

ハンドル体結び目の結び目解消数と交点数の 関係について

秋本 裕太 (早稲田大学)*¹

この報告は 2020 年 12 月 23 日（水）から 26 日（土）までオンラインで開催された研究集会「結び目の数理Ⅲ」における表題の講演内容をまとめたものです。（証明の細部等は [1] にて発表予定です）世話人の新國 亮 先生、大山 淑之 先生に厚く御礼申し上げます。

1. ハンドル体結び目

1.1. ハンドル体結び目の結び目解消数

3 次元球体 $\mathbb{B}^3$ に n 個の 1-ハンドル $\mathbb{D}^2 \times I$ を付けて得られる向き付け可能 3 次元多様体を 種数 n のハンドル体と呼ぶ。ハンドル体の $\mathbb{R}^3$ への埋め込みの像を ハンドル体結び目と呼ぶ。2 つのハンドル体結び目 H_1 と H_2 が 同値 であるとは、向きを保つ $\mathbb{R}^3$ の自己同相写像で一方が他方に写ることである。ハンドル体結び目が 自明 であるとは、交点を持たないダイアグラムによって表されるハンドル体結び目と同値であることをいう。ハンドル体結び目の交差交換とは、スパインの空間 3 価グラフの交差交換のことであり、図 1 のような変形である。

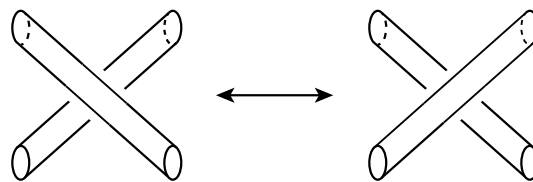


図 1

任意のハンドル体結び目は図 2 の 3 価グラフの空間埋め込みをスパインとして持つ。図 2 のグラフは trivializable [8] であるから、次の命題が得られる。

命題 1.1. [5] 任意のハンドル体結び目は有限回の交差交換によって自明なハンドル体結び目に移る。

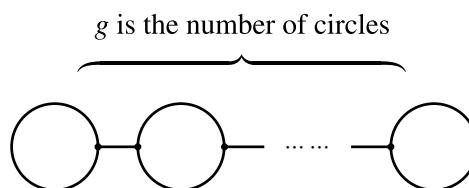


図 2

*¹ 〒169-8050 新宿区西早稲田 1-6-1 早稲田大学 大学院教育学研究科. E-mail: motyanojika@gmail.com

よってハンドル体結び目の結び目解消数と交点数を次のように定義できる。

定義 1.2. H : ハンドル体結び目

$u(H)$: H が自明なハンドル体結び目に移るために必要な交差交換の最小回数

定義 1.3. H : ハンドル体結び目

$c(H) := \min\{c(D) \mid D : H \text{ と同値なハンドル体結び目のダイアグラム}\}$

命題 1.1 より強い次の命題が得られている。

命題 1.4. [5] 任意のハンドル体結び目の任意のダイアグラムについて、ダイアグラム上のいくつかの交点の上下を入れ替えることで自明なハンドル体結び目のダイアグラムを得ることが出来る。

この命題は [7, Proposition 3.2] の証明から得られる。命題 1.4 からハンドル体結び目のダイアグラムの結び目解消数を次のように定義できる。

定義 1.5. D : ハンドル体結び目のダイアグラム

$u(D)$: D が自明なハンドル体結び目のダイアグラムに移るために必要な上下を入れ替える交点の個数の最小値

任意の trivializable なグラフの任意の空間埋め込み f に対して、 $u(f) \leq \frac{c(f)}{2}$ が成立する [2]。同様にして命題 1.4 から任意のハンドル体結び目 H は $u(H) \leq \frac{c(H)}{2}$ を満たすことが分かる。

1.2. 主結果

古典的結び目の結び目解消数と交点数の関係について、次の定理が証明されている。

定理 1.6. 自明でない任意の結び目 K は $u(K) \leq \frac{c(K) - 1}{2}$ を満たす。

定理 1.7. [9] 結び目 K に対して、以下は同値

$$(1) u(K) = \frac{c(K) - 1}{2}$$

(2) K : $(2, p)$ 型トーラス結び目 (p : ± 1 でない奇数、図 3 とその鏡像)

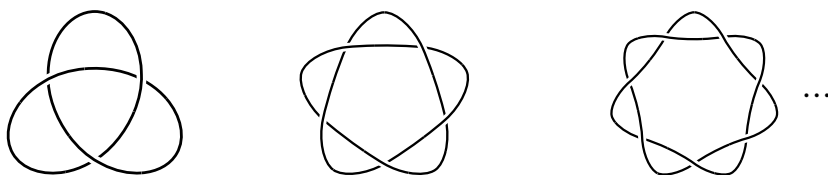


図 3

ハンドル体結び目の結び目解消数と交点数の関係について以下の定理を証明した。

定理 1.8. 自明でない任意のハンドル体結び目 H は $u(H) \leq \frac{c(H) - 1}{2}$ を満たす。

種数が 1 のハンドル体結び目を考えることは結び目を考えることと同じであるから、これは定理 1.6 の拡張である。

定理 1.9. 種数が n ($n \geq 2$) のハンドル体結び目 H に対して、以下は同値。

$$(1) u(H) = \frac{c(H) - 1}{2}$$

(2) H : 図 4 で表されるハンドル体結び目

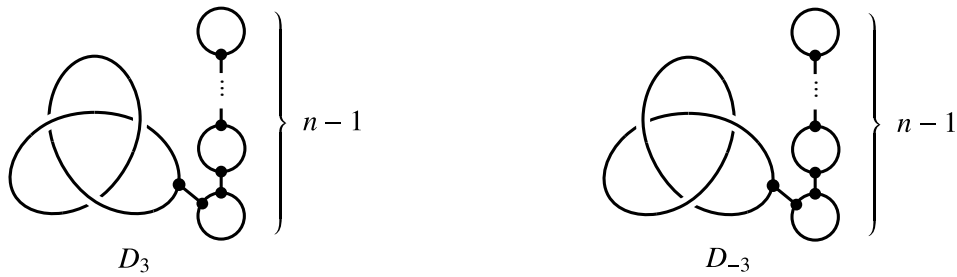


図 4

種数が 1 のハンドル体結び目 H が $u(H) = \frac{c(H) - 1}{2}$ を満たすのは、定理 1.7 より H が $(2, p)$ 型トーラス結び目 ($p: \pm 1$ でない奇数) の正則近傍であるときである。

2. 主結果の証明

$\tilde{f}: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ を G の正則射影、 $V(G)$ 、 $E(G)$ をそれぞれ G の頂点全ての集合、 G の辺全ての集合とする。 G の辺の部分集合で閉区間と同相なものを **arc** という。 $\tilde{f}$ の arc への制限写像が単射であるとき、その像も **arc** という。 $\tilde{f}(G)$ の交点 c の上側を通っている arc を c の **over-arc**、 c の下側を通っている arc を c の **under-arc** という。

$c_1, c_2, \dots, c_k$ を $\tilde{f}(G)$ のいくつかの交点とする。 $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ で G を細分したグラフとは $\tilde{f}(v_i) = \tilde{f}(v'_i) = c_i$ であり v_i が c_i の over-arc に含まれ、 v'_i が c_i の under-arc に含まれるように $2k$ 個の頂点 $v_1, v'_1, v_2, v'_2, \dots, v_k, v'_k$ を加えて G を細分したグラフをいう ($i = 1, 2, \dots, k$)。このとき v_i を c_i の **over-vertex**、 v'_i を c_i の **under-vertex** という。

T を G の全域木としたとき、任意の $v, u \in V(G)$ に対して $d_T(v, u)$ は T 上の v と u を繋ぐ道の辺の数を表す。

2.1. 証明に用いる補題

主結果の証明には次の補題を用いる。

補題 2.1. D を自明でないハンドル体結び目のダイアグラム、 $\tilde{f}: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ を D の交点の上下の情報を忘れて得られる 3 価グラフ G の正則射影とする。 $c_1, c_2, \dots, c_k$ を $\tilde{f}(G)$ のい

くつかの交点、 G' を $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ で G を細分したグラフとし、 $v_1, v'_1, v_2, v'_2, \dots, v_k, v'_k$ を v_i が c_i の over-vertex、 v'_i が c_i の under-vertex であるような G' の頂点とする。

任意の $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ に対して、 $d_T(v, v_i) = d_T(v, v'_i)$ を満たす G' の頂点 v と全域木 T が取れるならば、 $u(D) \leq \frac{c(D) - k}{2}$ を満たす。

証明. 以下の証明は [7, Proposition 3.2] の証明の類似である。任意の $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ に対して、 $d_T(v, v_i) = d_T(v, v'_i)$ を満たす G' の頂点 v と全域木 T を 1 つ取って固定する (図 5)。 $h : G' \rightarrow \mathbb{R}$ を次の 3 つの条件を満たす連続関数とする。

- (1) 任意の $u \in V(G')$ に対して、 $h(u) = -d_T(v, u)$
- (2) 任意の $e \in E(G')$ に対して、 $h|_e$ は単射
- (3) 任意の $e' \in E(G' - T)$ に対して、 $h|_{e'}$ は最小値を 1 つだけ持つ。



図 5

(1) から h を任意の $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ に対して $h(v_i) > h(v'_i)$ を満たすように少し変えて取り直すことができる。 $\tilde{f}(G)$ の交点に上下の情報を加えて、 $p_1 \circ f = \tilde{f}$ と $p_2 \circ f = h$ を満たす G の空間埋め込み $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ のダイアグラム D' を得る (図 6)。($p_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 、 $p_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ はそれぞれ第 1 成分、第 2 成分への射影を表す。) $f(T)$ を v から遠い辺から順に v に向かって edge contraction していくと自明なブーケが得られるため、 D' は自明なハンドル体結び目を表す (図 7)。

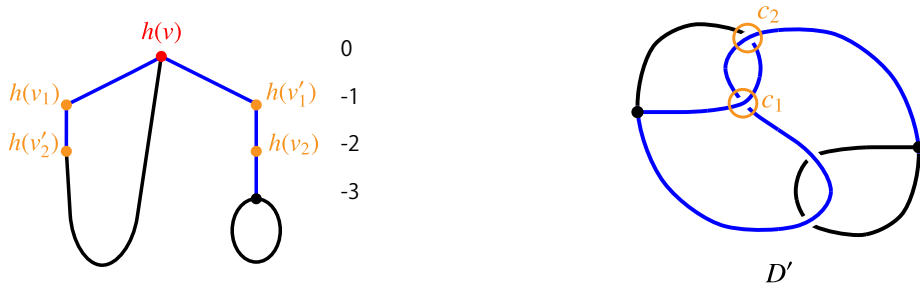


図 6



図 7

D'' を D' の $c_1, c_2, \dots, c_k$ を除いた全ての交点の上下を入れ替えたダイアグラムとする。 $h' := -h$ とする。 h' を任意の $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ に対して $h'(v_i) > h'(v'_i)$ を満たすように少し変えて取り直す。このとき D'' は $p_1 \circ f' = \tilde{f}$ と $p_2 \circ f' = h'$ を満たす G の空間埋め込み $f' : G \rightarrow \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ を表す (図 8)。 $f'(G)$ も $f(G)$ と同様に、 $f'(T)$ の辺を edge contraction することで自明なブーケが得られるため D'' も自明なハンドル体結び目を表す。

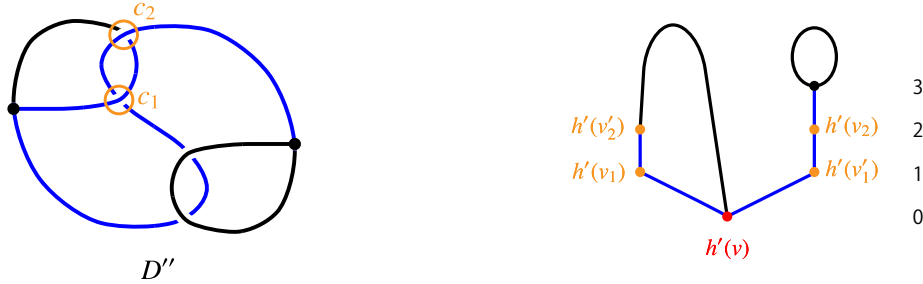


図 8

D から D' へ移るために上下を入れ替えた交点の個数を α 、 D から D'' へ移るために上下を入れ替えた交点の個数を β とすると、 $c(D) = \alpha + \beta + k$ であるから

$$u(D) \leq \min\{\alpha, \beta\} = \min\{\alpha, (c(D) - \alpha) - k\} \leq \frac{c(D) - k}{2}$$

□

2.2. 定理 1.8 の証明

証明. D を H の最小交点図とし、 $\tilde{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ を D のすべての交点の上下の情報を忘れて得られる 3 価グラフ G の正則射影とする。 c を $\tilde{f}(G)$ の交点とし、 G' を c で G を細分したグラフ、 v_1, v'_1 をそれぞれ c の over-vertex、 under-vertex とする。必要に応じてさらに G' を細分することで、 $d_T(v, v_1) = d_T(v, v'_1)$ を満たす頂点 v と G' の全域木 T が取れる。補題 2.1 より、 D は $u(D) \leq \frac{c(D) - 1}{2}$ を満たす。 $u(H) \leq u(D)$ かつ $c(D) = c(H)$ であるから、 $u(H) \leq \frac{c(H) - 1}{2}$ を得る。 □

2.3. 定理 1.9 の証明

補題 2.2. 任意のハンドル体結び目 H の任意の最小交点図 D と D の交点を含む任意のサイクル γ に対し

$u(D) = \frac{c(D)-1}{2}$ ならば γ は以下の 2 つを共に満たす。

(1) D のすべての交点は γ の自己交差である。

(2) $\gamma: (2, p)$ 型トーラス結び目の最小交点図 ($p: \pm 1$ でない奇数)。

証明. γ 上にある D の交点を単に γ の交点ということにする。 γ の交点が 1 つのみで γ の自己交差が存在しないとする。このとき図 9 のように同じハンドル体結び目を表し $c(D') = c(D) - 1$ を満たすダイアグラム D' が取れる。また γ の交点が 1 つのみでそれが γ の自己交差であるとする、同様に同じハンドル体結び目を表す $c(D') = c(D) - 1$ を満たすダイアグラム D' が取れる。これらは D が最小交点図であることに矛盾する。よって以降では $c(D) > 1$ とする。

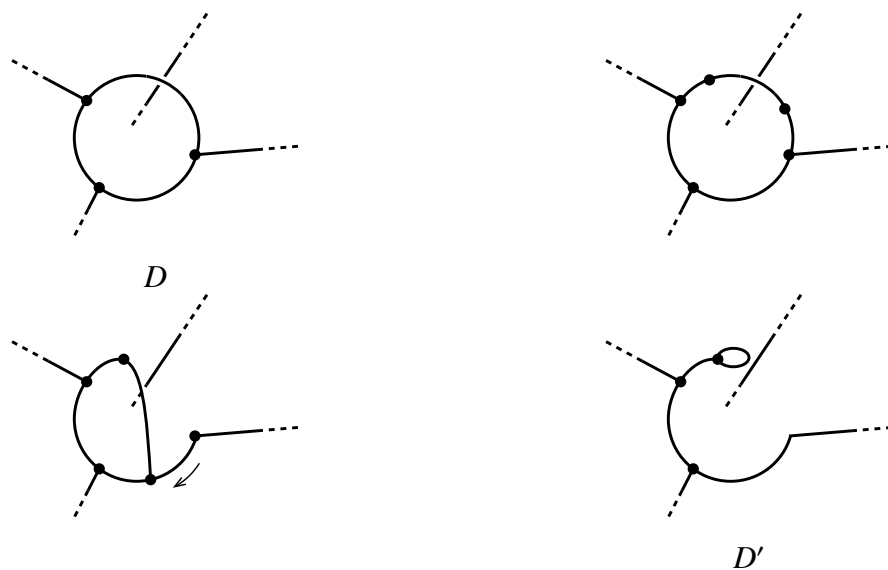


図 9

$\tilde{f}: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ を D の交点の上下の情報を忘れて得られる 3 価グラフ G の正則射影とする。初めに D が (1) を満たさないならば、 $u(D) \leq \frac{c(D)-2}{2}$ であることを示す。

主張 1. γ の交点の 1 つ c_1 が γ と $D - \gamma$ による交点であり、もう 1 つの γ の交点 c_2 が γ の自己交差であるならば $u(D) \leq \frac{c(D)-2}{2}$ 。

証明. G' を $\{c_1, c_2\}$ で G を細分したグラフとする。 v_i, v'_i をそれぞれ c_i の over-vertex、under-vertex とする ($i = 1, 2$)。このとき G' は図 10 の 2 つのどちらかである。

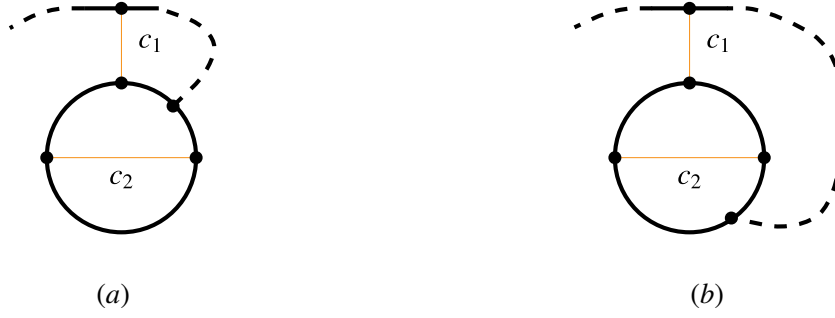


図 10

必要に応じて G' をさらに細分することで、任意の $i \in \{1, 2\}$ に対して $d_T(v, v_i) = d_T(v, v'_i)$ を満たす頂点 v と全域木 T が取れる。例えば図 10 (a) の場合は図 11 のように取れる。補題 2.1 より $u(D) \leq \frac{c(D)-2}{2}$ 。

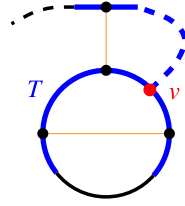


図 11

□

主張 2. γ の交点のうちの 2 つ c_1, c_2 が γ と $D - \gamma$ による交点であるならば $u(D) \leq \frac{c(D)-2}{2}$ 。

証明. G' を $\{c_1, c_2\}$ で G を細分したグラフとし、 v_i, v'_i をそれぞれ c_i の over-vertex、under-vertex とする ($i = 1, 2$)。任意の $i \in \{1, 2\}$ に対して主張 1 と同様に $d_T(v, v_i) = d_T(v, v'_i)$ を満たす全域木 T と頂点 v が取れる。補題 2.1 より $u(D) \leq \frac{c(D)-2}{2}$ 。 □

主張 3. $D - \gamma$ の自己交差 c_1 が存在するならば $u(D) \leq \frac{c(D)-2}{2}$ 。

証明. 主張 2 より γ は自己交差 c_2 を持つと仮定してよい。 G' を $\{c_1, c_2\}$ で G を細分したグラフとし、 v_i, v'_i をそれぞれ c_i の over-vertex、under-vertex とする ($i = 1, 2$)。任意の $i \in \{1, 2\}$ に対して主張 1 と同様に $d_T(v, v_i) = d_T(v, v'_i)$ を満たす全域木 T と頂点 v が取れる。補題 2.1 より $u(D) \leq \frac{c(D)-2}{2}$ 。 □

以上より、 D は (1) を満たす。

主張 4. γ の交点の上下の情報を忘れて得られる正則射影が $(2, p)$ 型トーラス結び目の標準射影図でないとき $u(D) \leq \frac{c(D)-2}{2}$.

証明. $C(D)$ を D の交点全ての集合とし、 G' を $C(D)$ で G を細分したグラフとする。 γ が $\tilde{f}(\Gamma)$ から得られるような G' のサイクルを Γ とする。もし $\tilde{f}(\Gamma)$ が $(2, p)$ 型トーラス結び目の標準射影図 ($p: \pm 1$ でない奇数) であるならば、 γ の 2 つの交点の組はいずれも parallel ではない (図 12)。[3, Theorem 1] よりその逆も成立する ([4, Theorem 1.11 の証明] も参照)。



図 12

よって γ には parallel な 2 つの交点 c_1, c_2 が存在し、 Γ は図 13 (a) のようになる。必要に応じて Γ をさらに細分することで、任意の $i \in \{1, 2\}$ に対して $d_T(v, v_i) = d_T(v, v'_i)$ を満たす頂点 v と全域木 T が図 13 (b) のように取れる。補題 2.1 より $u(D) \leq \frac{c(D)-2}{2}$ 。



図 13

□

最後に $u(D) = \frac{c(D)-1}{2}$ を満たすならば、 $u(\gamma) = u(D)$ かつ γ が $(2, p)$ 型トーラス結び目の最小交点図であることを示す。

$C(D)$ を D の交点全ての集合とし、 G' を $C(D)$ で G を細分したグラフとする。 γ が $\tilde{f}(\Gamma)$ から得られるような G' のサイクルを Γ とする。これまでの議論から $\tilde{f}(\Gamma)$ は図 12 (a) のように $(2, p)$ トーラス型結び目の標準射影図であり、 $c(\gamma) = c(D) = p$ である。 $\tilde{f}(\Gamma) \setminus C(D)$ の異なる成分を繋ぐ道 P が存在する場合、 γ を P を含むサイクルに取り直すことでこれまでの議論に帰着して $u(D) \leq \frac{c(D)-2}{2}$ が成立する (図 14)。



図 14

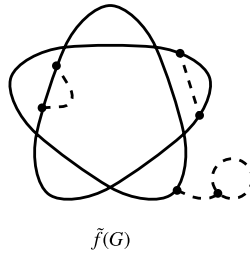


図 15

よって $\tilde{f}(G)$ にはこのような道はないとしてよい (図 15)。よって $u(D) \leq u(\gamma)$ である。
 $c(\gamma) = c(D)$ と $u(D) = \frac{c(D)-1}{2}$ より、 $u(\gamma) = \frac{c(\gamma)-1}{2}$ が得られる。定理 1.7 より、 γ は
 $(2, p)$ 型トーラス結び目の最小交点図である。 $\square$

定理 1.9 の証明. H を $u(H) = \frac{c(H)-1}{2}$ を満たすハンドル体結び目とし、 D を H の最小
 交点図とする。このとき $u(H) \leq u(D)$ かつ $c(D) = c(H)$ であるから $u(D) \geq \frac{c(D)-1}{2}$ を満
 たす。定理 1.8 の証明から $u(D) \leq \frac{c(D)-1}{2}$ であり、 $u(D) = \frac{c(D)-1}{2}$ が成立する。補題
 2.2 より、 D は図 16 のいずれかのダイアグラムで表されるハンドル体結び目を表す。

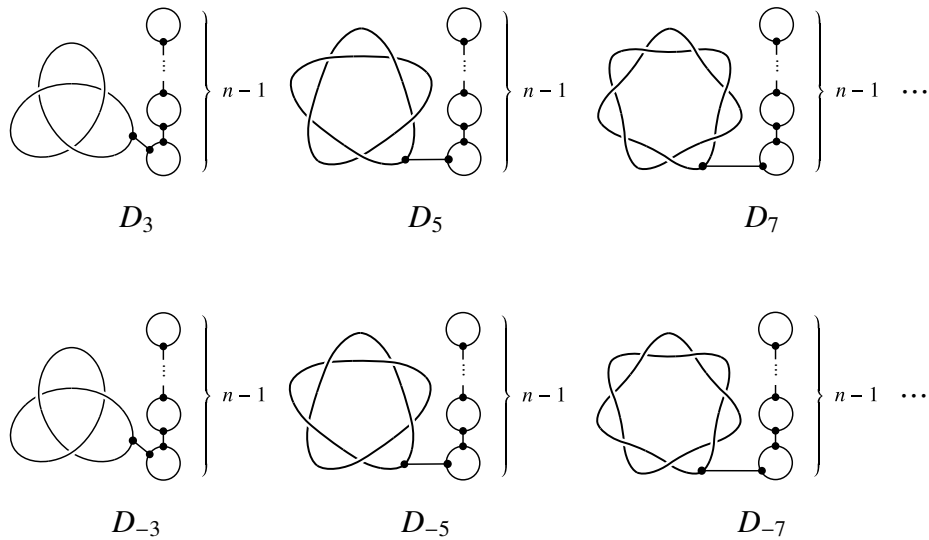


図 16

図 17 の右側のハンドル体結び目のダイアグラムは点線で囲まれた部分が $(2, p)$ 型トールス結び目にその unknotting tunnel をつけた形であるため、全体も自明なハンドル体結び目を表している ([6, Proposition 3.1] を参照)。よって D_{2n+1} で表されるハンドル体結び目の結び目解消数は全て 1 である。よって $u(H) = \frac{c(H)-1}{2}$ を満たすハンドル体結び目 H は D_3 もしくは D_{-3} で表されるハンドル体結び目のみである。 $\square$

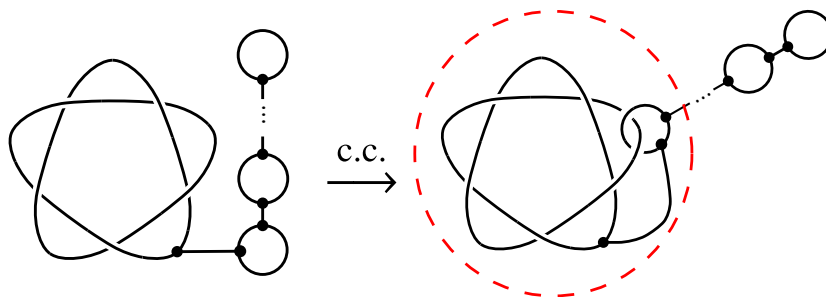


図 17

参考文献

- [1] Yuta Akimoto, On inequalities between unknotting numbers and crossing numbers of spatial embeddings of trivializable graphs and handlebody-knots, *in preparation*.
- [2] Yuta Akimoto and Kouki Taniyama, Unknotting numbers and crossing numbers of spatial embeddings of a planar graph, *to appear in J. Knot Theory Ramif.*
- [3] C. H. Dowker and Morwen B. Thistlethwaite, Classification of knot projections, *Topology Appl.*, 16(1):19–31, 1983.
- [4] Ryo Hanaki, Pseudo diagrams of knots, links and spatial graphs, *Osaka J. Math.*, 47(3):863–883, 2010.
- [5] Masahide Iwakiri, Unknotting numbers for handlebody-knots and Alexander quandle colorings, *J. Knot Theory Ramifications*, 24(14):1550059, 13, 2015.
- [6] Tsuyoshi Kobayashi, A criterion for detecting inequivalent tunnels for a knot, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 107(3):483–491, 1990.
- [7] Ryo Nikkuni, Makoto Ozawa, Kouki Taniyama, and Yukihiro Tsutsumi, Newly found forbidden graphs for trivializability, *J. Knot Theory Ramifications*, 14(4):523–538, 2005.
- [8] Kouki Taniyama, Knotted projections of planar graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123(11):3575–3579, 1995.
- [9] Kouki Taniyama, Unknotting numbers of diagrams of a given nontrivial knot are unbounded, *J. Knot Theory Ramifications*, 18(8):1049–1063, 2009.