

Quandle coloring quivers of virtual links

上田 涼太郎 (大阪大学大学院理学研究科)*

概要

古典絡み目の不変量である quandle coloring quiver が S.Nelson 氏と K.Cho 氏によって定義された。我々は仮想カンドルを用いた彩色を考えることで、Nelson-Cho の quandle coloring quiver を仮想絡み目の場合に拡張した。このとき、谷口雄大氏によって研究された古典絡み目の quandle coloring quiver の性質と類似の性質が成り立つことが分かった。

keywords : virtual link, virtual quandle, quandle coloring quiver

1 仮想絡み目

1.1 仮想絡み目と一般 Reidemeister 移動

定義 1.1.1 (Kauffman [4]). **仮想絡み目図式**とは平面へはめ込まれたいくつかの向き付けられた円周であり、その多重点は有限個の横断的に交わる 2 重点のみで、そこには図 1 の古典的交叉または仮想交叉の情報が与えられている。

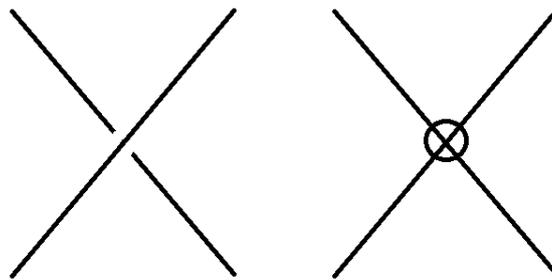


図 1 古典的交叉と仮想交叉.

定義 1.1.2 (Kauffman [4]). 次の図 2 の変形は、(R1~R3) を (古典的) Reidemeister 変形、(V1~V4) を仮想 Reidemeister 変形といい、これらをまとめて一般 Reidemeister 変形という。2 つの仮想絡み目図式が有限回の一般 Reidemeister 変形で移りあうとき、同値であるとする。

* e-mail:u081574k@ecs.osaka-u.ac.jp

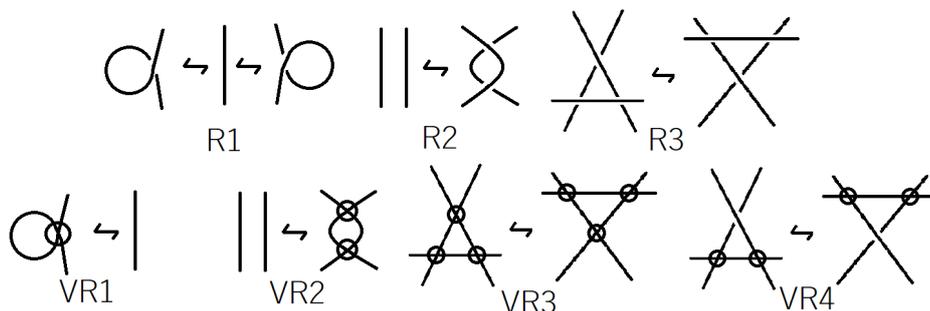


図2 一般 Reidemeister 変形.

定義 1.1.3 (Kauffman [4]). 一般 Reidemeister 変形が生成する同値関係による仮想絡み目図式
の同値類を**仮想絡み目**という.

命題 1.1.4 (cf. Polyak [5]). D と D' を同値な2つの仮想絡み目図式とする. このとき D と D'
は有限回の図3で示されている9種類の向き付けられた一般 Reidemeister 変形で移りあう.

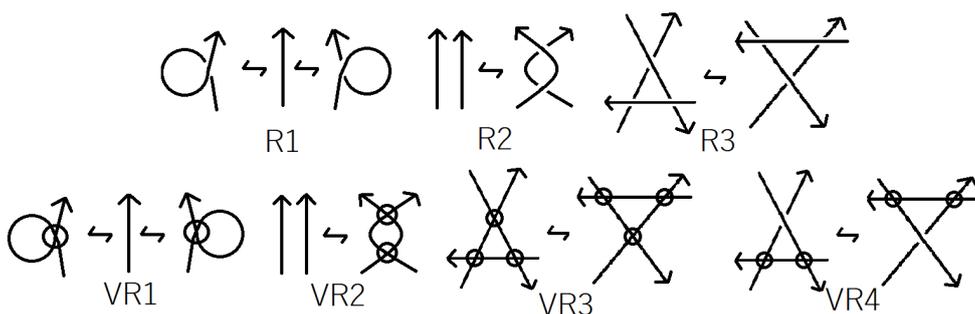


図3 一般 Reidemeister 変形の生成系.

2 仮想カンドルと仮想カンドル彩色

2.1 カンドル

定義 2.1.1 (Joyce [1]). 空でない集合 X 上の2項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X; (x, y) \mapsto x * y$ が次の
3つの条件を満たすとき, 組 $(X, *)$ を**カンドル** (quandle) という. 簡単のため $(X, *)$ を単に X と
書くことにする.

1. 任意の $x \in X$ に対し, $x * x = x$.
2. 任意の $x, y \in X$ に対し, $z * y = x$ となる $z \in X$ が唯一存在する.

3. 任意の $x, y, z \in X$ に対し, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

カンドルの公理は結び目理論における (古典的) Reidemeister 変形を背景に導入された. 同時期に Matveev[6] も同様の概念を独立に発見している.

例 2.1.2. X を剰余群 $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 演算 $*$ を $x * y = 2y - x$ とすればカンドルになる. このカンドルを位数 n の **2面体カンドル** (dihedral quandle) と呼び, R_n と書く.

例 2.1.3. X を剰余群 \mathbb{Z}_n , 任意の $t \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0, 1\}$ に対し, 演算 $*$ を $x * y = tx + (1 - t)y$ とすればカンドルになる.

2.2 仮想カンドル彩色

X をカンドルとし, 写像 $f : X \rightarrow X$ で, 任意の $x, y \in X$ に対し, $f(x * y) = f(x) * f(y)$ を満たすものを X のカンドル自己準同型という. また, X のカンドル自己準同型全体の集合を $\text{End}(X)$ と書く. そして, 全単射なカンドル自己準同型のことをカンドル自己同型という. また, X のカンドル自己同型全体の集合を $\text{Aut}(X)$ と書く.

定義 2.2.1 (Manturov [7]). X をカンドル, $f \in \text{Aut}(X)$ とする. このとき組 (X, f) を**仮想カンドル** (virtual quandle) という.

定義 2.2.2 (cf. Cenicerós-Nelson [2]). (X, f) と (X, g) を仮想カンドルとする. このとき (X, f) と (X, g) が同値とは, ある $\phi \in \text{Aut}(X)$ が存在して, $f = \phi^{-1} \circ g \circ \phi$ を満たすことである. つまり次の図式が可換となることである.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & X \\ f \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{\phi} & X \end{array}$$

例 2.2.3. (R_3, f) と (R_3, g) を 2面体カンドル R_3 と $f(x) = x + 1, g(x) = x + 2$ が定める $f, g \in \text{Aut}(R_3)$ の組である仮想カンドルとする. このとき $(R_3, f) \sim (R_3, g)$ である. 実際, $\phi(x) = 2x$ とすると, $f = \phi^{-1} \circ g \circ \phi$ を満たす.

定義 2.2.4. D を仮想絡み目図式とする. D の**仮想弧** (virtual arc) とは D の弧を仮想交叉でさらに分割したものである. D の仮想弧全体の集合を $\mathcal{VA}(D)$ と書く.

定義 2.2.5 (Manturov [7]). (X, f) を仮想カンドル, D を仮想絡み目図式とする. このとき D の各交点で図 4 の条件を満たす写像 $c : \mathcal{VA}(D) \rightarrow X$ を仮想カンドル (X, f) による**彩色** (coloring) または (X, f) -**彩色** ((X, f) -coloring) と呼ぶ. また D の (X, f) -彩色全体の集合を $\text{Col}_{(X, f)}(D)$ と書く. 特に f が恒等写像のときは $\text{Col}_X(D)$ と書く.

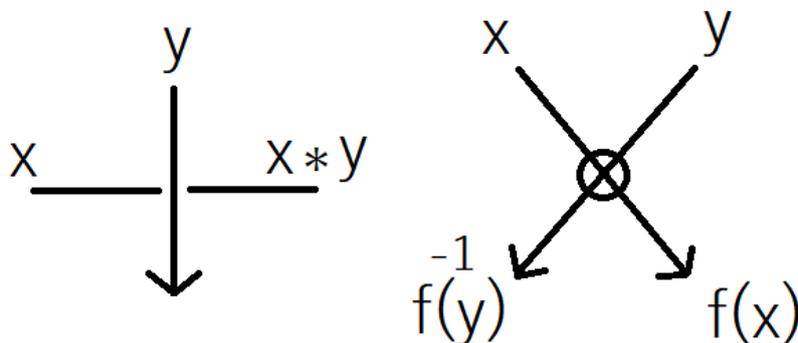


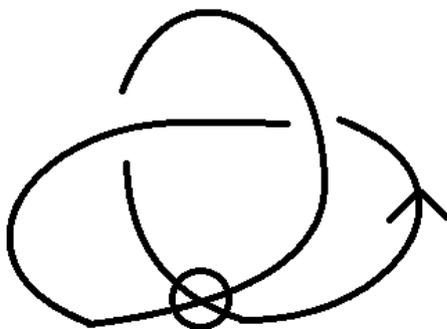
図4 彩色の条件.

命題 2.2.6 (Manturov [7]). (X, f) を仮想カンドルとする. このとき 2つの仮想絡み目図式 D と D' が同値ならば, $\text{Col}_{(X,f)}(D)$ と $\text{Col}_{(X,f)}(D')$ の間に全単射が存在する. 特に X が有限カンドルならば $\text{Col}_{(X,f)}(D)$ は有限であり, その位数 $|\text{Col}_{(X,f)}(D)|$ は仮想絡み目の不変量である. この不変量を**仮想カンドル彩色数** (virtual quandle coloring number) という.

命題 2.2.7 (U.). D を仮想絡み目図式とする. このとき 2つの仮想カンドル (X, f) と (X, g) が同値ならば, $\text{Col}_{(X,f)}(D)$ と $\text{Col}_{(X,g)}(D)$ の間に全単射が存在する. 特に X が有限カンドルならば $\text{Col}_{(X,f)}(D)$ は有限であり, その位数 $|\text{Col}_{(X,f)}(D)|$ は仮想カンドルの同値類の不変量である.

定理 2.2.8 (Ceniceros-Nelson [2]). D を仮想絡み目図式とする. このとき, ある 2つの仮想カンドル (X, f) と (X, g) に対して, $|\text{Col}_{(X,f)}(D)| \neq |\text{Col}_{(X,g)}(D)|$ ならば, D と同値な任意の仮想絡み目図式は仮想交叉を含む.

例 2.2.9. D を下図の仮想三葉結び目図式, (R_3, f_1) と (R_3, f_2) を 2 面体カンドル R_3 と $f_1(x) = 2x + 1, f_2(x) = x + 1$ が定める $f_1, f_2 \in \text{Aut}(R_3)$ の組である仮想カンドルとする. このとき $|\text{Col}_{(R_3, f_1)}(D)| = 3, |\text{Col}_{(R_3, f_2)}(D)| = 0$ なので, D と同値な任意の仮想絡み目図式は仮想交叉を含む.

 D

3 仮想カンドル彩色クイバー

3.1 カンドル彩色クイバー

はじめに, S.Nelson 氏と K.Cho 氏によって定義されたカンドル彩色クイバーを紹介する.
以後カンドルは有限なものとする.

定義 3.1.1 (Cho-Nelson [3]). D を (古典的) 絡み目図式, X をカンドルとし, 任意の $S \subset \text{End}(X)$ に対して, 次で定義される V と E をそれぞれ頂点集合と辺集合とする有向グラフを **カンドル彩色クイバー** (quandle coloring quiver) と呼び, $Q_X^S(D)$ と書く.

1. $V = \text{Col}_X(D)$.
2. $E = \{(v, w, g) \in V \times V \times S \mid w = g \circ v\}$.

ここで, 辺集合 E には第 1 成分を始点, 第 2 成分を終点として向きを入れる.

定理 3.1.2 (Cho-Nelson [3]). 2 つの (古典的) 絡み目図式 D と D' が同値ならば, 任意のカンドル X と, 任意の $S \subset \text{End}(X)$ に対して, それらのカンドル彩色クイバー $Q_X^S(D)$ と $Q_X^S(D')$ は有向グラフとして同型である.

定理 3.1.2 よりカンドル彩色クイバーは (古典的) 絡み目の不変量であることが分かる.

3.2 仮想カンドル彩色クイバー

我々は §3.1 で述べた概念を仮想絡み目図式と仮想カンドルの場合に拡張した.

定義 3.2.1 (U.). D を仮想絡み目図式, (X, f) を仮想カンドルとし, 任意の $S \subset \text{Com}_f(X) := \{g \in \text{End}(X) \mid f \circ g = g \circ f\}$ に対して, 次で定義される V と E をそれぞれ頂点集合と辺集合とする有向グラフを**仮想カンドル彩色クイバー** (virtual quandle coloring quiver) と呼び, $VQ_{(X,f)}^S(D)$ と書く.

1. $V = \text{Col}_{(X,f)}(D)$.
2. $E = \{(v, w, g) \in V \times V \times S \mid w = g \circ v\}$.

ここで, 辺集合 E には第 1 成分を始点, 第 2 成分を終点として向きを入れる.

また $S = \text{Com}_f(X)$ のとき, **全仮想カンドル彩色クイバー** (full virtual quandle coloring quiver) と呼び, S を省略して $VQ_{(X,f)}(D)$ と書く.

補題 3.2.2. D を仮想絡み目図式, (X, f) を仮想カンドルとする. このとき任意の $c \in \text{Col}_{(X,f)}(D)$ と $g \in \text{Com}_f(X)$ に対して, $g \circ c \in \text{Col}_{(X,f)}(D)$ である.

S を $\text{Com}_f(X)$ の部分集合とした理由は, 図 5 で示すように仮想交叉で仮想カンドル彩色クイバーがうまく定義できる条件を考えるためのものである.

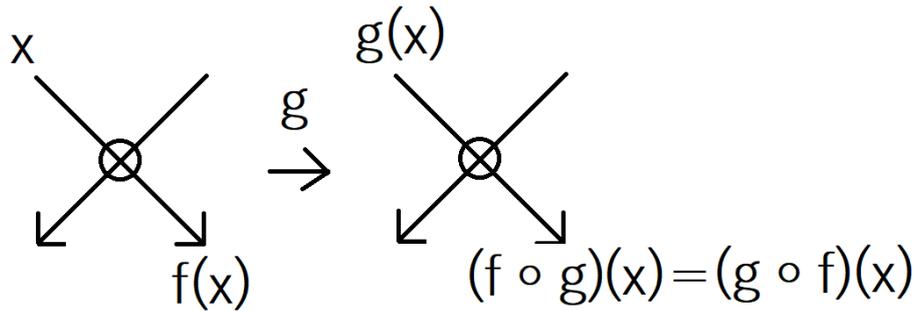
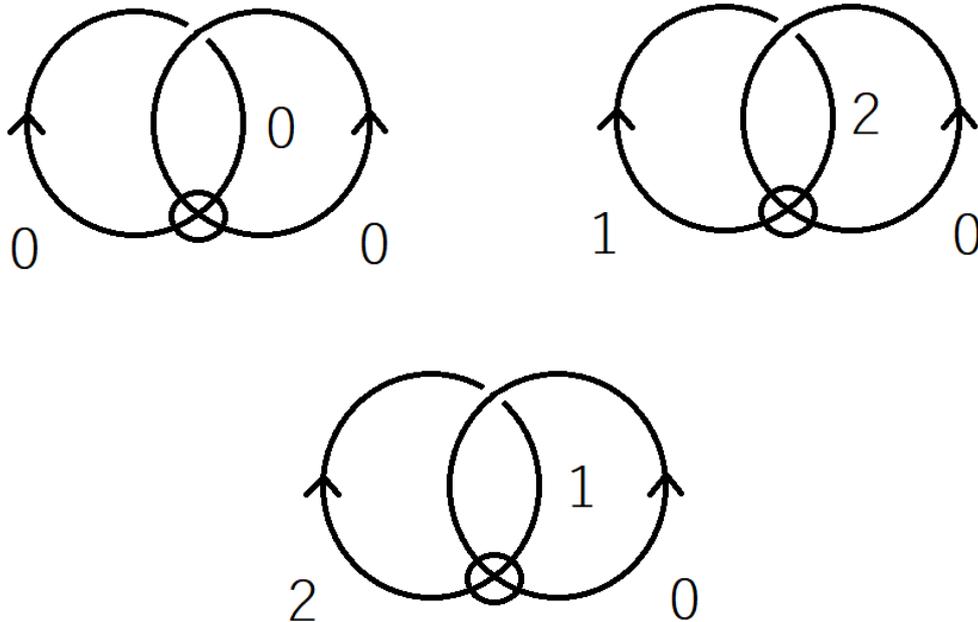
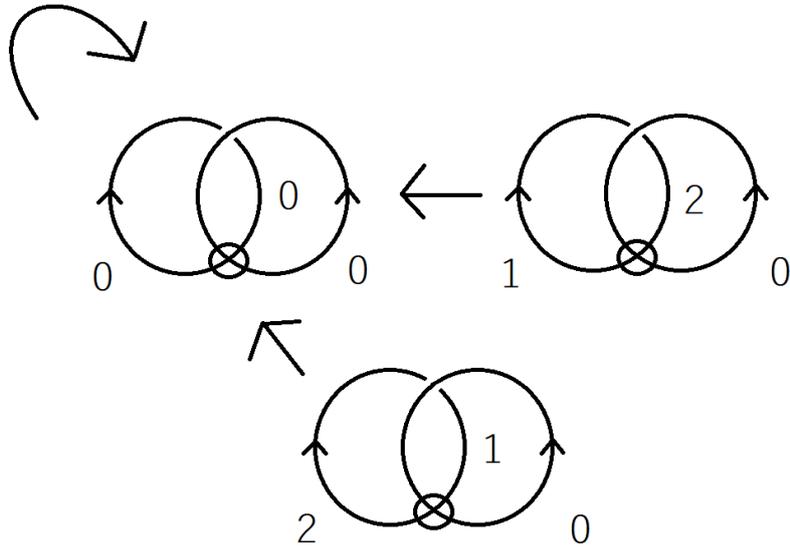


図 5 $\text{Com}_f(X)$ の条件.

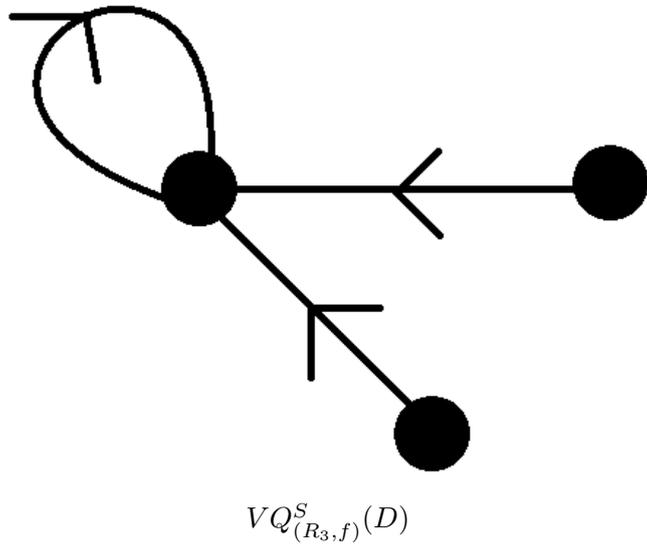
例 3.2.3. D を下図のような仮想 Hopf 絡み目図式, (R_3, f) を 2 面体カンドル R_3 と $f(x) = 2x$ が定める $f \in \text{Aut}(R_3)$ の組である仮想カンドルとする. (R_3, f) による D の仮想カンドル彩色は以下の 3 通りである.



ここで $g \in \text{End}(R_3)$ を $g(x) = 0$ で定めると, $g \in \text{Com}_f(R_3)$ である. D の各彩色に g を合成した関係を描いたのが次の図である.



つまり, $S = \{g\}$ としたときの仮想カンドル彩色クイバー $VQ_{(R_3, f)}^S(D)$ は次の有向グラフである.



4 主結果

4.1 主定理

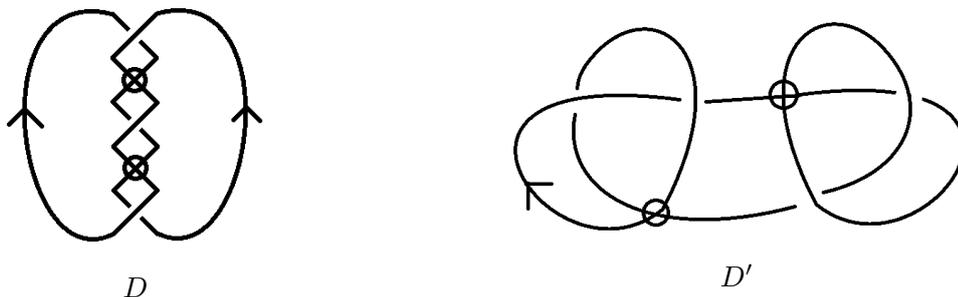
仮想絡み目について次の定理が得られた.

定理 4.1.1 (U.). 2つの仮想絡み目図式 D と D' が同値ならば, 任意の仮想カンドル (X, f) と, 任意の $S \subset \text{Com}_f(X)$ に対して, それらの仮想カンドル彩色クイバー $VQ_{(X,f)}^S(D)$ と $VQ_{(X,f)}^S(D')$ は有向グラフとして同型である.

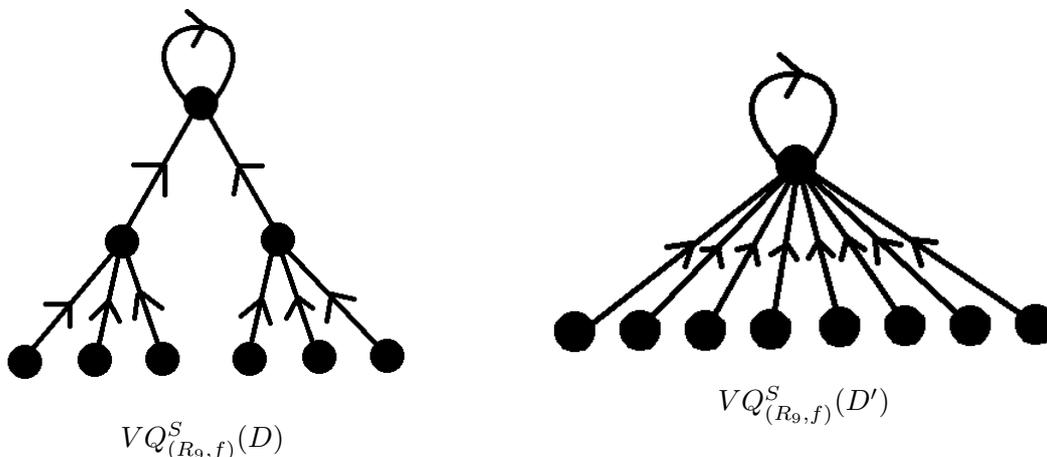
定理 4.1.1 より仮想カンドル彩色クイバーは仮想絡み目の不変量であることが分かる.

定義から仮想カンドル彩色クイバーは仮想カンドル彩色数と同等もしくはより強力な仮想絡み目の不変量であるが, 実際に, より強力な場合の例を次で与える.

例 4.1.2. 仮想結び目図式 D と D' を図の2つのものとする. (R_9, f) を2面体カンドル R_9 と $f(x) = 2x$ が定める $f \in \text{Aut}(R_9)$ の組である仮想カンドルとする. (R_9, f) による D と D' の仮想カンドル彩色数は共に9である.

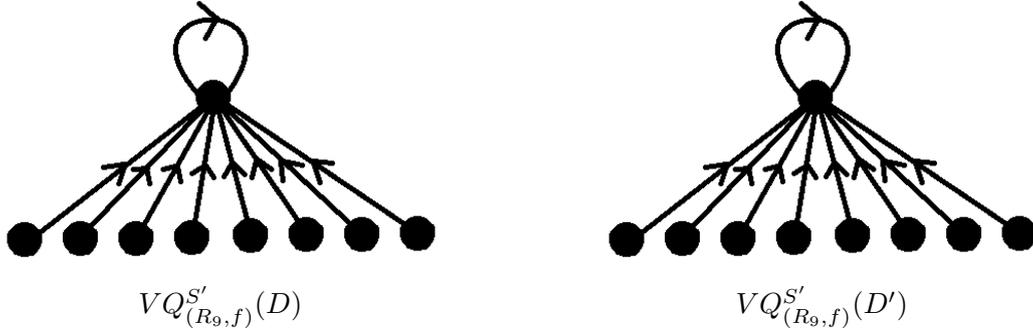


ここで $g \in \text{End}(R_9)$ を $g(x) = 3x$ で定めると, $g \in \text{Com}_f(R_9)$ である. $S = \{g\}$ とし, 仮想カンドル彩色クイバー $VQ_{(R_9,f)}^S(D)$ と $VQ_{(R_9,f)}^S(D')$ を考えると, それらは次の有向グラフである.



よって D と D' は同値な仮想結び目ではない.

また, $g' \in \text{End}(R_9)$ を $g'(x) = 0$ で定めると, $g' \in \text{Com}_f(R_9)$ である. $S' = \{g'\}$ とし, 仮想カンドル彩色クイバー $VQ_{(R_9,f)}^{S'}(D)$ と $VQ_{(R_9,f)}^{S'}(D')$ を考えると, それらは次の有向グラフである.



つまり, S の選び方によって D と D' が同値でないか分からない場合もある.

上の例は仮想結び目であるが, 仮想絡み目や, カンドルが 2 面体カンドル以外の場合でもこのような例が存在する.

また, 谷口雄大氏によってカンドル彩色クイバーについて次の定理が示された.

定理 4.1.3 (Taniguchi [8]). p を奇素数とし, R_p を 2 面体カンドル, D と D' を (古典的) 絡み目図式とする. このとき $|\text{Col}_{R_p}(D)| = |\text{Col}_{R_p}(D')|$ ならば, 任意の $S \subset \text{End}(R_p)$ に対して, それらのカンドル彩色クイバー $Q_{R_p}^S(D)$ と $Q_{R_p}^S(D')$ は有向グラフとして同型である.

この定理を仮想カンドル彩色クイバーに拡張するような次の定理が得られた.

定理 4.1.4 (U.). p を奇素数とし, (R_p, f) を 2 面体カンドル R_p と $f \in \text{Aut}(R_p)$ の組である仮想カンドル, D と D' を仮想絡み目図式とする. このとき $|\text{Col}_{(R_p,f)}(D)| = |\text{Col}_{(R_p,f)}(D')|$ ならば, 任意の $S \subset \text{Com}_f(R_p)$ に対して, それらの仮想カンドル彩色クイバー $VQ_{(R_p,f)}^S(D)$ と $VQ_{(R_p,f)}^S(D')$ は有向グラフとして同型である.

仮想カンドルの同値類について次の定理が得られた.

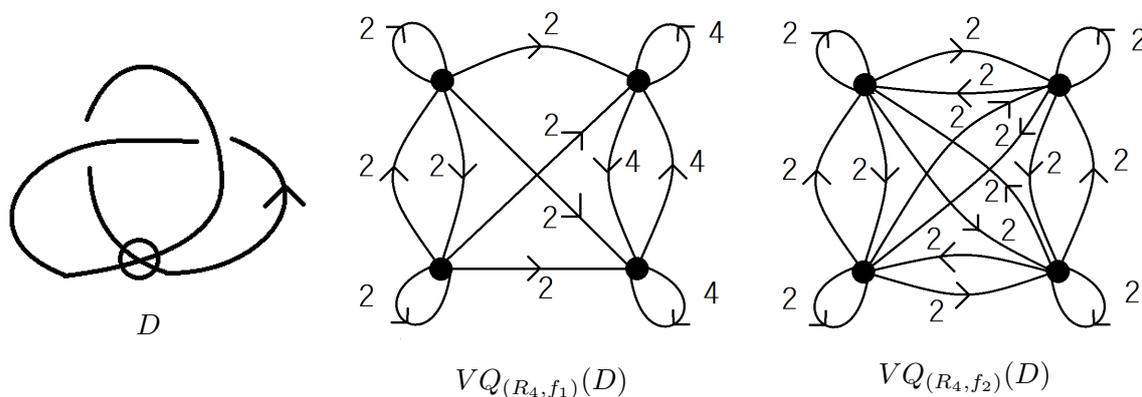
定理 4.1.5 (U.). D を仮想絡み目図式とする. 2 つの同値な仮想カンドル (X, f) と (X, g) に対して定義より, ある $\phi \in \text{Aut}(X)$ が存在し, $f = \phi^{-1} \circ g \circ \phi$ を満たす. このとき, $\Phi_\phi : \text{Com}_f(X) \rightarrow \text{Com}_g(X); h \mapsto \phi h \phi^{-1}$ とすると, 任意の $S \subset \text{Com}_f(X)$ に対して, それらの仮想カンドル彩色クイバー $VQ_{(X,f)}^S(D)$ と $VQ_{(X,g)}^{\Phi_\phi(S)}(D)$ は有向グラフとして同型である.

特に, Φ_ϕ は全単射なので, 全仮想カンドル彩色クイバー $VQ_{(X,f)}(D)$ と $VQ_{(X,g)}(D)$ は有向グラフとして同型である.

定理 4.1.5 より仮想絡み目図式 D を固定するとき, 全仮想カンドル彩色クイバーは仮想カンドルの同値類の不変量であることが分かる.

定義から全仮想カンドル彩色クイバーは仮想カンドル彩色数と同等もしくはより強力な仮想カンドルの同値類の不変量であるが、実際に、より強力な場合の例を次で与える。

例 4.1.6. D を下図の仮想三葉結び目図式, (R_4, f_1) と (R_4, f_2) を 2 面体カンドル R_4 と $f_1(x) = 3x + 2$, $f_2(x) = x + 2$ が定める $f_1, f_2 \in \text{Aut}(R_4)$ の組である仮想カンドルとする. (R_4, f_1) と (R_4, f_2) による D の仮想カンドル彩色数は共に 4 である. それらの全仮想カンドル彩色クイバーは次の有向グラフである. ただし辺の数字は多重辺の本数を表している.



よって (R_4, f_1) と (R_4, f_2) は同値な仮想カンドルではない.

参考文献

- [1] D. Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *J. Pure Appl. Algebra.* **23** (1982), no.1, 37–65.
- [2] J. Ceniceros and S. Nelson. Virtual Yang-Baxter cocycle invariants, *Trans. Amer. Math. Soc.* **361**(10) (2009) 5263–5283.
- [3] K. Cho and S. Nelson. Quandle coloring quivers. *J. Knot Theory Ramifications.* **28** (2019), no. 1, 1950001, 12 pp.
- [4] Louis H. Kauffman, Virtual knot theory, *European J. Combin.* **20** (1999), no. 7, 663–690, DOI 10.1006/eujc.1999.0314.
- [5] M. Polyak, Minimal generating sets of Reidemeister moves, *Quantum Topol.* **1** (2010), no. 4, 399–411.
- [6] S. Matveev. Distributive groupoids in knot theory. *Math. USSR. Sbornik.* **47** (1884), 73–83.
- [7] V. O . Manturov, On Invariants of Virtual Links, *Acta Applicandae Mathematicae* **72**, 295–309 (2002). <https://doi.org/10.1023/A:1016258728022>
- [8] Y. Taniguchi, Quandle coloring quivers of links using dihedral quandles. preprint, arXiv:2004.12437.