

Knitting pattern with three components

吉野 馨 (埼玉大学大学院理工学研究科)

概要

knitting とは二方向に周期的に広がる $\mathbb{R}^2$ に埋め込まれた 4 価グラフであり, グラフの各頂点は上下情報を持つ交点であるとする. knitting についてはこれまで, Morton-Grishanov[3], Grishanov-Meshkov-Omelchenko[4][5] や河内氏 [1] による先行研究が存在する. 昨今, 化学の分野において得られた超分子 (図 1) に knitting の構造が現れることが観察されたことから, knitting の研究が化学分野への応用が期待できる研究課題であることが分かった. knitting について考察する手段として, knitting を構成する基本領域 (これを knitting pattern と呼ぶ) から導かれるトーラス上の絡み目図式を用いる. $\mathbb{R}$ に同相である knitting の成分から導かれるトーラス上の絡み目成分は本質的閉曲線であり, “傾き” が定義される. 本稿では図 1 の分子構造を解析するため, knitting pattern において各成分が本質的単純閉曲線であり, それぞれが異なる傾きを持つ 3 成分絡み目図式について考察する.

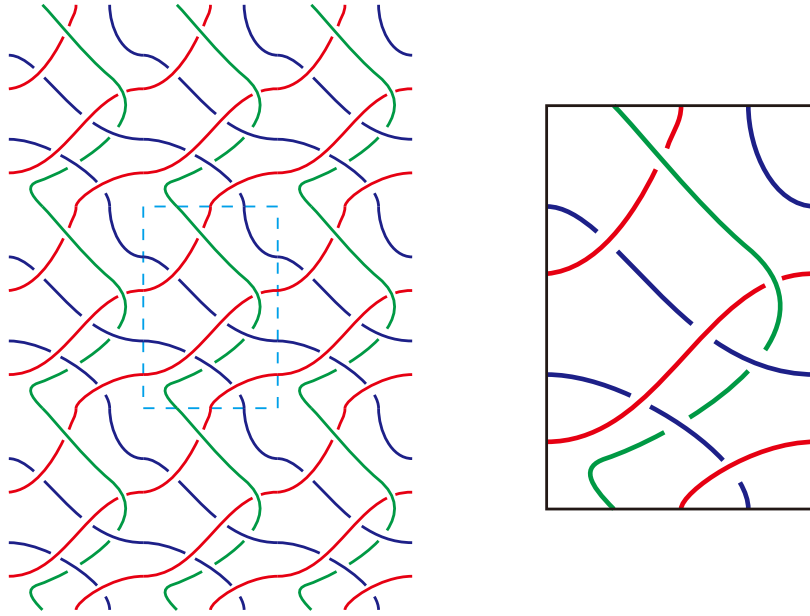


図 1: 分子モデル

1. 導入

はじめに諸定義を紹介する.

$\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathcal{R} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ をとる. 任意の $u = (p, q) \in \mathbb{Z}^2$ に対する $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ の平行移動を

$$\Phi^{\mathcal{R}}(u, \mathbf{x}) = \varphi_u(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + p\mathbf{v}_1 + q\mathbf{v}_2$$

で与えると, $\Phi^{\mathcal{R}}$ は $\mathbb{Z}^2$ -作用である.

定義 1.1 (Knitting). $\tilde{K}$ を, $\mathbb{R}^2$ に埋め込まれた 4 価グラフとする. この時, グラフ内の頂点を交点とし, そこには上下情報が存在するものとする.

$\tilde{K} \subset \mathbb{R}^2$ が, $\mathbb{Z}^2$ -作用 $\Phi^{\mathcal{R}}$ によって構造が保たれるとき, $\tilde{K}$ は *knitting* であるという. (i.e., 任意の $u \in \mathbb{Z}^2$ に対して, $\varphi_u(\tilde{K}) = \tilde{K}$ となるような $\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathcal{R} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ が存在する. また, この時 $\tilde{K}$ 内の交点の上下情報も保たれる.)

例 1.2. 図 2 は, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$ を基底として knitting である.

Proof. $\varphi_{(1,0)}(\tilde{K}) = \tilde{K}$ かつ $\varphi_{(0,1)}(\tilde{K}) = \tilde{K}$ であるから, 任意の $u = (p, q) \in \mathbb{Z}^2$ に対して,

$$\varphi_u(\tilde{K}) = \varphi_{p(1,0)+q(0,1)}(\tilde{K}) = \tilde{K}$$

□

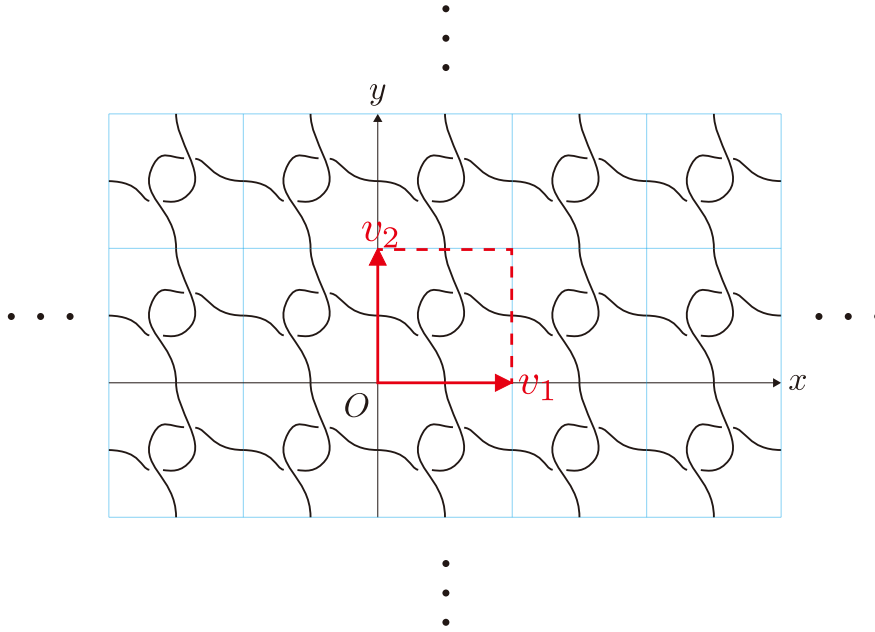


図 2: Knitting $\tilde{K}$

定義 1.3. $\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ から定まる $\mathbb{Z}^2$ -作用 $\Phi^{\mathcal{R}}, \Phi^{\mathcal{R}'}$ を考える. 任意の $u \in \mathbb{Z}^2$ に対して, 下の図式が可換である時, $\mathbb{R}^2$ 間の微分同相写像 $\tilde{g}$ は, $(\Phi^{\mathcal{R}}, \Phi^{\mathcal{R}'})$ -同値であるという.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathbb{R}^2 \\ \varphi_u \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \varphi'_u \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

定義 1.4. $\tilde{K}, \tilde{K}'$ を knitting とする. $\mathbb{R}^2$ 間の $(\Phi^{\mathcal{R}}, \Phi^{\mathcal{R}'})$ -同値である微分同相写像 $\tilde{g}$ が存在し, $\tilde{g}(\tilde{K})$ が有限回の $\mathbb{Z}^2$ -同値 Reidemeister 移動 I, II, III によって $\tilde{K}'$ に移るとき, $\tilde{K}$ と $\tilde{K}'$ は同値であるといい, $\tilde{K} \sim \tilde{K}'$ と書く.

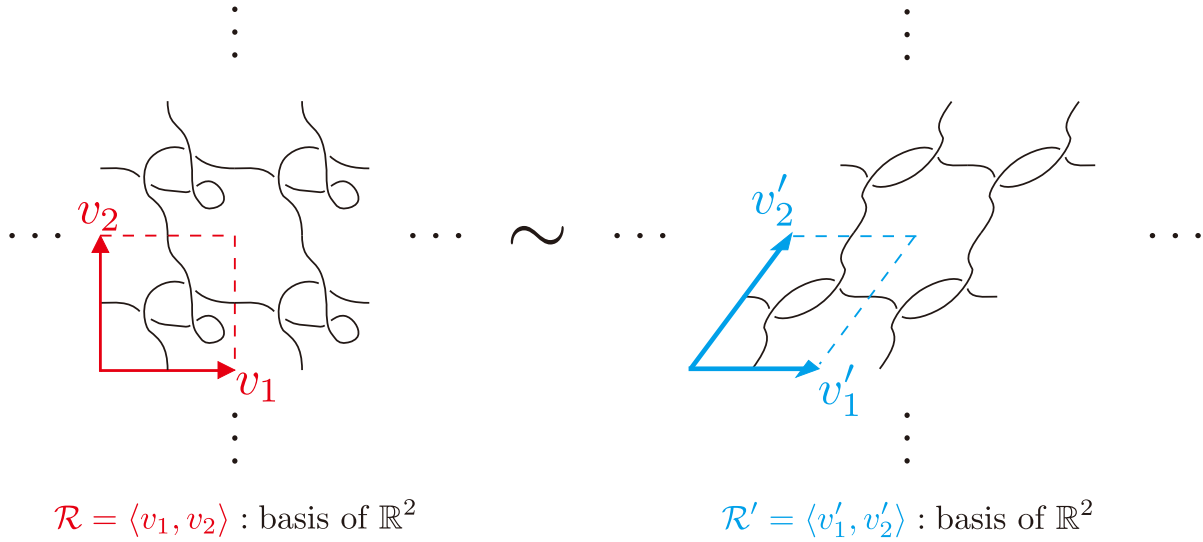


図 3: 同値である knitting の例

定義 1.5 (基本領域). $\mathbb{R}^2$ の閉部分集合 Q を, $\text{int}Q$ が連結で, $\overline{(\text{int}Q)} = Q$ を満たすものとする. 以下の二つの性質を満たすとき, Q は $\tilde{K}$ の基本領域という.

1. $\bigcup_{u=(p,q) \in \mathbb{Z}^2} \varphi_u(Q) = \mathbb{R}^2$
2. $\varphi_u(\text{int}Q) \cap \varphi_{u'}(\text{int}Q) = \emptyset \ (u \neq u')$

定義 1.6 (Knitting pattern). 今, 基本領域 Q は基底 $\mathcal{R} = \langle v_1, v_2 \rangle$ から張られる平行四辺形であると仮定する. この時, Q は $I \times I$ ($I = [0, 1]$) に同相であり, knitting $\tilde{K}$ と Q の共通部分であるタンクル図式 $K = \tilde{K} \cap Q$ を, *knitting pattern* という.

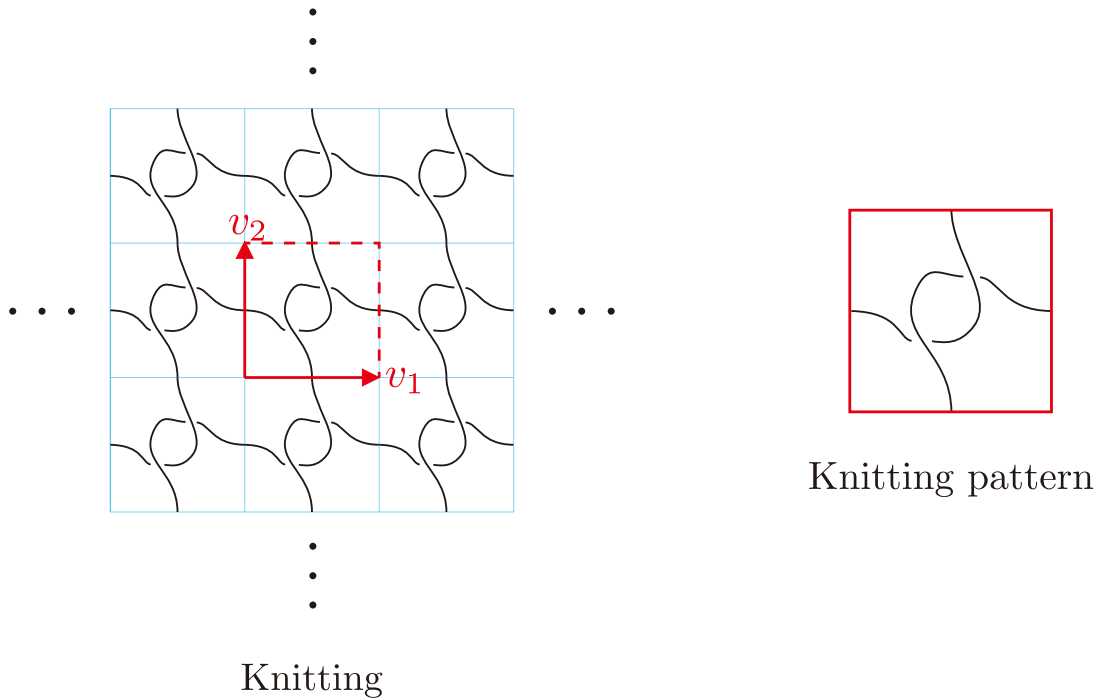


図 4: Knitting と knitting pattern の例

以下, knitting pattern の同値を定義するにあたり, knitting pattern から得られるトーラス上の絡み目図式を考える.

トーラス上の本質的閉曲線には, “傾き” が定義される. ここから, knitting pattern 内の成分に対して “傾き” を与える.

定義 1.7. knitting pattern から得られるトーラス上の絡み目図式において, 本質的閉曲線である成分 l に対し, メリディアンとロンジチュードを固定すると, $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, q \in \mathbb{Z}$ ($\gcd(p, q) = 1$) に対し傾き $\frac{q}{p}$ がただ一つ決まる. このとき, knitting pattern の成分 l は傾き $\frac{q}{p}$ を持つと定義し, $l = l_{q/p}$ と書く.

今, 基本領域 Q は $I \times I$ に同相であり, Q から得られるトーラスにおいて $0 \times S^1$ をメリディアン, $S^1 \times 0$ をロンジチュードとする (図 5).

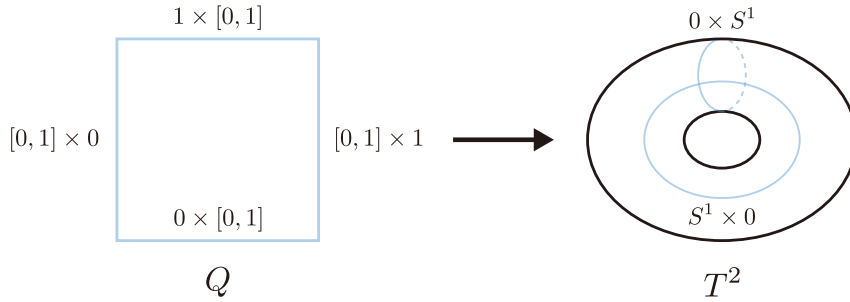


図 5: 基本領域 Q からトーラス T^2 を得る

定義 1.8 (TR-同値). K, K' を knitting pattern とし, それぞれから得られるトーラス上の絡み目図式を K_T, K'_T とする. トーラス間の向きを保つ微分同相写像 g が存在し, $g(K_T)$ が有限回のトーラス上の Reidemeister 移動 I, II, III によって K'_T に移るとき, K_T と K'_T は TR-同値であるといい, $K_T \sim_{TR} K'_T$ と書く.

定義 1.9. K, K' を knitting pattern とし, それぞれから得られるトーラス上の絡み目図式を K_T, K'_T とする. $K_T \sim_{TR} K'_T$ であるとき, K と K' は同値であるといい, $K \sim K'$ と書く.

定義 1.10. knitting K の基本領域 Q の面積が最小であるとき, Q 内の knitting pattern $\tilde{K}$ は primitive であるという.

定理 1.11. knitting $K, \tilde{K}$ 及びそれらの primitive knitting patterns K, K' に対し, $\tilde{K} \sim \tilde{K}'$ であるための必要十分条件は, $K \sim K'$ である.

2. 超分子の数学モデルの考察

前述の諸定義をもとに実際に分子モデルについての考察を行う。

超分子の特徴．超分子(図 1)から，以下の特徴を得られる．

1. 3つの本質的単純閉曲線からなっており，それぞれ傾きは $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \infty$ である(本質的単純閉曲線 $l_{1/2}, l_{-1/2}, l_\infty$ から成っている)．
2. $l_{1/2}$ と $l_{-1/2}$ の全ての交点において， $l_{1/2}$ が $l_{-1/2}$ の上を通る．
3. l_∞ は， $T^2 \setminus (l_{1/2} \cup l_{-1/2})$ の各領域を一回ずつ通る．

これらの特徴を基に数学的モデルを与え，分類を行うためのアルゴリズムを与える．

Step 1. 数学的モデルの決定

定義 2.1. 以下の条件を満たすトーラス上の絡み目射影図を考える．

- $n \in \mathbb{N}$ に対し，本質的単純閉曲線 $l_{1/n}, l_{-1/n}$ を成分とする．
- トーラス上で $l_{1/n} \cup l_{-1/n}$ に双対であるようなグラフを G とする．
- グラフ G 上から本質的単純平路 $l_{q/p}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($\gcd(p, q) = 1$))を得る．このとき， $l_{q/p}$ はトーラス上で傾き $\frac{q}{p}$ を持つ閉曲線である．

この時得られる $l_{1/n}, l_{-1/n}, l_{q/p}$ を成分とするトーラス上の絡み目射影図の集合を $\mathcal{P}_{n,q/p}$ と書く．

例 2.2. $n = 2, p = 0, q = 1$ の場合(本質的閉曲線 $l_{1/2}, l_{-1/2}, l_\infty$ を成分とするトーラス上の絡み目射影図 $P \in \mathcal{P}_{2,\infty}$)．

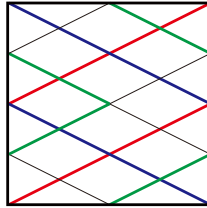


図 6: $P \in \mathcal{P}_{2,\infty}$

また，任意の絡み目射影図 $P \in \mathcal{P}_{n,q/p}$ における最小交点数を考える．

定義 2.3. 傾き $\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_2}{p_2}$ ($p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}, \gcd(p_1, q_1) = \gcd(p_2, q_2) = 1$)である二つのトーラス上の本質的閉曲線の距離を

$$\Delta(q_1/p_1, q_2/p_2) = |p_2 q_1 - p_1 q_2|$$

と書く．

$P \in \mathcal{P}_{n,q/p}$ において， $l_{1/n}$ (resp. $l_{-1/n}$) と $l_{q/p}$ の最小交点数を

$$c(l_{1/n}, l_{q/p}) = \Delta(1/n, q/p) \quad (\text{resp. } c(l_{-1/n}, l_{q/p}) = \Delta(-1/n, q/p))$$

とする．

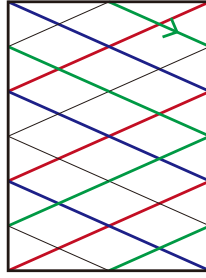
Step 2. “ワード”を用いたトーラス上の絡み目射影図 $P \in \mathcal{P}_{n,q/p}$ の分類

定義 2.4. $P \in \mathcal{P}_{n,q/p}$ において, $l_{q/p}$ と $l_{1/n}$ との交点に r , $l_{q/p}$ と $l_{-1/n}$ との交点に b とラベルをつける. $l_{q/p}$ 上に適当に基点及び向きをつけ, $l_{q/p}$ に沿って得られる r と b の列

$$w = x_1 x_2 \dots x_c$$

を $(1/n, q/p)$ -ワードという. ここで, $x_i \in \{r, b\}, c = c(l_{1/n}, l_{q/p}) + c(l_{-1/n}, l_{q/p})$ である.

例 2.5. $P \in \mathcal{P}_{3,\infty}$ において l_∞ に図 7 のように向きを入れ, $1 \times [0, 1]$ 上に基点をとると, $(1/3, \infty)$ -ワード $rrrbbb$ を得る.



$rrrbbb$

図 7: ワード

補題 2.6. 任意の絡み目射影図 $P \in \mathcal{P}_{n,q/p}$ に対して, $|p| \in \{0, 1, \dots, n\}, q \in \{0, 1\}$.

命題 2.7. 任意のトーラス上の絡み目射影図 $P \in \mathcal{P}_{n,q/p}$ の最小交点数 $c = c(l_{1/n}, l_{q/p}) + c(l_{-1/n}, l_{q/p})$ は,

$$c = \begin{cases} 2 & (\frac{q}{p} = 0) \\ 2n & (\frac{q}{p} \neq 0) \end{cases}$$

である.

以下, $\mathcal{P}_{n,q/p}$ において $\frac{q}{p} \neq 0, q = 1$ とする. この時, 命題 2.7 より, $P \in \mathcal{P}_{n,q/p}$ に対応するワードの長さは $2n$ である.

$\#r = c(l_{1/n}, l_{q/p}), \#b = c(l_{-1/n}, l_{q/p})$ とする. この時, P から得られるワードを w とすると, $\#r$ は w 内の r の個数, $\#b$ は w 内の b の個数を表す.

命題 2.8. 任意の $t \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ に対して $(\#r, \#b) = (t, 2n - t)$ が成り立つ必要十分条件は, $\frac{q}{p} = \frac{1}{n-t}$ が成り立つことである.

命題 2.8 より, 長さ $2n$ のワードから絡み目射影図 $\mathcal{P}_{n,1/p}$ 内の本質的単純閉曲線 $l_{1/p}$ の傾きが決まることが分かった. ワードの同値を定め, トーラス上の絡み目射影図の同値との対応を考える.

定義 2.9. $\{r, b\}$ から成る長さ $2n$ の二つの $(1/n, q/p)$ -ワードが数珠順列として同じ $(1/n, q/p)$ -ワードである時, この二つの $(1/n, q/p)$ -ワードは同値であるという.

また, トーラス上の絡み目射影図の同値は以下で定義する.

定義 2.10. 二つのトーラス上の絡み目射影図に対し, 一方の射影図を他方に移すようなトーラス間の向きを保つ微分同相写像が存在する時, この二つのトーラス上の結び目射影図は同値であるという.

命題 2.11. 絡み目射影図 $P, P' \in \mathcal{P}_{n,q/p}$ に対して, w を, 向き付けられた基点を持つ $l_{q/p} \in P$ の $(1/n, q/p)$ -ワード, w' を, 向き付けられた基点を持つ $l'_{q/p} \in P'$ の $(1/n, q/p)$ -ワードとする.

P と P' が同値であることの必要十分条件は, w と w' が同値となることである.

Step 3. トーラス上の絡み目図式の分類

三つの本質的単純閉曲線 $l_{1/n}, l_{-1/n}, l_{q/p}$ を成分とするトーラス上の絡み目射影図 $P \in \mathcal{P}_{n,q/p}$ 内の交点に上下情報を付与した図式を $D \in \mathcal{D}_{n,q/p}$ と書く.

以下, $\mathcal{D}_{n,q/p}$ において超分子の特徴2 より, $l_{1/n}$ と $l_{-1/n}$ の全ての交点において, $l_{1/n}$ が $l_{-1/n}$ の上を通るとする.

Step 2 において定めたラベル $\{r, b\}$ に上下情報を付与 (図 8) し, $D \in \mathcal{D}_{n,q/p}$ に対応するワードを得る.

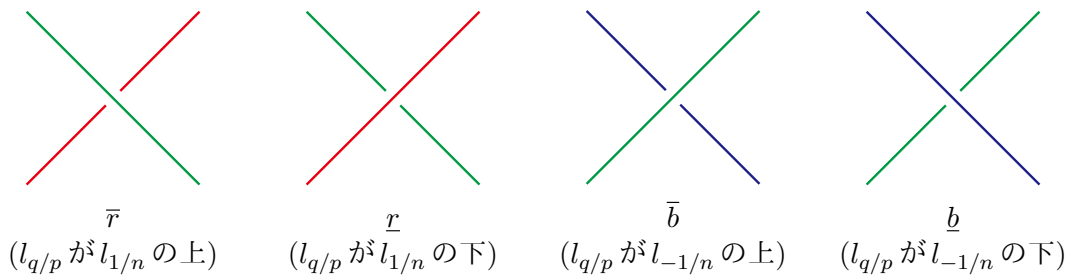


図 8: ラベル $\{r, b\}$ に上下情報を付与したラベル

例 2.12. ワード $rrbb$ に上下情報を付与し, ワード $\overline{rr}bb$ を得る. この時, $P \in \mathcal{P}_{2,\infty}$ から $D \in \mathcal{D}_{2,\infty}$ を得る (図 9).

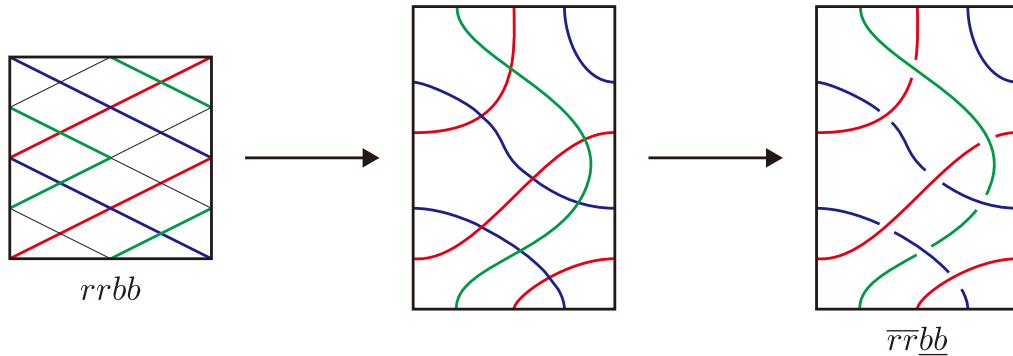


図 9: トーラス上の絡み目射影図から図式を得る例

ここで, 本質的でないトーラス上の絡み目図式を考える.

定義 2.13. $l_1, l_2, \dots, l_n$ ($n \in \mathbb{N}$) の n 成分から成るトーラス上の絡み目図式 (今, l の添字は成分の番号) を D とする. l_i, l_j ($i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$) に対し, l_i と l_j との全交点において l_i が l_j の上を通る, または l_i と l_j の射影図が分離可能である時, $l_i \geq l_j$ と書く. 同様に, 全交点において l_i が l_j の下を通る, または l_i と l_j が分離可能であるとき, $l_i \leq l_j$ と書く.

定義 2.14. トーラス上の絡み目図式に対し, 図式内の成分集合 C_1, C_2 が存在し, 以下を満たすとする.

- $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.
- $C_1 \cup C_2$ は絡み目図式の全成分である.
- C_1 内の任意の成分 l_1 , C_2 内の任意の成分 l_2 に対し, $l_1 \geq l_2$ が成り立つ.

この時, トーラス上の絡み目図式は *split* であるという.

split であるトーラス上の絡み目図式 $D \in \mathcal{D}_{n,q/p}$ とワードの関係について考える.

命題 2.15. $(1/n, q/p)$ -ワード $w = x_1 x_2 \cdots x_{2n}$ ($x_i \in \{\bar{r}, \underline{r}, \bar{b}, \underline{b}\}$) 及び w に対応するトーラス上の絡み目図式 $D \in \mathcal{D}_{n,q/p}$ に対し, $x_i \in \{\underline{r}, \bar{b}, \underline{b}\}$ または $x_i \in \{\bar{r}, \underline{r}, \bar{b}\}$ となるための必要十分条件は, D が *split* となることである.

$\{\bar{r}, \underline{r}, \bar{b}, \underline{b}\}$ から成るワードの同値を定め, トーラス上の絡み目図式の同値との対応を考える.

定義 2.16 (RIII-同値). トーラス上の絡み目図式 K_T, K'_T に対し, トーラス間の向きを保つ微分同相写像 g が存在し, $g(K_T)$ が有限回のトーラス上の Reidemeister 移動 III によって K'_T に移るとき, K_T と K'_T は RIII-同値であるという.

定義 2.17 (wRIII). トーラス上の絡み目図式 $D \in \mathcal{D}_{n,q/p}$ における Reidemeister 移動 III に対応するワード内の文字の入れ替え wRIII を図 10 のように定義する.

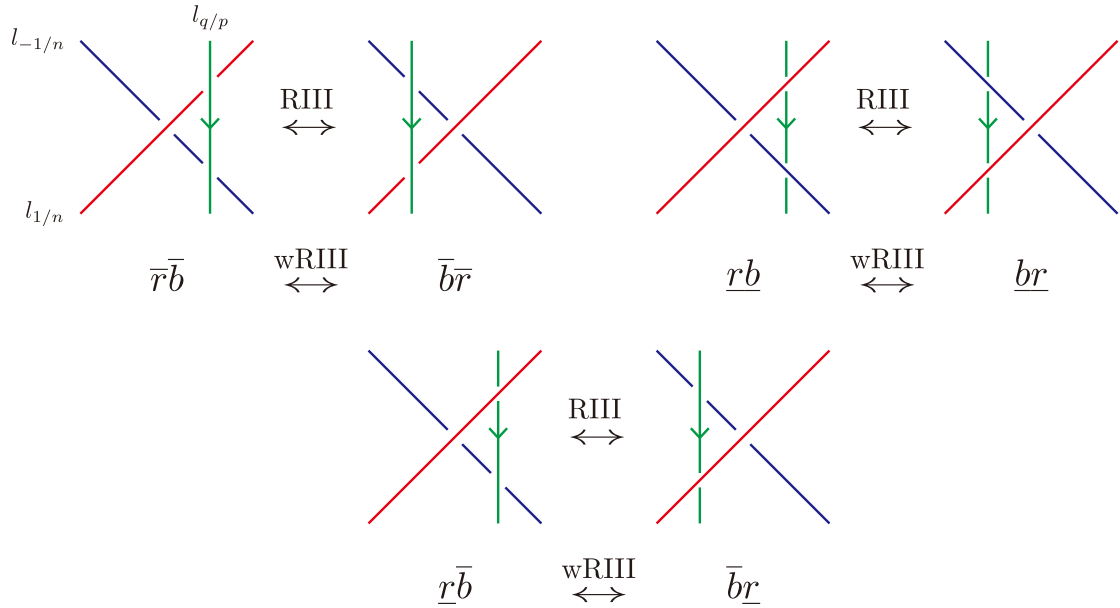


図 10: wRIII

定義 2.18. $\{\bar{r}, \underline{r}, \bar{b}, \underline{b}\}$ から成る二つの $(1/n, q/p)$ -ワードが, ワード内の有限回の wRIII によって数珠順列として同じ $(1/n, q/p)$ -ワードである時, この二つの $(1/n, q/p)$ -ワードは同値であるという.

定理 2.19. 絡み目図式 $D, D' \in \mathcal{D}_{n,q/p}$ に対して, $w = x_1 x_2 \cdots x_c$ ($x \in \{\bar{r}, \underline{r}, \bar{b}, \underline{b}\}$) を, 向き付けられた基点を持つ $l_{q/p} \in D$ の $(1/n, q/p)$ -ワード, $w' = x'_1 x'_2 \cdots x'_c$ ($x' \in \{\bar{r}, \underline{r}, \bar{b}, \underline{b}\}$) を, 向き付けられた基点を持つ $l'_{q/p} \in D'$ の $(1/n, q/p)$ -ワードとする.

D と D' が同値であることの必要十分条件は, w と w' が同値となることである.

最後に, $D \in \mathcal{D}_{n,q/p}$ に, $(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{q}{p})[w]$ を割り当てる. ここで, $[w]$ とは, $D \in \mathcal{D}_{n,q/p}$ に対応する $(1/n, q/p)$ -ワードの同値類である.

以上より, 以下のアルゴリズムを得る.

アルゴリズム . 以下の手順により, $n \in \mathbb{N}, t \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ とし, トーラス上の本質的単純閉曲線 $l_{1/n}, l_{-1/n}, l_{1/(n-t)}$ を成分とする同値関係を入れた knitting pattern を列挙する.

1. $\{r, b\}$ から成り $(\#r, \#b) = (t, 2n-t)$ である $(1/n, 1/(n-t))$ -ワードの中で, 数珠順列として同じであるワードを除く.
2. 1 で得た $(1/n, 1/(n-t))$ -ワードに上下情報を付与し, $\{r, \bar{b}, b\}$ または $\{\bar{r}, r, \bar{b}\}$ から成る $(1/n, 1/(n-t))$ -ワードを除く.
3. 2 で得た $(1/n, 1/(n-t))$ -ワード内で有限回の wRIII によって数珠順列として同じである $(1/n, 1/(n-t))$ -ワードを除く.

アルゴリズムを用いて, $n = 2$ の場合の分類を行なった.

定理 2.20. $p \in \{0, 1, 2\}$ とする. トーラス上での本質的閉曲線 $l_{1/2}, l_{-1/2}, l_{1/p}$ を成分とする split でない knitting pattern は9種類である (図 11).

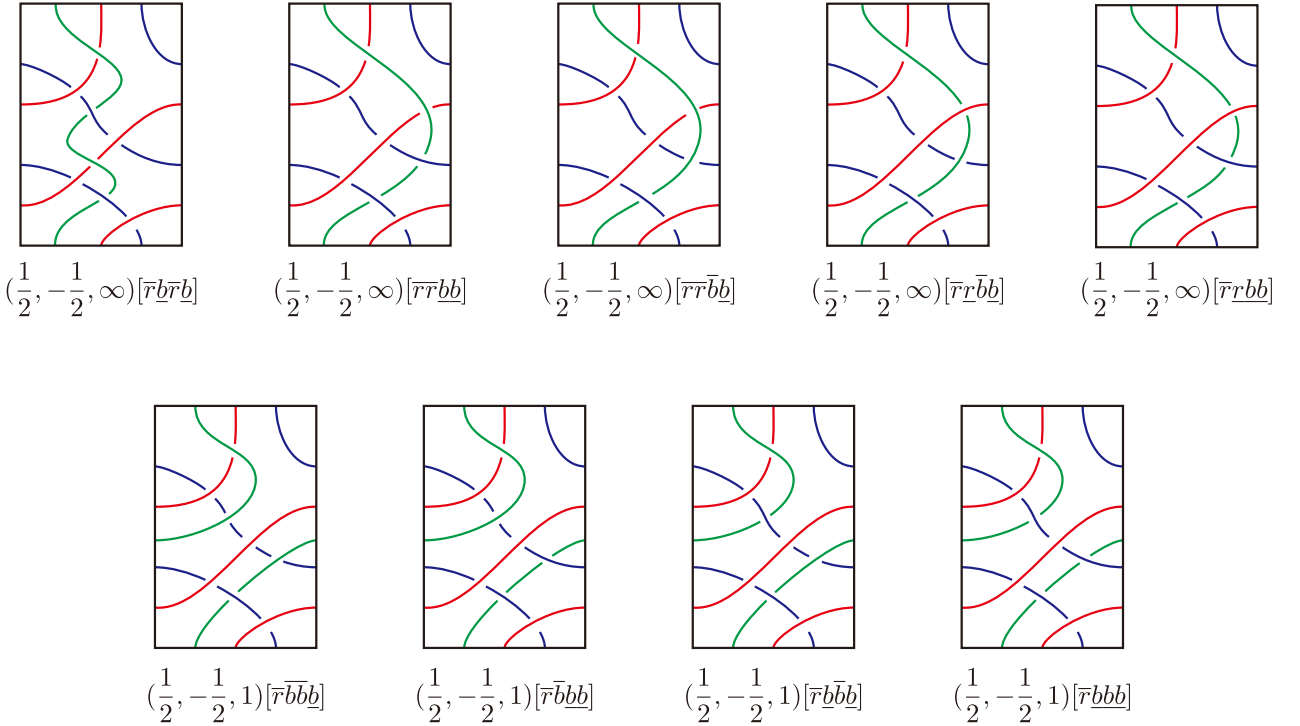


図 11: split でない knitting pattern

超分子 (図 1) において, 3成分 $l_{1/2}, l_{-1/2}, l_\infty$ に対して

$$l_\infty \geq l_{1/2} \text{ かつ } l_{1/2} \geq l_{-1/2} \text{ かつ } l_{-1/2} \geq l_\infty$$

が成り立っている.

この条件を満たす図 11 内の図式は, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \infty)[\overline{r}\underline{b}\overline{r}\underline{b}]$ と $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \infty)[\overline{r}\underline{r}\underline{b}\underline{b}]$ であるが, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \infty)[\overline{r}\underline{b}\overline{r}\underline{b}]$ は, primitive でない(実際, 二つの $(1, -1, \infty)[\overline{r}\underline{b}]$ に分割できる).

従って, 条件を満たす図式は, 超分子(図 1)に対応する $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \infty)[\overline{r}\underline{r}\underline{b}\underline{b}]$ のみである.

参考文献

- [1] A. Kawauchi, Complexities of a knitting pattern, *Reactive and Functional Polymers*, **131**, (2018) 230–236
- [2] A. A. Akimova, S. V. Matveev and V. V. Tarkaev, Classification of Links of Small Complexity in the Thickened Torus, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **303**, (Suppl 1) (2018) 12–24.
- [3] H. R. Morton and S. Grishanov, Doubly Periodic Textile Structures, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **18**, (2009) 1597–1622.
- [4] S. Grishanov, V. Meshkov and A. Omelchenko, A Topological Study of Textile Structures. Part I: Topological Invariants in Application to Textile Structures, *Textile Research Journal*, **79**(8), (2009) 702–713.
- [5] S. Grishanov, V. Meshkov and A. Omelchenko, A Topological Study of Textile Structures. Part II: Topological Invariants in Application to Textile Structures, *Textile Research Journal*, **79**(9), (2009) 822–836.