

曲面絡み目の plat form 表示

安田 順平（大阪大学大学院理学研究科）

概要

ブレイドから絡み目を構成する方法として plat form が知られている．本紙では曲面絡み目に対して同様の構成法，即ちブレイド状曲面から曲面絡み目を構成することに関して論じる．特に任意の曲面絡み目が plat form による表示を持つことが分かった．

1 ブレイド

m を正整数, $I = [0, 1]$ を閉区間, $Q_m \subset D^2$ を $Q_m := \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{k}{m+1} \right) \mid k = 1, 2, \dots, m \right\}$ によって定める．また $S^3 = D^2 \times I \cup_{\partial} D^2 \times I'$ を 2 つの 3 次元円板による S^3 の分解とする．

定義 1.1. $\beta \subset D^2 \times I$ をプロパーに埋め込まれたコンパクト曲線, 写像 pr_i ($i = 1, 2$) を $D^2 \times I$ の第 i 成分への射影, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ を正整数とする．このとき β が m -ブレイドであるとは次を満たすことをいう．

- (1) $\text{pr}_2|_{\beta} : \beta \rightarrow I$ は m 次の被覆写像である．
- (2) I の境界 $y \in \partial I$ において, $\text{pr}_1(\beta \cap \text{pr}_2^{-1}(y)) = Q_m$ を満たす．

定義 1.2. $\beta \subset D^2 \times I$ を m -ブレイド とする．このとき m -ブレイド β の閉包 $\bar{\beta}$ を

$$\bar{\beta} := \beta \cup_{\partial} (Q_m \times I') \subset S^3$$

によって定める．

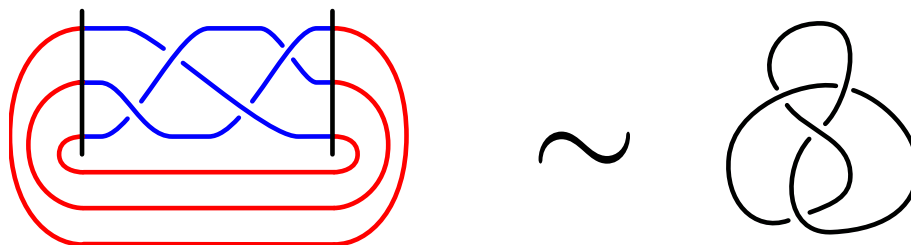


図 1: ブレイドの閉包の例

このとき次の事実がよく知られている.

事実 1.3 (Alexander [1]). 任意の S^3 内の絡み目はあるブレイドの閉包と同値である.

よって次の絡み目不変量が定まる.

定義 1.4. L を絡み目とする. このとき次によって絡み目不変量 $\text{braid}(L)$ を定める.

$$\text{braid}(L) := \min \{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists \beta : m\text{-ブレイド}, L \sim \bar{\beta}\}.$$

これを絡み目 L の**ブレイド指数**という.

1.1 絡み目の plat form 表示

ブレイドから絡み目を得る方法としてブレイドの plat 閉包を考える.

定義 1.5 (Brendle-Hatcher [3]). I_0 を $[0, 1]$ の閉区間とする. m -**wickets** とは $D^2 \times I_0$ 内の非交和な m 本の半円 (wicket) であって, 各半円は $\partial D^2 \times I$ と垂直に端点で交わっているものである. また **standard m -wickets** とは図 2 のような m -wickets であって, m -wickets の境界が $Q_{2m} \times \{0\} \subset D^2 \times I_0$ に一致しているものをいう. standard m -wickets を l で記す.

図 2: plat m -wickets

wickets は各弧の形状が定まっている tangle であり, 特に各連結成分は端点が定まると一意的に与えられる. ブレイドの両端をこの standard wickets によって閉じることで得られるのが, 次に定義する plat 閉包である.

$N := [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1] \subset I'$ に対して, 以下で定まる 2 つの同一視によって 2 つの standard m -wickets l を N に埋め込むことにより, $D^2 \times I'$ 内の $2m$ -wicktes A を定める.

$$\begin{aligned} (x, t) \in D^2 \times I_0 &\longleftrightarrow \left(x, \frac{t}{4}\right) \in D^2 \times \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ (x, t) \in D^2 \times I_0 &\longleftrightarrow \left(x, \frac{3-t}{4}\right) \in D^2 \times \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{aligned}$$

定義 1.6. β を $2m$ -ブレイド とする. このとき β の **plat 閉包** $\tilde{\beta}$ を

$$\tilde{\beta} := \beta \cup_{\partial} A \subset (D^2 \times I) \cup_{\partial} (D^2 \times I') \subset S^3$$

によって定める. このとき $\tilde{\beta}$ を絡み目の **plat form** という.

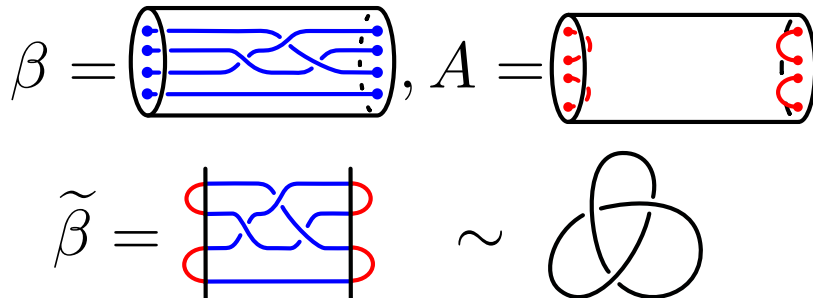


図 3: plat form の例

すると、絡み目の plat form に関して次が知られている。

事実 1.7. 任意の絡み目はある plat form と同値である。

よって次の絡み目不変量が定まる。

定義 1.8. L を絡み目とする。このとき次によって絡み目不変量 $\text{plat}(L)$ を定める。

$$\text{plat}(L) := \min \{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists \beta : 2m\text{-ブレイド}, L \sim \beta\}.$$

これを絡み目 L の **plat 指数** という。

すると、次の事実が知られている。

事実 1.9. 絡み目 L の橋指数を $\text{bridge}(L)$ とするとき、

$$\text{bridge}(L) = \text{plat}(L)$$

が成り立つ。

2 曲面ブレイド

本章では、前章に行ったブレイドに関する議論をブレイド状曲面に対して拡張を考える。

定義 2.1. S^4 に埋め込まれた閉曲面 $F \subset S^4$ を**曲面絡み目**という。特に F が連結であるとき**曲面結び目**という。

定義 2.2. 曲面絡み目 F と F' が S^4 の ambient isotopy で移りあうとき、それらは**同値**であるといい、 $F \sim F'$ と記す。

定義 2.3. 向き付け可能な曲面絡み目 F がある S^4 内の 3 次元球面に埋め込まれた曲面と同値であるとき、 F は**自明**であるという。

D_1, D_2 を 2 次元円板、 $Q_m \subset D_1$ として、基点 $y_0 \in \partial D_2$ を 1 つ固定する。

定義 2.4 (Rudolph [6],[7]). $S \subset D_1 \times D_2$ をプロパーに埋め込まれた向き付け可能なコンパクト曲面、 $\text{pr}_i : D_1 \times D_2 \rightarrow D_i$ ($i = 1, 2$) を第 i 成分の射影、 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ を正整数とする。このとき S が m 次の**ブレイド状曲面 (braided surface)** であるとは次を満たすことをいう。

- (1) $\text{pr}_2|_S : S \rightarrow D_2$ は m 次の分岐被覆写像である.
- (2) y_0 上のファイバーは Q_m と一致する, 即ち $\text{pr}_1(S \cap \text{pr}_2^{-1}(y_0)) = Q_m$ を満たす.
- (3) ∂S は $D_1 \times \partial D_2$ 内の閉 m -ブレイドである.

特に $\partial S = Q_m \times \partial D_2$ のとき, S を曲面 m -ブレイド (surface m -braid) という.

定義 2.5. ブレイド状曲面 S が単純であるとは, 分岐被覆写像 $\text{pr}_2|_S : S \rightarrow D_2$ の各ファイバーが m または $m-1$ 個の点からなることをいう.

以下, ブレイド状曲面は単純であると仮定する. また 3 次元球面の場合と同様に, $S^4 = D_1 \times D_2 \cup_{\partial} D_1 \times D'_2$ を 2 つの 4 次元円板による S^4 の分解とする.

定義 2.6. $S \subset D_1 \times D_2$ を曲面 m -ブレイドとする. このとき曲面ブレイド S の閉包 $\bar{S}$ を

$$\bar{S} =: S \cup_{\partial} (Q_m \times D'_2) \subset S^4$$

によって定める.

注意. 曲面ブレイドの閉包 $\bar{S}$ は S^4 内の曲面絡み目となる.

このとき次の事実が知られている.

事実 2.7 (Kamada [5], cf Viro, 1990). 任意の S^4 内の向き付け可能な曲面絡み目はある曲面ブレイドの閉包と同値である.

そこで 1 次元の場合と同様に次を定める.

定義 2.8. F を向き付け可能な曲面絡み目とする. このとき次によって曲面絡み目の不変量 $\text{Braid}(F)$ を定める.

$$\text{Braid}(F) := \min \{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists S: \text{曲面 } m\text{-ブレイド}, F \sim \bar{S}\}.$$

これを曲面絡み目 F の**ブレイド指数**という.

2.1 曲面絡み目の plat form 表示

本節では曲面絡み目の plat form について導入する. $N = S^1 \times I$ を D_2' における境界 $\partial D_2'$ の正則近傍とし, $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\partial N = S^1 \times \{0\}$, $y_0 = (0, 0) \in S^1 \times I$ と同一視する.

定義 2.9. 複数のアニュラスまたは Möbius の帯の非交和を **annular surface system** という.

定義 2.10. $D_1 \times D_2$ 内の $2m$ 次のブレイド状曲面を S , $D_1 \times N$ へプロパーに埋め込まれた annular surface system を A とする. A が S に適合している (**adequate**) とは, 次を満たすことをいう.

- (1) $\partial A \cap \partial S = \partial A = \partial S$.
- (2) $A|_{D_1 \times (\{0\} \times I)} = l$: standard m -wickets.
- (3) 任意の $\theta \in S^1$ 対して, $l_\theta := A|_{D_1 \times (\{\theta\} \times I)}$ は m -wickets である.

特に $A = l \times S^1$ のとき, A は**真 (genuine)** であるという.

ここで wickets の各連結成分は端点を定めると一意的に与えられる. また, (1) より adequate annular surface system A の境界は ∂S と一致している. よって (2), (3) より各 $\theta \in S^1$ 上の m -wickets は, S に対して一意的に定まるため, A は S に対して存在するならば一意的に与えられることが分かる. これにより, 次が well-defined に定まる.

定義 2.11. S をブレイド状曲面, A を S の adequate annular surface system とする. このとき S の **plat 閉包** $\widetilde{S}$ を以下によって定める.

$$\widetilde{S} := S \cup_\partial A$$

また, $\widetilde{S}$ を曲面絡み目の **plat form** という. 特に, A が genuine であるとき $\widetilde{S}$ を **genuine plat form** という.

3 主結果

本紙における主結果は次の2つである.

定理 1. 任意の (向き付け不可能な曲面も含む) 曲面絡み目 F は plat form に変形できる.

定理 1 の証明は, Hilden subgroup([4]) と呼ばれるブレイド群の部分群と Birman による絡み目の plat form に関する同値性 ([2]) によって示すことができる. 特に向き付け可能な曲面絡み目に関して, 次のことが分かった.

定義 3.1. 曲面絡み目 F が genuine plat form に変形できるとき, F は **genuine plat 表示可能**であるという.

定理 2. 任意の向き付け可能な曲面絡み目 F は genuine plat 表示可能である.

定理 2 は, 事実 2.7 から得られる曲面ブレイドの境界の近傍を変形することで, 直ちに従うことが分かる.

また曲面ブレイドの plat 閉包によって得られる曲面絡み目は, オイラー標数が偶数である. よって射影平面などのオイラー標数が奇数である曲面絡み目は genuine plat 表示可能でない. 一方, Klein の壺のようにオイラー標数が偶数である向き付け不可能曲面については, 一般に genuine plat 表示可能であるか分かっていない. なお, genuine plat 表示可能である向き付け不可能な曲面絡み目の例については後述する.

3.1 plat index

定義 3.2. $F \subset S^4$ を曲面絡み目とする. このとき曲面絡み目の不変量 $\text{Plat}(F)$ を以下で定義し, 曲面絡み目 F の **plat index** という.

$$\text{Plat}(F) := \min \{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists S : 2m \text{ 次のブレイド状曲面}, F \sim \widetilde{S}\}.$$

定義 3.3. $F \subset S^4$ を genuine plat 表示可能な曲面絡み目とする. このとき曲面絡み目の不変量 $\text{g.Plat}(F)$ を以下で定義し, 曲面絡み目 F の **genuine plat index** という.

$$\text{g.Plat}(F) := \min \{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists S : \text{曲面 } 2m\text{-ブレイド}, F \sim \widetilde{S}\}.$$

すると, 1次元における結果の類似が得られる.

事実 3.4. L を絡み目, $\text{bridge}(L)$ を L の bridge index とする. このとき次の不等式が成り立つ.

$$\text{bridge}(L) = \text{plat}(L) \leq \text{braid}(L).$$

定理 3. 向き付け可能な曲面絡み目 F に対して次が成り立つ.

$$\text{Plat}(F) \leq \text{g.Plat}(F) \leq \text{Braid}(F).$$

3.2 plat form の具体例

曲面絡み目の plat form 及び plat index に関する例を与える.

例 1. F を自明な 2 次元結び目とする. このとき F の genuine plat form は次数 2 の自明な曲面ブレイドによって与えられ, $\text{Plat}(F) = \text{g.Plat}(F) = 1$ となる.

例 2. $F = P_n$ を標準的向き付け不可能な曲面結び目であって, $\chi(F) = 2-n$ を満たすものとする. このとき, $\text{Plat}(F) = 1$ である.
特に, $F = P_{2n}$ であって法オイラー数 $e(F) = 0$ であるとき, 下図 4 のブレイド曲面によって genuine plat form が与えられ, $\text{g.Plat}(F) = 1$ となる.

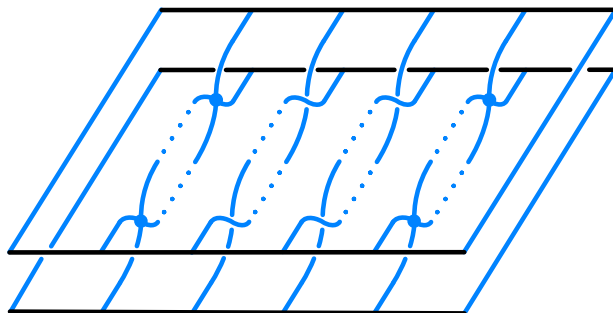


図 4: P_{2n} を与える曲面ブレイド

例 3. $F = \Sigma_g$ を種数 g ($g \geq 1$) の自明な向き付け可能曲面結び目とする. このとき下図 5 の曲面ブレイドによって genuine plat form が与えられ, $\text{Plat}(F) = g.\text{Plat}(F) = 2$ となる.

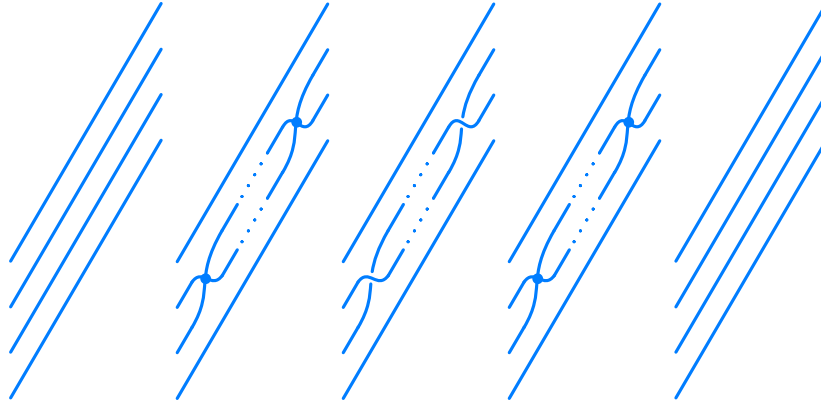


図 5: Σ_g を与える曲面ブレイドの motion picture

例 4. F を spun trefoil 2-knot とする. このとき, 下図 6 の曲面ブレイドによって genuine plat form が与えられ, $\text{Plat}(F) = g.\text{Plat}(F) = 2$ となる.

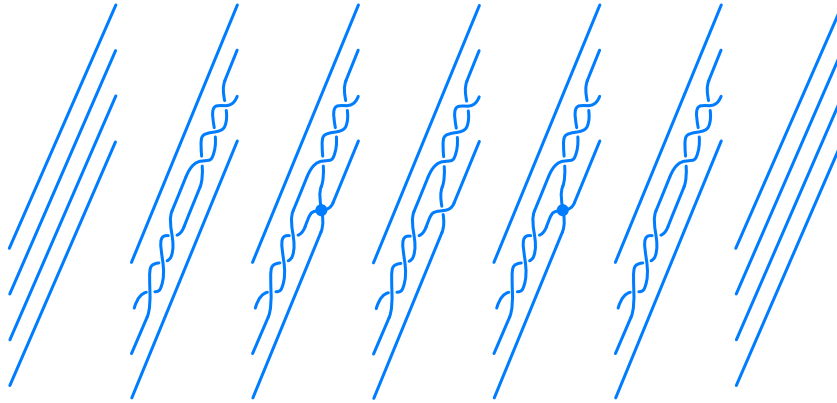


図 6: $\text{spun}(3_1)$ を与える曲面ブレイドの motion picture

参考文献

- [1] J. W. Alexander. A lemma on systems of knotted curves. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 9(3):93–95, 1923.
- [2] Joan S. Birman. on the stable equivalence of plat representations of knots and links. *Can.J.Math.*, XXVIII(2):264–290, 1976.
- [3] Tara Brendle and Allen Hatcher. Configuration spaces of rings and wickets. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 88, 05 2008.
- [4] Hugh M. Hilden. Generations for two subgroups of the braid group. *Pacific J. Math.*, 59(2), 1975.
- [5] Seiichi Kamada. Alexander’s and Markov’s theorems in dimension four. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 31(1):64–67, 1994.
- [6] Lee Rudolph. Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids. *Comment. Math. Helv.*, 58(1):1–37, 1983.
- [7] Lee Rudolph. Special positions for surfaces bounded by closed braids. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1(3):93–133, 1985.