

Quandle coloring quivers for spatial graphs

伊藤 大貴 (大阪大学大学院理学研究科)¹

quandle coloring quiver とは, S.Nelson 氏と K.Cho 氏によって定義された有向絡み目の不変量である. 我々は有向空間グラフに対して quandle coloring を導入する. この quandle coloring を用いることで quandle coloring quiver を有向空間グラフに対して拡張し, quandle coloring number では区別できないが quandle coloring quiver で区別できるような例が構成できた.

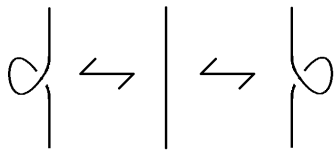
1 空間グラフ

定義 1.1. 抽象有向グラフ $G = (V(G), E(G))$ の表す 1 次元複体を, 3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ へ埋め込んだものを G の空間グラフといい, $\tilde{G}$ と表記する.

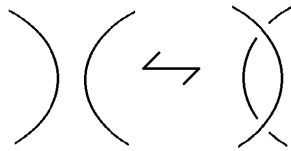
また, 空間グラフ $\tilde{G}$ と $\tilde{G}'$ に対して, 向きを保つ同相写像 $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在して, $\phi(\tilde{G}) = \tilde{G}'$, $\phi(V(\tilde{G})) = V(\tilde{G}')$ となると, $\tilde{G}$ と $\tilde{G}'$ は同値であるという.

定義 1.2. $\tilde{G}$ を空間グラフとする. また, $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を平面への射影であって, $\pi(\tilde{G})$ の多重点は有限個の辺上で横断的に交わる 2 重点のみであるとする. そのとき, $\pi(\tilde{G})$ の 2 重点に辺の上下の情報を加えたものを, $\tilde{G}$ の正則図式という.

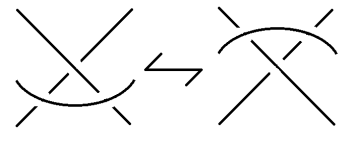
定義 1.3. g と g' をそれぞれ空間グラフ $\tilde{G}, \tilde{G}'$ の正則図式とする. そのとき, $g \sim g'$ であるとは, g と g' が有限回の R-1 から R-5 の局所変形で移りあうことをいう.



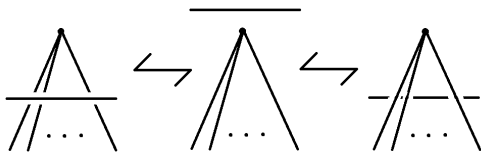
R-1



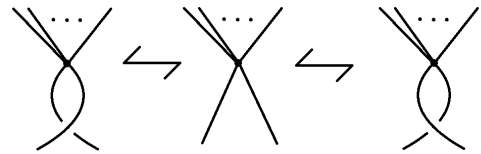
R-2



R-3



R-4



R-5

命題 1.4. $\tilde{G}$ と $\tilde{G}'$ が同値であるための必要十分条件は, $g \sim g'$ が成り立つことである.

¹e-mail: u063241a@ecs.osaka-u.ac.jp

2 Quandle coloring quiver

2.1 quandle

定義 2.1. X を集合とする. そのとき, X と 2 項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ の組 $(X, *)$ が quandle であるとは, 以下の 3 つの条件を満たすことをいう.

- (1) $\forall x \in X, x * x = x$
- (2) $\forall y \in X$, 写像 $S_y : X \rightarrow X; x \mapsto x * y$ が全単射
- (3) $\forall x, y, z \in X, (x * y) * z = (x * z) * (y * z)$

quandle の条件 (1),(2),(3) はそれぞれ, R-1 から R-3 の局所変形に対応する.

以後, quandle $(X, *)$ を単に X と表記する.

quandle の例をいくつか挙げる.

例 2.2. $n \in \mathbb{N}$, $X := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $x * y := 2y - x$ ($x, y \in X$) と定めると, X は quandle になる. この quandle を 2 面体 quandle といい, R_n と表記する.

例 2.3. $n \in \mathbb{N}$, $X := R_n \sqcup \{\omega\}$, $*$: $X \times X \rightarrow X$ を以下のように定めると, X は quandle になる. この quandle を 準 2 面体 quandle といい, R'_n と表記する.

$$x * y := \begin{cases} 2y - x & (x, y \in R_n) \\ x & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

2.2 quandle coloring

定義 2.4. g を空間グラフの正則図式とする. そのとき, g の arc を g の辺を over crossing でさらに区切ったものと定める.

また, $\mathcal{A}(g) := \{g \text{ の arc}\}$, g の頂点 v に対して, $\deg(v)$ を v に接続する辺の本数と定める.

定義 2.5. X を quandle とする. 任意の $a \in X$ と任意の $\epsilon \in \{\pm 1\}$ に対して, $a^\epsilon := (a, S_a^\epsilon)$ と表記する. また, $\tilde{X} := \{a^\epsilon | a \in X, \epsilon \in \{\pm 1\}\}$ とする. その時, $\bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} \tilde{X}^m$ の部分集合 P が X の pallet

であるとは, 以下の 4 つの条件を満たすことをいう.

- (1) $\forall (a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in P, (a_2^{\epsilon_2}, \dots, a_m^{\epsilon_m}, a_1^{\epsilon_1}) \in P$
- (2) $\forall (a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in P, S_{a_m}^{\epsilon_m} \circ \dots \circ S_{a_1}^{\epsilon_1} = id_X$
- (3) $\forall (a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in P, \forall x \in X,$
 $(S_x(a_1)^{\epsilon_1}, \dots, S_x(a_m)^{\epsilon_m}) \in P, (S_x^{-1}(a_1)^{\epsilon_1}, \dots, S_x^{-1}(a_m)^{\epsilon_m}) \in P$
- (4) $\forall (a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in P,$
 $(a_2^{\epsilon_2}, S_{a_2}^{\epsilon_2}(a_1)^{\epsilon_1}, a_3^{\epsilon_3}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in P, (S_{a_1}^{-\epsilon_1}(a_2)^{\epsilon_2}, a_1^{\epsilon_1}, a_3^{\epsilon_3}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in P$

pallet は, 有向空間グラフの quandle coloring を定義するのに必要である.
 pallet の条件 (2),(3) は R-4 に, 条件 (4) は R-5 に対応する.

pallet の例をいくつか挙げる.

例 2.6. R_n を 2 面体 quandle とする. そのとき,

$$F_m := \begin{cases} \{(a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in \widetilde{R_n}^m \mid \sum_{i=1}^m (-1)^i a_i = 0\} & (m : \text{even}) \\ \emptyset & (m : \text{odd}) \end{cases}, F := \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} F_m$$

と定めると, F は R_n の pallet となる. このとき, F を R_n の Fox pallet という.

例 2.7. $R'_n = R_n \sqcup \{\omega\}$ を準 2 面体 quandle とする. そのとき,

$$F'_m := \begin{cases} F_m & (m : \text{even}) \\ \{(a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in \widetilde{R}'_n^m \mid \exists! i \text{ s.t. } a_i = \omega, (a_1^{\epsilon_1}, \dots, \widehat{a_i^{\epsilon_i}}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in F_{m-1}\} & (m : \text{odd}) \end{cases},$$

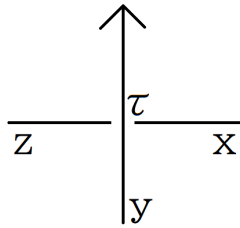
$$F' := \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} F'_m$$

と定めると, F' は R'_n の pallet となる. このとき, F' を R'_n の準 Fox pallet という.

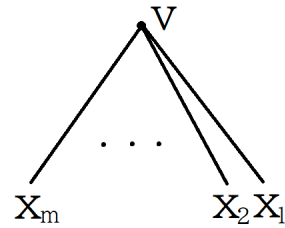
定義 2.8. X を quandle, g を空間グラフの diagram とする. また, P を X の pallet とする. そのとき, 写像 $C : \mathcal{A}(g) \rightarrow X$ が, g の (X, P) -coloring であるとは, G の各交点 τ と各頂点 v の周りの arc に対して, 以下の関係式が成り立つことをいう. ($\deg(v) = n$ とする.)

- (1) $C(x) * C(y) = C(z)$
- (2) $(C(x_1)^{\epsilon_1}, \dots, C(a_n)^{\epsilon_n}) \in P$

但し, ϵ_i は arc x_i の向きが v に向かって入って来るときに $+1$, v から出ていくときに -1 をとる.



交点 τ



頂点 v

また, $\text{Col}_{(X,P)}(g) := \{g \text{ の } (X, P)\text{-coloring}\}$, $\text{col}_{(X,P)}(g) := |\text{Col}_{(X,P)}(g)|$ と定める.

命題 2.9. g と g' を同値な空間グラフの正則図式とする. そのとき, $\text{Col}_{(X,P)}(g)$ から $\text{Col}_{(X,P)}(g')$ への全単射が存在する. 故に, $\text{col}_{(X,P)}(g) = \text{col}_{(X,P)}(g')$

命題 2.9 から, $\text{col}_{(X,P)}(g)$ は有向空間グラフの不変量であることが分かる.

2.3 quandle coloring quiver

定義 2.10. X を quandle, P を X の pallet とする. そのとき, $f : X \rightarrow X$ が X の quandle 自己準同型であるとは, $\forall x, y \in X, f(x * y) = f(x) * f(y)$ が成り立つことをいう. また, $\text{End}(X) := \{f : X \text{ の quandle 自己準同型}\}$,

$$\text{End}(X, P) := \{f \in \text{End}(X) \mid \begin{array}{l} \forall (a_1^{\epsilon_1}, \dots, a_m^{\epsilon_m}) \in P, \\ (f(a_1)^{\epsilon_1}, \dots, f(a_m)^{\epsilon_m}) \in P \end{array} \}$$

と定める.

以下の定義が, S.Nelson 氏と K.Cho 氏によって定義された quandle coloring quiver を有向空間グラフに対して拡張したものである.

定義 2.11. X を quandle, g を空間グラフの正則図式, P を X の pallet とする.

また, $S \subset \text{End}(X, P)$ を任意の部分集合とする. そのとき, g の quandle coloring quiver $Q_{(X,P)}^S(g) = (V, E)$ を次で定義する.

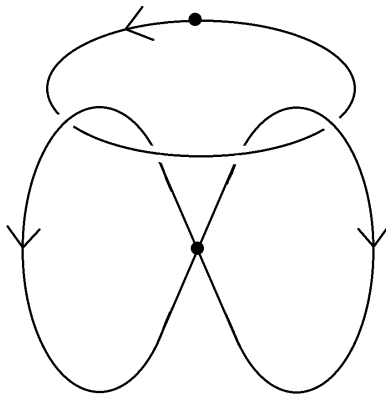
- (1) $V = \text{Col}_{(X,P)}(g)$
- (2) $E = \{(v, w, f) \in V \times V \times S \mid w = f \circ v\}$

但し, 辺は第 1 成分を始点, 第 2 成分を終点として向きを定める.

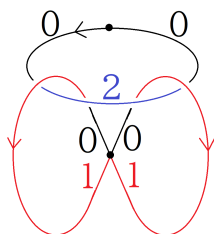
注意として, quiver は辺に向きが付いていて, 多重辺やループを許す.

quandle coloring quiver の例を挙げる.

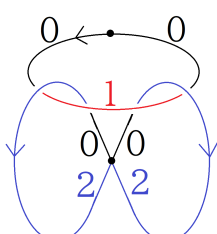
例 2.12. g を下図の正則図式, F を R_3 の Fox pallet と定めると, $\text{col}_{(R_3, F)}(g) = 9$ となる.



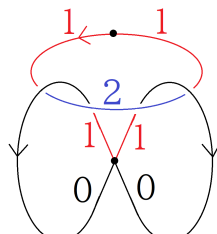
以下の 9 つの図が, $\text{Col}_{(R_3, F)}(g)$ の元である.



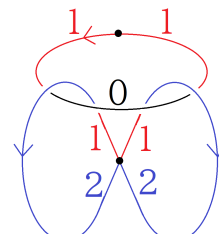
V_1



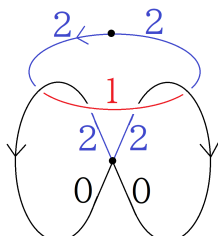
V_2



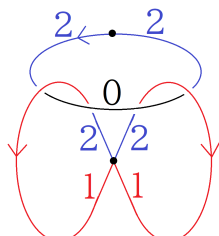
V_3



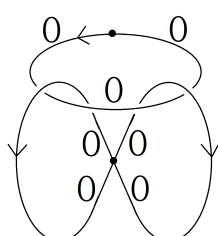
V_4



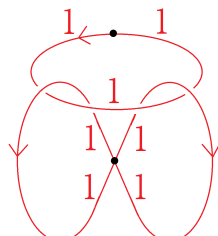
V_5



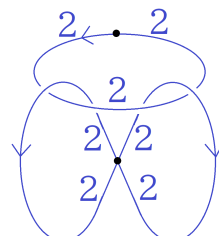
V_6



V_7

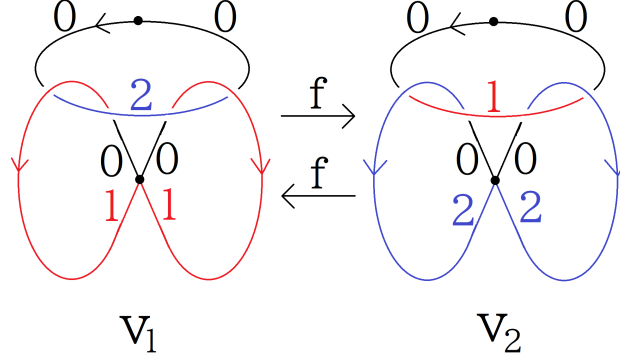


V_8

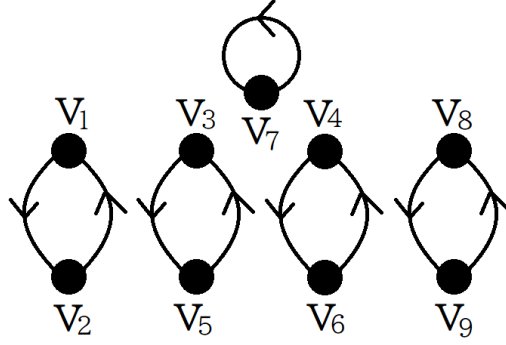


V_9

$f \in \text{End}(R_3, F)$ を $f(x) = 2x$ で定義される写像とし, $S = \{f\}$ とする. そのとき, 下図の2つの quandle coloring v_1 と v_2 に対して, $v_2 = f \circ v_1$, $v_1 = f \circ v_2$ を満たす.



また, 他の quandle coloring を辺で結んでできた quandle coloring quiver $Q_{(R_3, F)}^S(g)$ は下図のようになる.



3 主結果

まず, 次の定理が成り立つことが言えた.

定理 3.1. $g \sim g'$ ならば, 任意の $S \subset \text{End}(X, P)$ に対して, $Q_{(X, P)}^S(g) \cong Q_{(X, P)}^S(g')$ が成り立つ.

この定理から, 任意の $S \subset \text{End}(X, P)$ に対して, $Q_{(X, P)}^S(g)$ は空間グラフの不変量であることが分かる.

また, 以下の3つの命題が成り立つ.

命題 3.2. F を R_n の Fox pallet とすると, $\text{End}(R_n, F) = \text{End}(R_n)$ が成り立つ.

本稿では, 任意の頂点の次数が偶数である空間グラフを, 空間オイラーグラフと呼ぶことにする.

命題 3.3. 以下の2つの条件を満たす空間オイラーグラフの正則図式 g と g' , $n \in \mathbb{N}$, $S \subset \text{End}(R_n)$ が存在する.

- (1) $\text{col}_{(R_n, F)}(g) = \text{col}_{(R_n, F)}(g')$
- (2) $Q_{(R_n, F)}^S(g) \not\cong Q_{(R_n, F)}^S(g')$

命題 3.4. 以下の 3 つの条件を満たす空間グラフの正則図式 g と g' , $n \in \mathbb{N}$, $S \subset \text{End}(R'_n, F')$ が存在する.

- (1) g, g' は奇数次数の頂点を持つ.
- (2) $\text{col}_{(R'_n, F')}(g) = \text{col}_{(R'_n, F')}(g')$
- (3) $Q^S_{(R'_n, F')}(g) \not\cong Q^S_{(R'_n, F')}(g')$

命題 3.3, 命題 3.4 から, quandle coloring quiver $Q^S_{(R_n, F)}(g)$ と $Q^S_{(R'_n, F')}(g)$ は quandle coloring number $\text{col}_{(R_n, F)}(g)$ と $\text{col}_{(R'_n, F')}(g)$ よりも強い不変量であることが分かる. さらに, 次の定理が成り立つことが言えた.

定理 3.5. g, g' を空間オイラーグラフの正則図式とする. そのとき, 任意の奇素数 p に対して, 次のことが成り立つ.

$$\text{col}_{(R_p, F)}(g) = \text{col}_{(R_p, F)}(g') \Rightarrow \text{任意の } S \subset \text{End}(R_p) \text{ に対して, } Q^S_{(R_p, F)}(g) \cong Q^S_{(R_p, F)}(g')$$

この定理から, X が素数位数の 2 面体 quandle のときは, quandle coloring quiver $Q^S_{(R_n, F)}(g)$ と quandle coloring number $\text{col}_{(R_n, F)}(g)$ は同じ強さの不変量であることが分かる.

参考文献

- [1] L. H. Kauffman, Invariants of graphs in three-space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **311** (1989) 697–710.
- [2] S. Yamada, An invariant of spatial graphs, *J. Graph Theory.* **13** (1989), 537–551.
- [3] D. Joyce, A classifying invariants of knots, the knot quandle, *J. Pure Appl. Algebra.* **23** (1982), 37–65.
- [4] K. Oshiro, On pallets for Fox colorings of spatial graphs, *Topology and its Applications.* **159** (2012), 1092–1105.
- [5] K. Cho and S. Nelson. Quandle coloring quivers. *J. Knot Theory Ramifications.* **28**(1) (2019), 1950001, 12.
- [6] Y. Taniguchi, Quandle coloring quivers of links using dihedral quandles. preprint, arXiv:2004.12437.