

The third term in lens surgery polynomial

丹下 基生

概要

レンズ空間手術をもつ結び目のアレクサンダー多項式について多くの制限を与える。

1 導入

あるホモロジー球面 Y 内の結び目の K の $p > 0$ をスロープに持つデーン手術がレンズ空間を構成するとき、その結び目を Y のレンズ空間結び目という。ある多項式 $\Delta(t)$ がレンズ空間結び目のアレクサンダー多項式である場合、その多項式を Y 上のレンズ手術多項式という。アレクサンダー多項式は対称化しており、 $\Delta(t) = \Delta(t^{-1})$ を満たすローラン多項式である。アレクサンダー多項式は $\Delta(1) = 1$ であることを満たすので、 $\Delta(t) = \Delta(t^{-1})$ かつ $\Delta(1) = 1$ を満たすローラン多項式はいつでもあるレンズ手術多項式になるわけではない。結び目全体で考えればそのような結び目は存在することは知られている。Ozsváth と Szabó による次のような強い結果が知られている。

定理 1.1 (Ozsváth-Szabó [4]) S^3 上のレンズ手術多項式はある整数の減少列 ($d = n_1 > n_2 > \cdots > n_m > 0$) が存在して、

$$\Delta(t) = (-1)^m + \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} (t^{n_j} + t^{-n_j})$$

を満たす。

このような多項式は、flat かつ alternating と呼ばれる。多項式が **flat** であるということは、その係数の絶対値が 1 以下であることを意味し、**alternating** であるということは、その非ゼロ係数が順に交替的に現れるということである。証明はヒーゴルフレアホモロジーを用い、実際は、レンズ手術多項式を L-空間手術多項式に置き換えることができる。L-空間手術多項式とは正の整数によるデーン手術によって L-空間を構成することができるような結び目のアレクサンダー多項式のことをいう。

では、flat かつ alternating な多項式は一般にレンズ手術多項式になるか？という問題が考えられるが、この問題にも反例がある。Ozsváth-Szabó のレンズ手術多項式の指数を $n_1, n_2, \dots, n_m$ とする。

定理 1.2 (T.[6], Hedden-Watson [3]) S^3 上の L-空間手術多項式は、 $n_2 = n_1 - 1$ である。

この定理から、 $\Delta(t) = t^n - 1 + t^{-n}$ は flat かつ alternating な多項式であるが、この多項式がレンズ手術多項式であるなら $n = 1$ であることが分かる。[5] などをみよ。このようにして flat かつ alternating なレンズ手術多項式はさらに制限される。

ここで、寺垣内氏に以下の問題をご教授いただいた [9]。

問題 1.3 S^3 上のレンズ手術多項式が $\Delta(t) = t^d - t^{d-1} + t^{d-2} + \dots$ を満たすとき、 $\Delta(t) = t^d - t^{d-1} + t^{d-2} - \dots + t^{-d}$ を満たすか？つまり、 $\Delta(t) = \Delta_{T(2,2d+1)}(t)$ を満たすか？

さらに実際このような多項式を持つレンズ空間結び目は $T(2, 2d+1)$ に限られる。このことは Baker [1] によって知られている。今回主定理として次のセクションで提示する定理を示した。

2 主定理

寺垣内氏の主張は正しい。つまり、以下の定理が成り立つ。

定理 2.1 ([7]) S^3 上のレンズ手術多項式

$$\Delta_K(t) = t^d - t^{d-1} + t^{d-2} - \dots$$

のように展開されたとき、 $\Delta_K(t) = \Delta_{T(2,2d+1)}(t)$ となる。

また、多項式が $\Delta(t) = t^d - t^{d-1} + t^{d-2} + \dots + t^{-d}$ となる場合、そのようなレンズ空間手術は $T(2, 2d+1)$ -手術によって得られるパラメータに限られることが知られている [6]。手術のパラメータはのちの章で解説する。この定理によって、レンズ空間多項式が $\Delta_K(t)$ が自明でもある $T(2, 2d+1)$ 多項式でもなければ、レンズ空間多項式は $n \geq 3$ を満たす自然数 n を用いて $\Delta(t) = t^d - t^{d-1} + t^{d-n} - \dots$ と展開できる。ここで、 $n = 3$ の場合を考えよう。以下の定理を用いて次を証明することができる。

定理 2.2 ([8]) S^3 上のレンズ手術多項式が

$$\Delta(t) = t^d - t^{d-1} + t^{d-3} + \dots$$

のように展開されたとき、 $\Delta(t)$ はある 1 以上の整数 n が存在して、以下のうちの 1 つと同じである。

1. $\Delta_{T(3,3n+1)}(t)$
2. $\Delta_{T(3,3n+2)}(t)$
3. $\Delta_{B_n}(t)$

ここで、結び目 B_n は、Berge の分類の $IV_{0,3,n}^{+,-}$ と定義する。このとき、そのパラメータは $(p, k) = (9n+9, 3n+4)$ となる。

$S_{9n+9}^3(IV_{0,3,n}^{+,-}) = L(9n+9, 6n+7)$ である。 $IV_{0,3,1}^{+,-} = Pr(-2, 3, 7)$ である。ここで、 $IV_{u,J,n}^{\epsilon_1, \epsilon_2}$ は、 $p = uk^2 + \epsilon_1 J(k + \epsilon_2)$, $2k - \epsilon_2 = Jn$ となるパラメータを持つ結び目で、 u は自然数、 ϵ_1, ϵ_2 は ± 1 また、 J, n は奇数からなる自然数である。詳しくは [2] をみよ。

定理 2.3 S^3 上のレンズ手術多項式が

$$\Delta(t) = t^d - t^{d-1} + t^{d-3} - t^{d-4} + t^{d-5} - \dots$$

のように展開されたとき、 $\Delta(t) = \Delta_{T(3,5)}(t)$ もしくは $\Delta_{Pr(-2,3,5)}(t)$ となる。またそのときの手術パラメータは、 $(11, 3), (11, 4)$ もしくは $(18, 5), (19, 7)$ である。

$Pr(-2, 3, 7)$ は $(-2, 3, 7)$ -pretzel 結び目のことである。手術パラメータに関しては、次の章で詳しく定義する。この定理により、 $\Delta_{Pr(-2,3,7)}(t)$ の多項式をもつレンズ空間手術のパラメータは $Pr(-2, 3, 7)$ を slope が 18 もしくは 19 によって手術して得られるもののみであることが分かる。また、次を示す。

定理 2.4 S^3 上のレンズ手術多項式が

$$\Delta(t) = t^d - t^{d-1} + t^{d-3} + 0 \cdot t^{d-4} + \dots$$

のように展開されたとき、 $d = 3$ であり、 $\Delta(t) = \Delta_{T(3,4)}(t)$ である。

これらの定理を一般化することができる。

これらの定理をまとめると以下が得られる。

定理 2.5 S^3 上のレンズ手術多項式が

$$\Delta(t) = t^d \sum_{j=0}^{n-1} (t^{-3j} - t^{-3j-1}) + t^{d-3n} - 0 \cdot t^{d-3n-1} + \dots$$

のように展開されたとき、 $d = 3n$ であり、 $\Delta(t) = \Delta_{T(3,3n+1)}(t)$ である。

定理 2.6 S^3 上のレンズ手術多項式が

$$\Delta(t) = t^d \sum_{j=0}^{n-1} (t^{-3j} - t^{-3j-1}) + t^{d-3n} - t^{d-3n-1} + t^{d-3n-2} + \dots$$

のように展開されたとき、 $d = 3n + 1$ もしくは $d = 3n + 2$ であり、それぞれ、 $\Delta(t) = \Delta_{T(3,3n+2)}(t)$ もしくは $\Delta(t) = \Delta_{B_n}(t)$ である。

3 準備

Y をホモロジー球面とし、 $K \subset Y$ があるレンズ空間結び目であるとする。 $Y_p(K) = L(p, q)$ となる正の整数 p を取る。この時、 K の双対結び目 $\tilde{K}$ (デーン手術の時に埋め戻す $S^1 \times D^2$ のコア) を $\tilde{K}$ と書く。 C をレンズ空間の種数 1 のヒーゴール分解のコアとする。このとき $[C]$ と $[\tilde{K}]$ は $H_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ において生成元であるから、

$$[\tilde{K}] = k[C]$$

となるような整数 k が存在する。 (p, k) は互いに素な自然数である。ここで、 C のとり方、 $\tilde{K}$ の向きの入れ方に任意性があるため、 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ における k の取り方として、 $\{k, -k, k^{-1}, -k^{-1}\}$ の最大 4 パターン存在するが、このうち 0 から $p-1$ に簡約した時に最も小さくなるように

k を選ぶ。この時、 (p, k) はレンズ空間手術固有のデータであり、レンズ空間手術パラメータという。

アレクサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ の係数を

$$\Delta_K(t) = \sum_{j=-d}^d a_j t^j$$

のようにおく。また、 $a_{d-j+1} t^{d-j+1}$ を j 番目の項、 a_{d-j+1} を j 番目の係数ということがあ
る。ただし、 a_i は第 i 次係数という。

次に、互いに素な自然数の組 (p, k) に対して、 $k_2 = |[k^{-1}]_p|$ とし、 $q_2 = [k_2^2]_p$ とおく。
ここで、 $[\alpha]_p = a$ は $\alpha \equiv a \pmod{p}$ であり、 $-\frac{p}{2} < a \leq \frac{p}{2}$ を満たす整数とする。0 以上の
整数 m を $kk_2 - e = pm$ として定義されるものとする。ここで、 $e = \pm 1$ である。また、
 $c = (k-1)(k+1-p)/2$ とする。つまり e は $[k^{-1}]_p$ の符号である。また、

$$I_\ell = \begin{cases} \{1, 2, \dots, \ell\} & \ell > 0 \\ \{\ell+1, \dots, -1, 0\} & \ell < 0 \end{cases}$$

として定義する。

$$\alpha_i = -e(m - \#\{j \in I_k | [q_2(j + ki + c)]_p \in I_{ek_2}\})$$

このとき、以下が成り立つ。

命題 3.1 S^3 内のレンズ空間結び目のアレクサンダー多項式の第 i 次係数 a_i は

$$a_i = \alpha_i$$

である。また、 $d < |i| \leq p/2$ の場合、 $\alpha_i = 0$ である。ここで d をアレクサンダー多項式の
次数とする。

A 行列 $(A_{i,j})$ の成分 $A_{i,j}$ を

$$A_{i,j} = \alpha_{k_2(i+jek-c)} = \alpha_{k_2i+j-k_2c}$$

として定義する。この時、 A 行列は無限サイズの行列である。 $dA_{i,j} = A_{i,j} - A_{i-1,j}$ とする。
このとき、

$$dA_{i,j} = \begin{cases} 1 & [q_2i + k_2j] \in I_{-k_2} \\ -1 & [q_2i + k_2j]_p \in I_{k_2} \\ 0 & o/w \end{cases}$$

と計算される。この行列を dA 行列という。

$-d = k_2(i + jek - c) \pmod{p}$ を満たすような i, j をとる。 $A_{i,j}, A_{i,j+1}, \dots, A_{i,j+2d}$ に対応
する成分の和を $D_{i,j}$ とする。これを Alexander box という。Alexander box を下のように
並べて $\cup_{i,j} D_{i+m,j-mk_2}$ を得る。これらの成分の和のことを非ゼロ領域という。図1を見よ。
ここで、 S^3 上の手術を考えている限り、2つの非ゼロ領域は重ならないことに注意してお
く。 $A_{i,j}$ の成分が1のとき、 (i, j) に右向き矢印 $\rightarrow$ をおき、 -1 の場合は左向き矢印 $\leftarrow$ をお
き、0 の時は何も書かない。さらに、 $dA_{i,j} \neq 0$ の近くを考えると、 A の小行列として

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

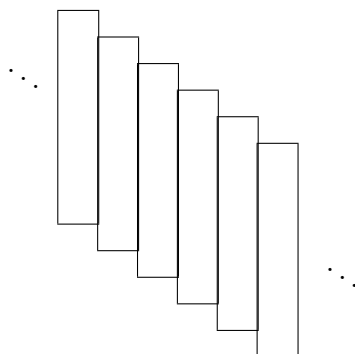


図 1: 非ゼロ領域

のどれかが現れるが、このとき、4つの可能性それぞれに対して非ゼロな成分対応する2つの矢印を下向きに滑らかにつなぐ。このようにして得られる向きづけられた曲線を非ゼロ曲線と呼ぶ。

ここで次の命題を準備しておく。 j 成分とはこの行列の縦の成分であり、 i 成分とは横の成分である。

命題 3.2 ([6]) (p, k) を互いに素な自然数のペアとする。このとき、 (p, k) が S^3 のレンズ空間手術パラメータであるとき、 A 行列の非ゼロ曲線はある非ゼロ領域の中にただ一つだけ含まれ、その向きは j 成分に関して広義減少する。

この定理は、 Y が L -空間ホモロジー球面となるレンズ空間手術で、 $2g(K) \leq p$ の場合に一般化できる。 $2g(K) = p$ の場合は少し修正が必要。

定義 3.3 dA 行列において、 $dA_{i,j} = 1, dA_{i,j+1} = -1$ となる (i, j) と $(i, j+1)$ の成分を dA の $(-1, 1)$ 縦成分という。

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

図 2: dA 行列の $(-1, 1)$ 縦成分

次の命題と補題を準備しておく。

補題 3.4 ([6]) パラメータ (p, k) に対して、 dA 行列に対してある 0 以上の整数 m が存在して、 j 成分で隣り合う 2 つの $-1, 1$ 縦成分の間の 0 の数は $m, m+1$ のどちらかである。

実は、 m は $\lfloor \frac{p}{k_2} \rfloor - 2$ である。

4 証明

4.1 定理 2.1 の証明

Proof. $\Delta(t)$ がレンズ手術多項式である場合、下の左のような非ゼロ曲線が描ける。ここで、この四角で囲まれた成分は非ゼロのひとつの Alexander box である。box の左には曲線が存在しないので、その dA 行列は右のようになる。

もしこの曲線が下の図 3 の左のようにある $s \geq 1$ として s 個の迂回路を通るとすると、 dA 行列は右のようになり、補題 3.4 に反するので、 s 個の迂回路は発生しないことになる。また、このとき、図 4 の $*$ の値がどちらも 0 であるとなると、再び補題 3.4 から矛盾するので $*$ のどちらかは 0 ではない。この成分が通る非ゼロ曲線はこのすぐ右の成分である。よって、 $p = 2k_2 + 1$ もしくは、 $p = 2k_2 + 2$ であることが分かる。ここで、 $p = 2k_2 + 2$ であるとなると、 p は偶数であり、 k_2 と p は互いに素であることから k_2 は奇数である。 $k_2^2 - 1 = (k_2 - 1)(k_2 + 1) = (k_2 - 1)\frac{p}{2} \equiv p \pmod{p}$ である。よって、この手術によって得られるレンズ空間は、 $L(p, 1)$ である。このような結び目は Kronheimer-Mrowka-Ozsváth-Szabó の結果から自明結び目であることが知られている。とくに、 $k = k_2 = 1$ である。これは仮定のような展開を持たない。よって、 $p = 2k_2 + 1$ である。つまり、 $k = 2$ であることが分かる。この場合、[6] から、 $\Delta(t) = \Delta_{T(2, 2d+1)}(t)$ であることが知られており、よって、この定理が成り立つことが分かる。 $\square$

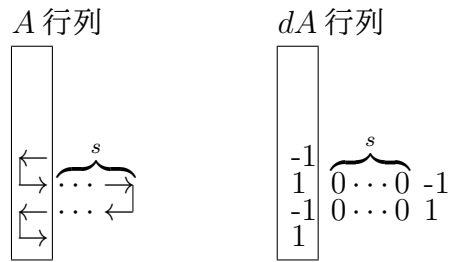


図 3: s 個の迂回路を持つ A 行列とその dA 行列

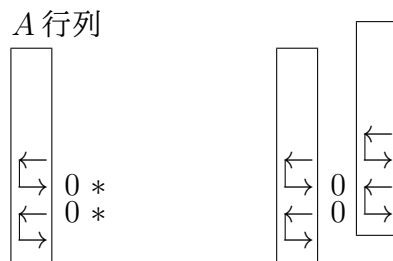


図 4: A 行列

4.2 定理 2.2 の証明

証明を与える前に次の補題を与えておく。

補題 4.1 S^3 上のレンズ手術多項式はある $n \geq 1$ となる整数 n を用いて

$$\Delta(t) = t^d \sum_{j=0}^n (t^{-3j} - t^{-3j-1}) + 0 \cdot t^{d-3n-2} + 0 \cdot t^{d-3n-3} + \dots$$

のように展開することができない。

Proof. 非ゼロ曲線を用いて証明を行う。証明略。

ここで、補題 4.1 と定理 2.4, 定理 2.5, 定理 2.6 を用いて定理 2.2 の証明を与える。

Proof. 次数が d の多項式 $\Delta(t)$ が

$$\Delta(t) = t^d - t^{d-1} + t^{d-3} + \dots$$

のように展開できるローラン多項式で、 $\Delta(t) = \Delta_K(t)$ となる S^3 のレンズ空間結び目が存在するとする。 $\Delta(t)$ の flat かつ alternating の条件から 5 番目の係数は -1 もしくは 0 である。もし 0 であれば、定理 2.4 からこの多項式は $T(3, 4)$ のアレクサンダー多項式であり、そのパラメータは $(p, k) = (11, 3), (13, 3)$ のどちらかである。

5 番目の係数が -1 であるとする。このとき、多項式は

$$\Delta(t) = t^d - t^{d-1} + t^{d-3} - t^{d-4} + \dots$$

となる。 $\Delta(t)$ の flat かつ alternating の条件から 6 番目の係数は 1 もしくは 0 である。6 番目の係数が 1 であるとする、定理 2.6 からそのような手術は $T(3, 5)$ もしくは $IV_{3,1}^- = Pr(-2, 3, 7)$ によって得られる。

6 番目の係数 0 であるとする。このとき、多項式は

$$\Delta(t) = t^d - t^{d-1} + t^{d-3} - t^{d-4} + 0 \cdot t^{d-5} + \dots$$

となる。 $\Delta(t)$ の flat かつ alternating の条件から 7 番目の係数は -1 もしくは 0 である。7 番目の係数が 0 であれば、補題 4.1 からそのような S^3 上のレンズ空間手術は存在しない。

7 番目の係数が -1 であるとする、

$$\Delta(t) = t^d - t^{d-1} + t^{d-3} - t^{d-4} - t^{d-6} + \dots$$

であり、これまでの操作を繰り返すことで、この定理の証明が得られる。

つまり、

$$\Delta(t) = t^d \sum_{j=0}^{n-1} (t^{-3j} + t^{-3j-1}) + t^{d-3n} + \dots$$

と展開できるとき、flat かつ alternating 条件から $a_{d-3n-1} = -1$ もしくは 0 である。 0 ならば $T(3, 3n+1)$ によって得られる場合であり、 -1 であれば、

$$\Delta(t) = t^d \sum_{j=0}^{n-1} (t^{-3j} + t^{-3j-1}) + t^{d-3n} - t^{d-3n-1} + \dots$$

となるが、flat かつ alternating 条件から $a_{d-3n-2} = 1$ もしくは 0 。 $a_{d-3n-2} = 1$ ならば定理 2.6 から $T(3, 3n+2)$ もしくは $IV_-(3, n)$ の手術によって得られる。 $a_{d-3n-2} = 0$ ならば、

$$\Delta(t) = t^d \sum_{j=0}^{n-1} (t^{-3j} + t^{-3j-1}) + t^{d-3n} - t^{d-3n-1} + 0 \cdot t^{d-3n-2} + \dots$$

であり、 $a_{d-3n-3} = 0$ の場合は、補題 4.1 からそのようなレンズ空間手術は存在しない。よって、 $a_{d-3n-3} = 1$ とすると、これは、最初の条件の n に $n+1$ を入れた形になっている。

よって、帰納的にこれを繰り返すことによって、定理が得られることが分かる。□

定理 2.32.42.52.6 の証明が残されたが、これらは、紙面と時間の都合により [8] の方に譲ることにする。しかし、下の図 5 の考察だけしておく。この図の左のように、 $s, t \geq 1$ を用いて迂回路を考えたところ、補題 3.4 と矛盾した状況が発生する。このことから、 $s = t = 0$ とならなければならない。また、図 6 も同様である。これにより、 $p \leq 3k_2 + 3$ であることがわかる。

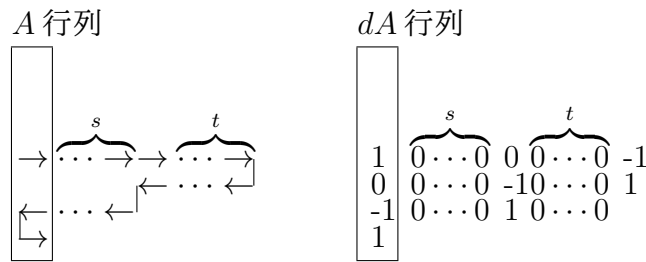


図 5: A-matrix

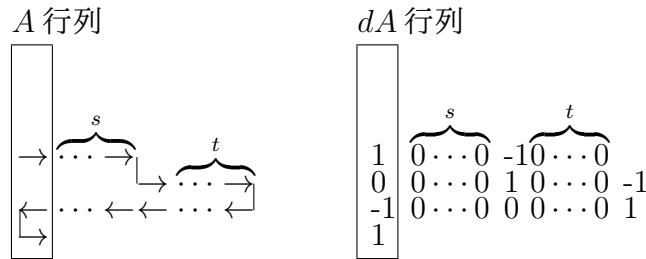


図 6: A-matrix

次の問題として以下が考えられるであろう。それほど難しくないので、チャレンジできる問題と思われる。

問題 4.2 S^3 上のレンズ手術多項式が

$$\Delta(t) = t^d - t^{d-1} + t^{d-4} + \dots$$

と展開されたとき、どのような多項式が現れるか？分類せよ。また、

$$\Delta(t) = t^d - t^{d-1} + t^{d-5} + \dots$$

の場合はどうか？

参考文献

- [1] K. L. Baker, *Small genus knots in lens spaces have small bridge number*, Algebr. Geom. Topol. 6 (2006), 1519–1621.
- [2] J. Berge, *Some knots with surgeries yielding lens spaces*, arXiv:1802.09722.
- [3] M. Hedden and L. Watson, *On the geography and botany of knot Floer homology*, Selecta Math. (N.S.) 24 (2018), no. 2, 997–1037.
- [4] P. Ozsváth, Z. Szabó, *On knot Floer homology and lens space surgeries*, Topology 44 (2005), 1281–1300.
- [5] M. Tange, *Ozsváth-Szabó’s correction term of lens surgery*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 146 (2009), no. 1, 119–134.
- [6] M. Tange, *On the Alexander polynomial of lens space knot*, Topology Appl. 275 (2020), 107124, 37 pp.
- [7] M. Tange, *The third term in lens surgery polynomials*, to appear at Hiroshima Math Journal.
- [8] M. Tange, *The fourth term in lens surgery polynomials*, in preparation.
- [9] M. Teragaito, *private communication*.