

Coloring links by Symmetric group of order 3

市原 一裕 (日本大学 文理学部)*¹

松土 恵理 (日本大学 文理学部 自然科学研究所)*²

本稿では3次対称群 S_3 による絡み目の彩色とその最小彩色数に関する結果を報告する．主に2橋絡み目について述べる．

1. 導入

L を絡み目, D を L の向き付けられた正則図式とする．各交点において上弧を x , 向きに沿って進るとき下弧のうち交点を通った先の弧を y , 通る前の弧を z とする．このとき写像 $C: \{D \text{ 上の弧} \} \rightarrow S_3 - \{e\}$ が, 正の交点において $C(x)C(y) = C(z)C(x)$, 負の交点において $C(x)C(z) = C(y)C(x)$ が成り立つとする．このとき C を S_3 -彩色という．これは [1] で Fox により導入された Fox n -彩色の一般化である．

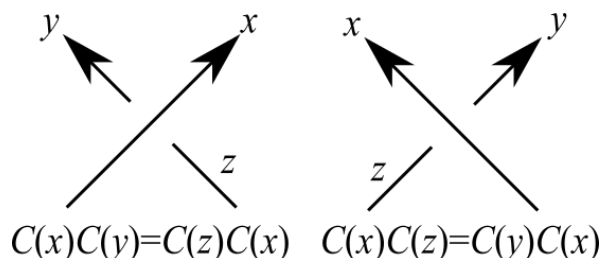


図 1: S_3 -彩色の交点条件

S_3 の元のうち $\sigma = (1\ 2), \tau = (2\ 3)$ とする．このとき S_3 -彩色の交点条件からつぎのパレットグラフが得られる．パレットグラフとは, 色を頂点をとし, 2つの頂点の色がある交点で2つの下弧となるときの, その上弧の色の辺で結ぶことで構成されるグラフのことである．ただし頂点 $\tau, \sigma, \sigma\tau\sigma$ を繋ぐ辺が $\sigma\tau$ または $\tau\sigma$ である場合はその交点の符号に依存する．

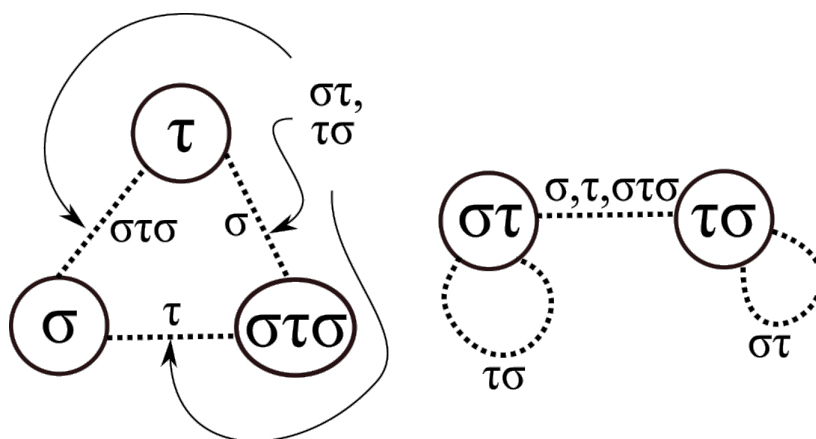


図 2: S_3 -彩色のパレットグラフ (交点の符号との関係は省略)

本研究は科研費 (課題番号:18K03287) の助成を受けたものである．

2010 Mathematics Subject Classification: 57M25

キーワード: S_3 -coloring, torus link, 2-bridge link, minimal coloring number

*¹ e-mail: ichihara.kazuhiro@nihon-u.ac.jp

*² e-mail: cher16001@g.nihon-u.ac.jp

この S_3 -彩色 C がされた正則図式 D 上に現れる色が, n 色であるときに C を (S_3, n) -彩色と表す. $n = 1$ の場合を自明な S_3 -彩色とし, 非自明 (つまり $n \geq 2$) である (S_3, n) -彩色を許容する図式を絡み目 L がもつとき, L を (S_3, n) -彩色可能という. ただし L が結び目のときは $n \leq 3$ となる.

このとき次のことがわかる.

補題 1. L を分離不可能な絡み目とする.

(i) $(S_3, 4)$ -彩色または $(S_3, 5)$ -彩色が与えられている L の図式からライデマイスター変形で得られる図式に現れる色は常に 4 色以上である. またこのときの $(S_3, 4)$ -彩色に現れる色は $\{\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma\}$, $\{\sigma\tau, \tau\sigma\}$ からそれぞれ 2 色ずつである.

(ii) $(S_3, 3)$ -彩色が与えられている L の図式からライデマイスター変形で得られる図式に現れる色は常に 3 色である.

補題 1 の証明. (i) S_3 -彩色のパレットグラフ (図 2) より, $\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma$ のうちのいずれかの色がついた弧を含む成分は $\sigma\tau, \tau\sigma$ の色がついた弧を持たない. つまり $(S_3, 4)$ -彩色または $(S_3, 5)$ -彩色を許容する図式 D をもつ L は 2 成分以上の絡み目であり, 常に図式上に $\{\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma\}$, $\{\sigma\tau, \tau\sigma\}$ から最低でも 1 色ずつ現れる.

このとき D をライデマイスター変形して得られた図式 D' が, ある α, β, γ の 3 色で彩色されていたとする. $\alpha \in \{\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma\}$, $\beta, \gamma \in \{\sigma\tau, \tau\sigma\}$ とすると, α が彩色された弧は, 常に「上弧」または「上弧が α で彩色された交点での下弧」である. このとき α で彩色された弧を含む成分が分離可能となり, L が分離不可能であることに矛盾する. $\alpha \in \{\sigma\tau, \tau\sigma\}$, $\beta, \gamma \in \{\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma\}$ としても同様. よって D' には常に 4 色以上現れる.

同様に D をライデマイスター変形して得られる図式 D'' が $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の 4 色で彩色されていたとする. このとき $\alpha, \beta, \gamma \in \{\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma\}$, $\delta \in \{\sigma\tau, \tau\sigma\}$ であるとき, δ が対応する弧をもつ成分が分離可能となり, L が分離不可能であることに矛盾. $\alpha, \beta, \gamma \in \{\sigma\tau, \tau\sigma\}$, $\delta \in \{\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma\}$ としても同様. よって現れる色は $\{\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma\}$, $\{\sigma\tau, \tau\sigma\}$ からそれぞれ 2 色ずつである.

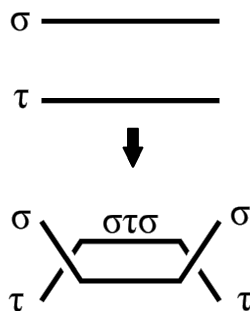
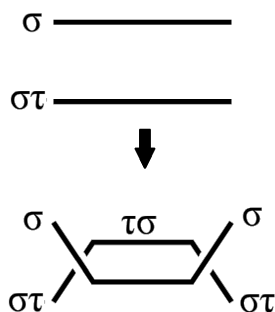
(ii) L が分離不可能であることから, (i) より $(S_3, 3)$ -彩色を許容している L の図式 D に現れる色は $\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma$ の 3 色である. このとき L のすべての成分は, $\sigma\tau, \tau\sigma$ が彩色された弧をもたない. よってライデマイスター変形を行っても D に現れる色は常に $\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma$ の 3 色である. $\square$

注意 1. 結び目に対して $(S_3, 3)$ -彩色は Fox 3-彩色と 1 対 1 で対応がつく.

このとき, 次のことがすぐにわかる.

命題 1. 絡み目 L が $(S_3, 4)$ -彩色可能ならば, L は $(S_3, 5)$ -彩色可能である.

証明. $(S_3, 4)$ -彩色を許容している図式をその現れている色によってライデマイスター変形 II で局所的に変形し, $(S_3, 5)$ -彩色を許容する図式に変形することができる.

図 3: $\{\sigma, \tau, \sigma\tau, \tau\sigma\}$ から $\sigma\tau\sigma$ を増やす場合図 4: $\{\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma, \sigma\tau\}$ から $\tau\sigma$ を増やす場合 (L が分離可能のとき)

□

ここで自然な疑問として次が挙げられる.

問題 1. 絡み目 L が $(S_3, 5)$ -彩色可能であるとき, L は $(S_3, 4)$ -彩色可能であるか.

つまり 5 色現れている図式から 4 色現れる図式へと変形することはできるか, という問題である.

2. 主結果

今回, 問題 1 について 2 橋絡み目の次の結果が得られた.

定理 1. 2 橋絡み目 L が $(S_3, 5)$ -彩色可能ならば, $(S_3, 4)$ -彩色可能である. さらに $(S_3, 4)$ -彩色可能である必要十分条件は, L が $\sum_{i=1}^{m+1} |a_i| \equiv 0 \pmod{2}$ を満たすコンウェイ図式 $C(2a_1, 2b_1, 2a_2, 2b_2, \dots, 2b_m, 2a_{m+1})$ をもつことである.

ただしコンウェイ図式の表示は [2] に従う.

証明. まず $(S_3, 4)$ -彩色可能である必要十分条件について示す.

(i) $\sum_{i=1}^{m+1} |a_i| \equiv 0 \pmod{2}$ を満たす, 図 5 のようなある 2 橋絡み目のコンウェイ図式 $C(2a_1, 2b_1, \dots, 2b_m, 2a_{m+1})$ が, ある $(S_3, 4)$ -彩色を満たすことを示す. (向きの異なる場合も同様.)

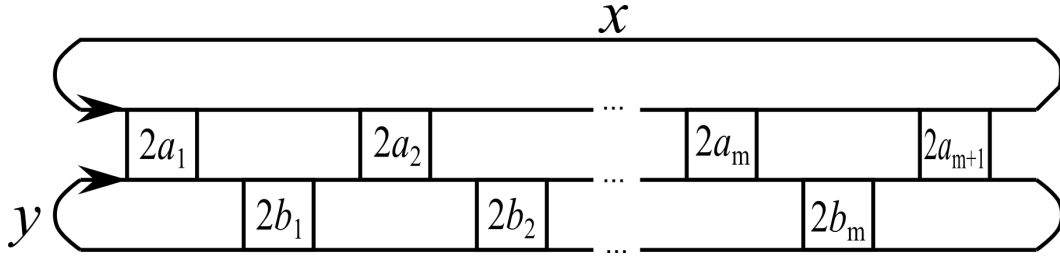
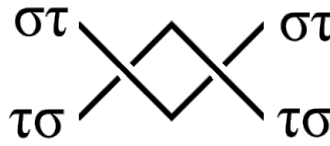
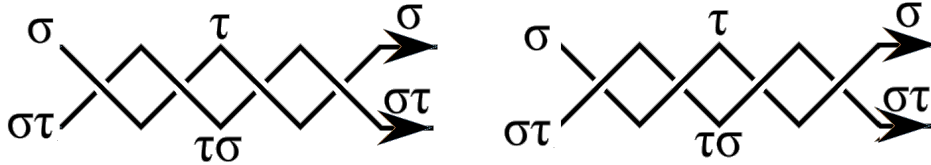
図 5: コンウェイ図式 $C(2a_1, 2b_1, \dots, 2b_m, 2a_{m+1})$

図5の弧 x, y について対応する色を $C(x) = \sigma, C(y) = \sigma\tau$ とする. このとき $2b_i$ の表す交点では $\sigma\tau, \tau\sigma$ の2色のみが現れ, 前後の平行な2本の弧に対応する色は同じである. (図6参照)

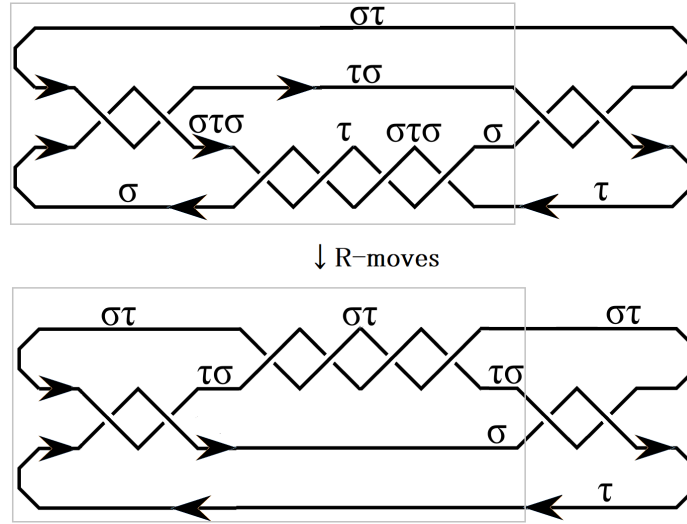
図 6: $2b_i$ での色の現れ方

つまり $2a_i$ の振る舞いについてのみ考えれば良いことがわかる. ここで $2a_i$ は偶数であることから, $2a_i$ での色の現れ方は図7またはその半分 ($\tau, \tau\sigma$ まで) の繰り返しである.

図 7: $2a_i$ での色の現れ方

このとき現れる色は常に $\{\sigma, \tau, \sigma\tau, \tau\sigma\}$ の4色であり, $2a_{m+1}$ と $C(x) = \sigma$ が矛盾なく彩色できているとすると $\sum_{i=1}^{m+1} |a_i| \equiv 0 \pmod{2}$ が得られる.

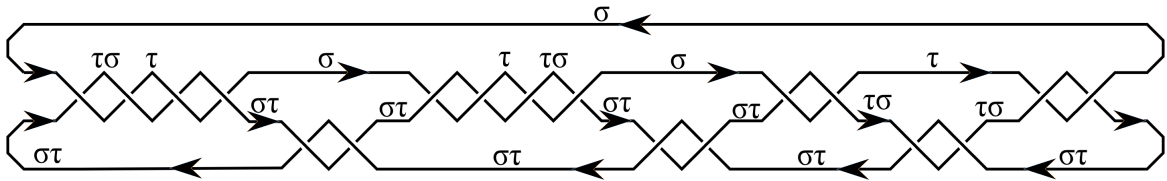
(ii) 一方で, ある2橋絡み目 L が $(S_3, 4)$ -彩色可能であるとき, L の $(S_3, 4)$ -彩色された図式 D をコンウェイ図式に変形することを考える. このとき図6の弧 x の位置に対応する色 $C(x)$ が $C(x) \in \{\sigma, \tau, \sigma\tau\}$ となるようにする. 得られたコンウェイ図式において $C(x) \in \{\sigma\tau, \tau\sigma\}$ であった場合も, 図8のように変形可能である.

図 8: $C(x) \in \{\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma\}$ への変形

このとき得られたコンウェイ図式が $\sum_{i=1}^{m+1} |a_i| \equiv 0 \pmod{2}$ を満たしていないとすると, 図7より $(S_3, 4)$ -彩色不可能となり矛盾. よって必ず $(S_3, 4)$ -彩色可能であるような 2 橋絡み目は $\sum_{i=1}^{m+1} |a_i| \equiv 0 \pmod{2}$ を満たすコンウェイ図式をもつ.

次に $(S_3, 5)$ -彩色可能な 2 橋絡み目が $(S_3, 4)$ -彩色可能であることを示す.

ある 2 橋絡み目 L が $(S_3, 5)$ -彩色可能であるときも同様にコンウェイ図式に変形することを考える. 補題1より, ある $(S_3, 5)$ -彩色が与えられた L の図式は, ライデマイスター変形を行っても常に 4 色以上現れる S_3 -彩色を許容し, さらに $\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma$ のいずれかの色に対応した弧を常にもつ. よって図8のように $C(x)$ が $\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma$ のいずれかとなるように変形を行うと, 図6,7より現れる色は 4 色. よって L は $(S_3, 4)$ -彩色可能となる. $\square$

図 9: $(S_3, 4)$ -彩色をもつコンウェイ図式 $C(4, -2, -4, 2, 2, -2, -2)$ ($\sigma = (1\ 2), \tau = (2\ 3)$)

3. S_3 -最小彩色数

$n \geq 3$ に対して絡み目 L が (S_3, n) -彩色可能であるとき, そのような n の最小値を L の S_3 -最小彩色数と呼ぶことにする. 定理1より, 2 橋絡み目については $(S_3, 5)$ -彩色可能であれば $(S_3, 4)$ -彩色可能であることがわかる. しかし一般に $(S_3, 4)$ -彩色可能であっても, $(S_3, 3)$ -彩色可能であるかどうかは知られていない. つまり $(S_3, 4)$ -彩色可能であるからといって最小彩色数が決定するとは限らない.

今回, とくにダブルツイスト絡み目 $J(k, l)$, トーラス絡み目 $T(2, q)$ について次のことを示すことができた. (ただし $k, l, q \neq 0$ とする.)

定理 2. ダブルツイスト絡み目 $J(k, l)$ の S_3 -最小彩色数が 4 である (つまり $(S_3, 4)$ -彩色可能であるが $(S_3, 3)$ -彩色可能でない) ための必要十分条件は $kl \equiv 3 \pmod{4}$ かつ, $kl \not\equiv 2 \pmod{3}$ である.

証明. まず $kl \equiv 3 \pmod{4}$ かつ, $kl \not\equiv 2 \pmod{3}$ であるときに, $(S_3, 4)$ -彩色可能であるが $(S_3, 3)$ -彩色可能でないことを示す.

図 10 のようなダブルツイスト絡み目 $J(k, l)$ の図式 D を考える.

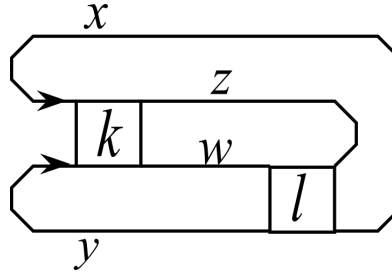


図 10: ダブルツイスト絡み目 $J(k, l)$ の図式

(i) $kl \equiv 3 \pmod{4}$ のときまず $(S_3, 4)$ -彩色可能であることを示す. 補題 1 より D には $\{\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma\}$, $\{\sigma\tau\sigma\}$ からそれぞれ 2 色ずつ表れている. そこで図 10 の弧 x, y に対応する色を $C(x) = \sigma, C(y) = \sigma\tau$ とする. $kl \equiv 3 \pmod{4}$ より k, l はともに奇数. $(C(z), C(w))$ は $k \equiv 1 \pmod{4}$ のとき $(\tau\sigma, \sigma)$, または $k \equiv 3 \pmod{4}$ のとき $(\sigma\tau, \tau)$ である.

$k \equiv 1 \pmod{4}$ のとき, $(C(x), C(y), C(z), C(w)) = (\sigma, \sigma\tau, \tau\sigma, \sigma)$ として $l \equiv 3 \pmod{4}$ であるとき矛盾なく彩色することができる. またこのとき $\sigma\tau\sigma$ は現れない.

同様に $k \equiv 3 \pmod{4}$ のときも, $(C(x), C(y), C(z), C(w)) = (\sigma, \sigma\tau, \sigma\tau, \tau)$ として $l \equiv 1 \pmod{4}$ のとき矛盾なく彩色でき, $\sigma\tau\sigma$ は現れない. よって $kl \equiv 3 \pmod{4}$ のとき $(S_3, 4)$ -彩色可能である.

一方, $kl \not\equiv 2 \pmod{3}$ であるときに $(S_3, 3)$ -彩色可能でないことを示す. 補題 1 より D が $(S_3, 3)$ -彩色可能であるならば $\{\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma\}$ の 3 色が現れている. $C(x) = \sigma, C(y) = \tau$ とする. $(C(z), C(w))$ は $k \equiv 0 \pmod{3}$ のとき (σ, τ) , $k \equiv 1 \pmod{3}$ のとき $(\sigma\tau\sigma, \sigma)$, $k \equiv 2 \pmod{3}$ のとき $(\tau, \sigma\tau\sigma)$ である.

$k \equiv 0 \pmod{3}$ のとき, $C(w) = C(y) = \tau \neq \sigma = C(z)$ より任意の l に対して $(S_3, 3)$ -彩色可能でない. $k \equiv 1 \pmod{3}$ のとき, $C(z) = \sigma\tau\sigma, C(w) = \sigma$ より, $l \equiv 2 \pmod{3}$ で $(S_3, 3)$ -彩色可能. $k \equiv 2 \pmod{3}$ のとき, $C(z) = \tau, C(w) = \sigma\tau\sigma$ より, $l \equiv 1 \pmod{3}$ で $(S_3, 3)$ -彩色可能. つまり $kl \not\equiv 2 \pmod{3}$ のとき $(S_3, 3)$ -彩色可能でない.

(ii) 次に $(S_3, 4)$ -彩色可能であるが $(S_3, 3)$ -彩色可能でないときに $kl \equiv 3 \pmod{4}$ かつ, $kl \not\equiv 2 \pmod{3}$ となることを示す.

図10で表される $J(k, l)$ の図式 D が $(S_3, 4)$ -彩色されているとする. 補題1より $J(k, l)$ は2成分の絡み目であり, $C(x) \in \{\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma\}$, $C(y) \in \{\sigma\tau, \tau\sigma\}$, または $C(x) \in \{\sigma\tau, \tau\sigma\}$, $C(y) \in \{\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma\}$ として良い. これより k, l はともに奇数. このとき $C(x) \in \{\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma\}$, $C(y) \in \{\sigma\tau, \tau\sigma\}$ とすると, $(S_3, 4)$ -彩色されていることから (i) と同様に $kl \equiv 3 \pmod{4}$ が得られる. $C(x) \in \{\sigma\tau, \tau\sigma\}$, $C(y) \in \{\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma\}$ としても同様.

また $(S_3, 3)$ -彩色されているとする. このとき補題1より $C(x), C(y) \in \{\sigma, \tau, \sigma\tau\sigma\}$ であり, 矛盾なく彩色されていることから $kl \equiv 2 \pmod{3}$ が得られる. よって $(S_3, 4)$ -彩色可能であるが $(S_3, 3)$ -彩色可能でないならば $kl \equiv 3 \pmod{4}$ かつ, $kl \not\equiv 2 \pmod{3}$ である. $\square$

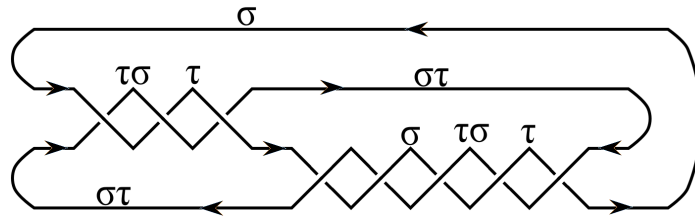


図 11: $(S_3, 4)$ -彩色がされているダブルツイスト絡み目 $J(3, 5)$ の図式

定理 3. トーラス絡み目 $T(2, q)$ の S_3 -最小彩色数が4である (つまり $(S_3, 4)$ -彩色可能であるが $(S_3, 3)$ -彩色可能でない) ための必要十分条件は $q \equiv 0 \pmod{4}$ かつ $q \not\equiv 0 \pmod{3}$ である.

証明. $T(2, q)$ は, $q \equiv 0 \pmod{4}$ のとき, 図7より, $(S_3, 4)$ -彩色可能. 一方 $q \equiv 0 \pmod{3}$ であるときに $(S_3, 3)$ -彩色可能であるので. よって $q \equiv 0 \pmod{4}$ かつ $q \not\equiv 0 \pmod{3}$ のとき, つまり $(S_3, 4)$ -彩色可能であるが $(S_3, 3)$ -彩色可能でない.

また, 同様にして $(S_3, 4)$ -彩色可能ならば $q \equiv 0 \pmod{4}$, $(S_3, 3)$ -彩色可能ならば $q \equiv 0 \pmod{3}$ が得られるので, $(S_3, 4)$ -彩色可能であるが $(S_3, 3)$ -彩色可能でないならば, $q \equiv 0 \pmod{4}$ かつ $q \not\equiv 0 \pmod{3}$ となる. $\square$

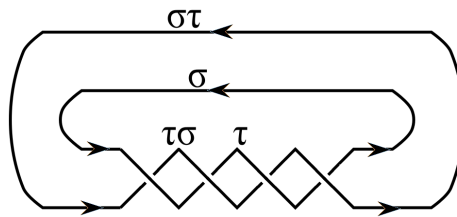


図 12: $(S_3, 4)$ -彩色がされているトーラス絡み目 $T(2, 4)$ の図式

参考文献

- [1] R. H. Fox, A quick trip through knot theory, in *Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961)*, 120–167, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [2] A. Kawauchi, A survey of knot theory, in *Birkhauser Verlag, Basel, 1996*