}_F(p, q) < 0$ ならば曲面 $z = F(x, y)$ の峠点である. よって, $\mathcal{F}$ を $z = F(x, y) = 2(q - y)^2 - (q + y)(q - y)(p - x) - (p - x)^2(p + x)$ と $z = 0$ の断面として考えると, $4p + q^2 < 0$ のとき孤立点, $4p + q^2 > 0$ のとき自己交叉であることが分かる. $4p + q^2 = 0$ のとき, 円 C と $x = 0$ の交点は一点しかないため, 命題 4.5 より, 線分 AP と線分 $A'P'$ は点 P で交わるときしかない. そのため, 命題 4.6 より, 点 $P'(s, t)$ について $p \leq s$ である. 点 P' の軌跡が連結であること, P と P' の位置関係が $p \leq s$ を満たすこと, 点 P は $\mathcal{F}$ の特異点であること (命題 4.1) から, 点 P は尖点であることが分かる. $\square$

定理 1.3 の証明. 以上により, 導入に述べた主定理 (定理 1.3) の証明が完結した. $\square$

注意 4.14. 導入でも述べたが, 折り紙の公理 5 は, 点 A, Q と直線 m が与えられたとき, 点 Q を通る折り目によって点 A を直線 m 上に移すことができる, というものであり, 与えられた放物線に対してある条件を満たす接線の作図可能性との同値性が知られている. 補題 4.11 より, 我々の定理 1.3 は, 折り目が放物線上の点 Q を通りかつ点 A を $x = 1$ に移すような折り方の全体を考えていると見ることもできる.

他方, 公理 6 は 2 つの放物線の共通接線の作図可能性と同値であることが知られている. 放物線 $\mathcal{G}: 4x + y^2 = 0$ は, 点 $A(-1, 0)$ を焦点とし, 直線 $x = 1$ を準線にもつ二次曲線である. さらに点 $P(p, q)$ を焦点とし, 準線が $y = a - c$ であるような放物線 $\mathcal{G}'$ を考えると, 折り目 l は $\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}'$ となっている.

我々の今回の研究は, これら 2 つの公理の関係性を吟味する新たな視点を与えている. もう一つの放物線 $\mathcal{G}'$ にも立脚することで, さらなる展望が得られる可能性がある.

注意 4.15. 我々は定理 1.2 の条件 (I) を満たす折り方の全体を考え, 点 P の移り先である P' の軌跡によって Beloch の曲線 $\mathcal{F}: F(x, y) = 0$ を定義した. 代わりに条件 (II) を満たす折り方の全体を考えても, 点 A の移り先 A' の軌跡によってある実 3 次曲線が定まり, 同様の研究が可能である (cf. [Lan10, p.47]).

4.6. 曲面 $z = F(x, y)$. なお, $\mathcal{F}$ を $z = F(x, y) = 2(q - y)^2 - (q + y)(q - y)(p - x) - (p - x)^2(p + x)$ と $z = 0$ の断面として考えると, 3 次元的に状況を把握することができる (Fig. 9).

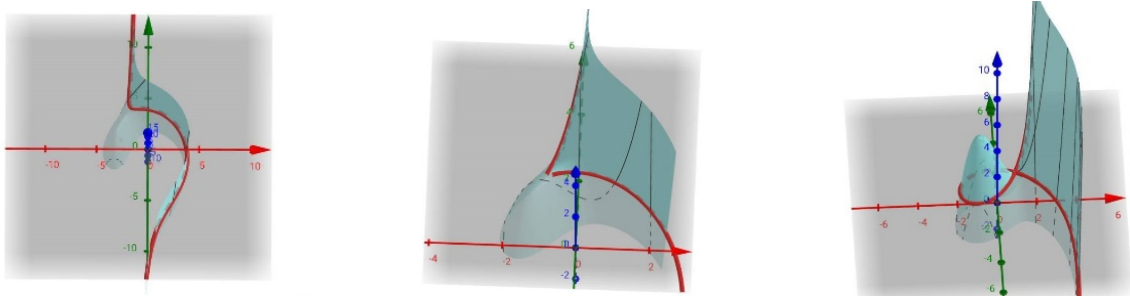


FIGURE 9. 曲面 $z = F(x, y)$ と曲線 $\mathcal{F}$

ヘシアン $-4(4p+q^2)$ が正, つまり $4p+q^2 < 0$ のとき, $F_{xx}(p,q) = -4p > 0$ なので, $z = F(x,y)$ は P で極大値を取る. より詳しく, 次が予想される.

予想 4.16. 曲面 $z = F(x,y)$ の形は点 P の位置によって以下のように決まる.

- $4p+q^2 < 0 \iff$ 曲面は1つの極大点と1つの峠点を持ち, 極大点は $(p,q,0)$.
- $4p+q^2 = 0 \iff$ 曲面は極値点を持たず, 1つの峠点 $(p,q,0)$ を持つ.
- $4p+q^2 > 0 \iff$ 曲面は1つの極大点と1つの峠点を持ち, 峠点は $(p,q,0)$.

5. 実代数曲線 $a_0y^2 - a_1xy^2 - a_2xy - a_3x^2 - a_4x^3 = 0$ の概形

任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と, 任意の点 $P(p,q)$ を取る. 点 $A_P(-\frac{\alpha}{2}, 0)$ が直線 $x = \frac{\alpha}{2}$ の上に乗るような折り方全体を考えたとき, 点 P の移り先 P' 全体の軌跡と, 孤立点かもしれない1点からなる集合 $\{P\}$ の合併は,

$$\mathcal{F}_P : \alpha(q-y)^2 - (q-y)(q+y)(p-x) - (p-x)^2(p+x) = 0$$

となる. 前節で考えていたのは $\alpha = 2$ の場合にあたり, 状況は相似の関係にあるので, 前節までの議論によって, この曲線の概形は $\mathcal{G}_P : 4x+y^2 = 0$ と点 P の位置関係によって決定されることが分かる. また点 P は $\mathcal{F}_P$ の一意的な特異点であることも分かる. さらに, $\overline{OP}$ での平行移動を考えると, 以下ようになる. 点 $A_O(-\frac{\alpha}{2} - p, -q)$ が直線 $x = \frac{\alpha}{2} - p$ の上に乗るように折ったとき, 点 O の移り先の軌跡と点 O の合併は,

$$\mathcal{F}_O : \alpha y^2 - xy^2 - 2qxy - 2px^2 - x^3 = 0$$

となる. この曲線の概形は, $\mathcal{G}_O : 4(x+p) + (y+q)^2 = 0$ と点 $O(0,0)$ の位置関係によって決定される. また点 O は曲線 $\mathcal{F}_O$ の一意的な特異点である. このことを踏まえると, より一般に次が言える.

定理 5.1. 実3次曲線

$$\tilde{\mathcal{F}} : a_0y^2 - a_1xy^2 - a_2xy - a_3x^2 - a_4x^3 = 0 \quad (a_i \in \mathbb{R} - \{0\})$$

の形は, $\mathcal{G}_O : G_O(x,y) = 4(x + \frac{a_3}{2\sqrt{a_1a_4}}) + (y + \frac{a_2}{2a_1})^2 = 0$ と点 $O(0,0)$ の位置関係で3パターンで分けられ, 特異点は点 $O(0,0)$ である. 詳しくは, $G_O(0,0) = \frac{2a_3}{\sqrt{a_1a_4}} + (\frac{a_2}{2a_1})^2$ の値について,

- $G_O(0,0) < 0 \iff$ 点 O で孤立点,
- $G_O(0,0) = 0 \iff$ 点 O で尖点,
- $G_O(0,0) > 0 \iff$ 点 O で自己交叉.

証明. $\tilde{\mathcal{F}}$ の式に $\beta = \sqrt{\frac{a_4}{a_1^3}}$ をかけると

$$\begin{aligned} a_0\beta y^2 - a_1\beta xy^2 - a_2\beta xy - a_3\beta x^2 - a_4\beta x^3 &= 0, \\ a_0\beta y^2 - (a_1\beta x)y^2 - \frac{a_2}{a_1}(a_1\beta x)y - \frac{a_3}{a_1^2\beta}(a_1\beta x)^2 - (a_1\beta x)^3 &= 0. \end{aligned}$$

この式を $\mathcal{F}_O : \alpha y^2 - xy^2 - 2qxy - 2px^2 - x^3 = 0$ と見比べると,

$$\alpha = a_0\beta = a_0\sqrt{\frac{a_4}{a_1^3}}, \quad p = \frac{a_3}{2a_1^2\beta}, \quad q = \frac{a_2}{2a_1}$$

となるため, 直前の議論と併せて結論を得る. □

例 5.2. (1) $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (-b, -1, -a, 0, -1)$ のとき, $\tilde{\mathcal{F}}$ は the ophiuride[†] の標準形 $x(x^2 + y^2) + (ax - by)y = 0$.
 (2) $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (2a, -1, 0, 0, -1)$ のとき, $\tilde{\mathcal{F}}$ は the cissoid of Diocles[‡] の標準形 $x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0$.

REFERENCES

- [Bel36] Margherita Pianolla Beloch. Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici. *Periodico di Mat.* IV, XVI, (2):104–108, 1936.
- [Hul11] Thomas C. Hull. Solving cubics with creases: the work of Beloch and Lill. *Am. Math. Mon.*, 118(4):307–315, 2011.
- [Inc23] Wolfram Research, Inc. Mathematica, Version 13.3, 2023. Champaign, IL, 2023.
- [Jus86] Jacques Justin. Résolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques. *L'Ouvert - Journal de l'APMEP d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg*, 42:9–19, 1986. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/L_Ouvert/n042/o_42_9-19.pdf.
- [Kat99] Koichi Kato. Origami and formulas. http://izumi-math.jp/K_Katou/ori_h/ori_h.htm, 1999.
- [Lan10] Robert J. Lang. Origami and geometric constructions. https://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf, 2010.
- [Lil67] E. Lill. Résolution graphique des équations numériques de tous les degrés à une seule inconnue, et description d'un instrument inventé dans ce but. *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, 6:359–362, 1867.
- [Nii23] Manami Nijima. On Beloch's curve that appears when solving real cubics with origami. preprint. arXiv:2312.10780, 2023.
- [NO15] Isao Nakai and Eri Ono. Finding roots by a simple origami. *Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, 66(1):1–17, 2015.

[†]クモヒトデ. [‡]植物の Ivy をギリシャ語で Kissos という. その葉の形に似ていることからギリシャの幾何学者ディオクレスは kissoïd と名付けた. そこから転じて英語圏では cissoid と呼ばれており, 音訳から日本語では疾走線とも呼ばれる.