4-manifolds admitting simplified $(2, 0)$-trisections with prescribed vertical 3-manifolds

浅野　喜敬 *

概要

Gay-Kirby の trisection は 3 つの 1-ハンドルボディによる 4 次元多様体の分割である．これは閉 4 次元多様体から実 2 次元平面への安定写像（trisection 写像）を構成することにより存在が証明される．本講演では実 2 次元平面上の弧の trisection 写像による引き戻しの定める 3 次元多様体の 6 つの組を調べることで定義域の多様体が向きも込めて決定できることを報告する．

以下 X を滑らかな閉 4 次元多様体とし，滑らかな写像 f に対し $\mathrm{Sing}(f) = \{p \in X \mid p$ は f の特異点$\}$ とする．

1　準備

本節では trisection を導入するための準備を行う．

定義 1. $C^\infty(X^n, Y^m) = \{f : X^n \to Y^m \mid f$ は C^∞ 級写像$\}$ に Whitney 位相を入れ，位相空間とする．$f, g \in C^\infty(X^n, Y^m)$ に対し，ある微分同相写像 $\varphi : X^n \to X^n$, $\psi : Y^m \to Y^m$ が存在して，次が可換であるとき，f と g は右左同値であるという．

$$\begin{array}{ccc} X^n & \xrightarrow{\varphi} & X^n \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ Y^m & \xrightarrow{\psi} & Y^m \end{array}$$

定義 2. $f \in C^\infty(X^n, Y^m)$ について，f のある開近傍 $U_f \subset C^\infty(X^n, Y^m)$ が存在して，任意の $g \in U_f$ に対し f と g が右左同値であるとき f を安定写像と呼ぶ．

例えば，特異値が全て異なる Morse 関数は安定写像である．安定写像は Morse 関数の一般化である．

定義 3. $p \in \mathrm{Sing}(f)$ とする．p における局所座標 (t, x, y, z) が存在して，$f(t, x, y, z) = (t, -x^2 - y^2 + z^2)$ (resp.$f(t, x, y, z) = (t, -x^2 - y^2 - z^2)$) と表せるとき，$p$ を不定値 (resp. 定値) 折り目特異点という．

* 東北大学大学院理学研究科数学専攻, E-mail : nobutaka.asano.r4@dc.tohoku.ac.jp

定義 4. $p \in \mathrm{Sing}(f)$ とする．p における局所座標 (t, x, y, z) が存在して，$f(t, x, y, z) = (t, x^3 - 3xt + y^2 - z^2)$ と表せるとき，p をカスプ特異点という．

定義 5. $p \in \mathrm{Sing}(f)$ のまわりで局所的に複素座標 (z_1, z_2) が X の向きと同調するように存在し，$f(z_1, z_2) = {z_1}^2 + {z_2}^2$ と表せるとき，p を f の Lefschetz 特異点という．

特異値の近傍の正則値上の正則ファイバーを特異ファイバーに近づけることで，正則ファイバーのトポロジーは変化する．その様子を以下に示す．

図 1 左図は不定値折り目特異点の近傍におけるファイバーと特異値を通り過ぎた後のファイバーの形の変化を示したものである．図 1 左図の縦方向の座標が定義 3 における座標 t であり，黒太実線部が f の特異値集合を表している．図 1 左図の横方向の座標は $-x^2 - y^2 + z^2$ と与えられるため，点線の引き戻しに沿って 3 次元 2-ハンドルの接着が行われている．ファイバーの曲面では手術が行われ，図 1 左図のような変化が生じる．このときの 2-ハンドルの接着円周に対応するファイバー上の曲線 (図 1 左図で赤線で示される単純閉曲線) を不定値折り目特異点の消滅サイクルと呼び，値域上の点線を reference path と呼ぶ．定値折り目特異点の場合も同様にして，reference path の引き戻しに沿って 3 次元 3-ハンドルの接着が行われる．また，このとき図 1 右図の横方向の座標は $-x^2 - y^2 - z^2$ で与えられており，特異値はこの関数の最大値である．よって赤線を通過するとファイバーは空集合となり，図 1 右図のような変化が生じる．

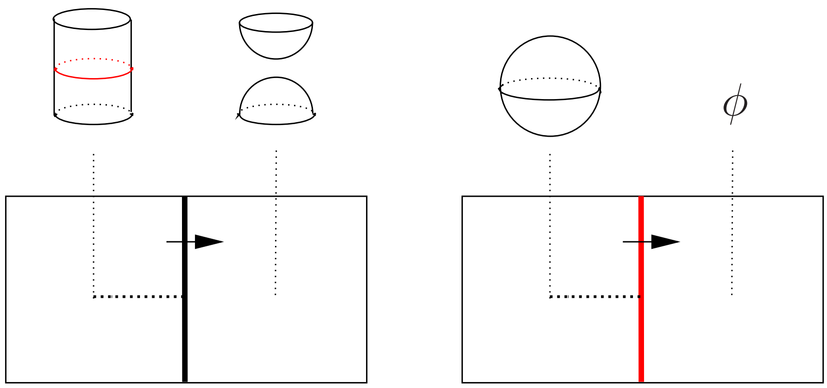

図 1: 折り目特異値の近傍のファイバーの変化の様子．

カスプ特異点の近傍の像は図 2 左図である．黒太線部が特異値集合であり，特異値集合の尖点部では 2 本の不定値折り目特異点の像が接している．図 2 左図の reference path にしたがってファイバーを動かすと不定値折り目特異点の消滅サイクル a, b に沿って 3 次元 2-ハンドルの接着が行われ，ファイバーが D^2 へと変化する．このとき，a と b は幾何学的に 1 度だけ交わる．

Lefshectz 特異点の近傍の像は図 2 右図である．×印が Lefschetz 特異値を表しており，図 2 右図の点線にしたがって正則ファイバーを特異ファイバーに近づけたとき，正則ファイバー上のある単純閉曲線 c が特異ファイバーに近づくにつれて小さくなり，特異ファイバー上では一点に退化している．このときの c を Lefschetz 特異点の消滅サイクルという．

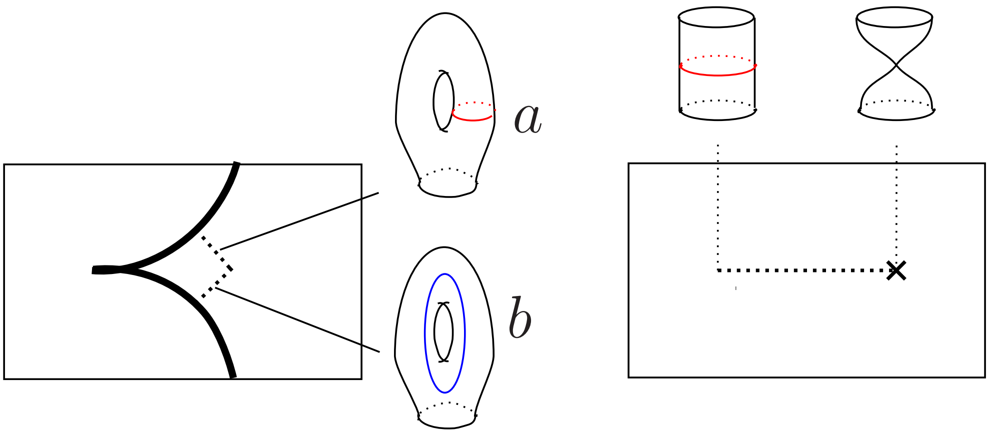

図 2: カスプ特異値・Lefschetz 特異値の近傍のファイバーの様子.

2 4 次元多様体の trisection

4 次元多様体の trisection とは，3 つの 1-ハンドル体による 4 次元多様体の分割であり，4 次元多様体を表示する手法として注目を集めている．この分割は Gay-Kirby により，3 次元多様体の Heegaard 分解の 4 次元版として導入された [4]．Trisection は trisection 図式と呼ばれる曲面上の単純閉曲線の組で書き表すことができ，この表記は Heegaard 図式の類似となっている．また，閉 4 次元多様体から閉曲面への安定写像の理論と深く関係している．Gay-Kirby は論文 [4] において，安定写像の変形を利用して，任意の閉 4 次元多様体が trisection を許容することを証明している．この節では，trisection の定義及び単純な trisection について述べる．

定義 6. 安定写像 $f : X \to \mathbf{R}^2$ の特異値集合が図 3 で与えられるとき，f を (g,k)-trisection と呼ぶ.

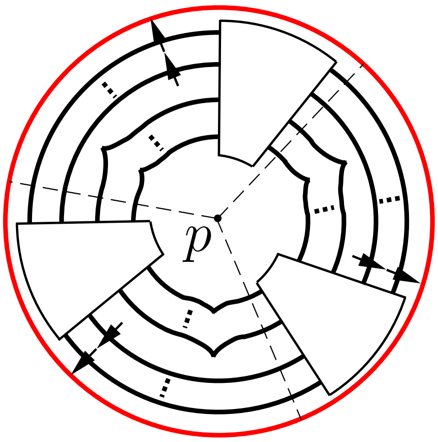

図 3: (g,k)-trisection の特異値集合.

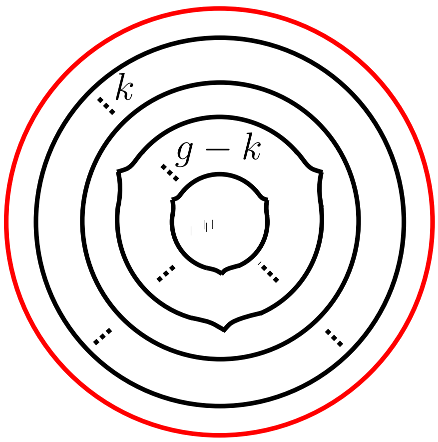

図 4: 単純な (g,k)-trisection の特異値集合.

図 3 の一番外側にある赤い円周は定値折り目特異点の像を表し，内側には不定値折り目特異点やカスプ特異点の像が描かれている．3 つの白い箱の内部は端点どうしが各々 g 本の不定値折り目特

異値のはめ込みにより結ばれている．ただしこれらの像は円板の半径と接する点，n 重点 (n は 3 以上の自然数)，カスプ特異値を持たないとする．白い箱の間では，外側には不定値折り目特異値が k 本あり，内側には 1 つのカスプ特異値が 1 つついた不定値折り目特異値が $g-k$ 本ある．

さらに，図 3 左の中心点 p のファイバー $f^{-1}(p)$ は種数 g の閉曲面 Σ_g と同相である．これは半径方向の reference path に沿って外から内に動いたときの正則ファイバーの変化を調べると，外側から順に，空集合，$S^2, T^2, \ldots, \Sigma_g$ と変化することから従う．

図 4 の白い箱の中の内部の不定値折り目特異点の像が互いに交わらず両側の端点を繋いでいる trisection を単純な trisection と呼ぶ．これは Baykur-Saeki によって導入された [2]．彼らは単純特異 Lefschetz 束に特異点論で用いられる変形操作を用いることで単純な trisection の構成を行った．

定理 7 (Baykur-Saeki [2])**.** Z_f を f の Lefschetz 特異点からなる集合，C_f を f の不定値折り目特異点からなる集合とする．このとき，次の (1)，(2) が成り立つ．

(1) 閉 4 次元多様体 X に対し，$f: X \to S^2$ を，$\#Z_f = k$ かつ C_f の連結成分数は $l \in \{0,1\}$ である単純特異 Lefschetz 束とする．このとき X は単純な $(2g+k-l+2, 2g-l)$-trisection を許容する．

(2) X が単純な (g,k)-trisection を持つとする．このときファイバー連結である directed 特異 Lefschetz 束で種数が $g+2$，かつ，$\sharp Z_f = 3g-3k+4$ であるものが存在する．

単純な (g,k)-trisection の中心のファイバーを Σ として，$\Sigma_{a_1,\ldots,a_{i-1}}$ を Σ に対し，消滅サイクル $a_1, \ldots, a_{i-1}$ に沿って曲面を切り開き，各境界成分に円板を貼ることで得られる曲面とする．また $\mathrm{Mod}(\Sigma_{a_1,\ldots,a_{i-1}}; a_i)$ はその曲面上の曲線 a_i を固定する自己微分同相写像のなす群として，Φ_{a_i} を $\mathrm{Mod}(\Sigma_{a_1,\ldots,a_{i-1}}; a_i)$ から $\mathrm{Mod}(\Sigma_{a_1,\ldots,a_{i-1},a_i})$ への，a_i に沿った手術により定まる自然な写像とする．Hayano は写像類群の観点から単純な trisecion 写像を研究し，モノドロミーの表示を精密化した．主定理の証明には以下の定理の $(g,k)=(2,0)$ の場合を用いた．

定理 8 (Hayano [5])**.** $f: X \to \mathbf{R}^2$ を単純な (g,k)-trisection とし，図 5 のように reference path を与える．$a_1, \ldots, a_h, b_1, \ldots, b_{g-k}, c_1, \ldots, c_{g-k}$ を中心にある正則ファイバー上の消滅サイクルとする．このとき，次が成り立つ．

(1) 各 $i = 0, \ldots, g-k-1$ に対し，$\mu_i \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{a_1,\ldots,a_{i-1}}; a_i)$ を帰納的に

$$\mu_i = \begin{cases} \mathrm{id}_\Sigma & i = 0 \\ \Phi_{a_i}(t_{t_{c_i}(a_i)} \circ \mu_{i-1} \circ t_{t_{b_i}(c'_i)} \circ t_{t_{a_i}(b_i)}) & i > 0 \end{cases}$$

で定義する．ただし $c'_{i+1} = \mu_i^{-1}(c_{i+1})$ である．このとき，μ_i は特異値集合の内側から図 5 のように i 番目の円の少し内側にそれと平行に描いた円に沿ったモノドロミーを表す．

(2) $(a_i, b_i), (a_i, c_i)$ (b_i, c'_{i+1}) はそれぞれただ一度だけ交わる．

(3) 各 $j = g-k, \ldots, g-1$ について，$\Phi_{a_j} \circ \cdots \circ \Phi_{a_{g-k+1}}(\mu_{g-k})$ は a_{j+1} を保つ．

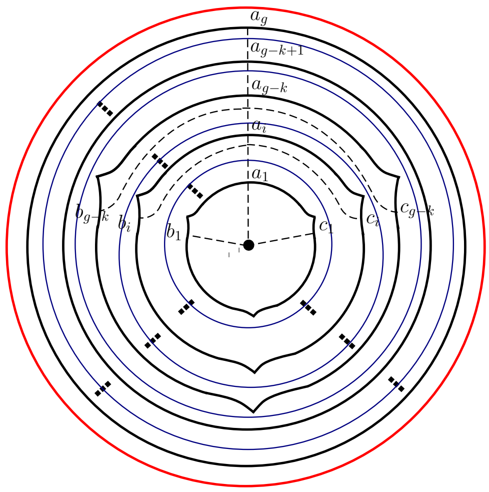

図 5: 単純な (g,k)-trisection のモノドロミー.

逆に，これらの条件を満たす $a_1,\ldots,a_g,b_1,\ldots,b_{g-k},c_1,\ldots,c_{g-k}$ が与えられたとき，上の (1), (2), (3) を実現する 4 次元多様体 X' 及びその上の単純な (g,k)-trisection $f' : X' \to \mathbf{R}^2$ が存在する.

3 主定理

これまでに講演者は，単純な $(2,0)$-trisection の消滅サイクルらの位置をより精密に決定し，図 6 のような弧 γ_{ij} $(i,j \in \{a,b,c\})$ の引き戻しが定める 3 次元多様体の 6 つ組 $\begin{pmatrix} V_{aa} & V_{bb} & V_{cc} \\ V_{ba} & V_{cb} & V_{ac} \end{pmatrix}$ のリストを作成した.

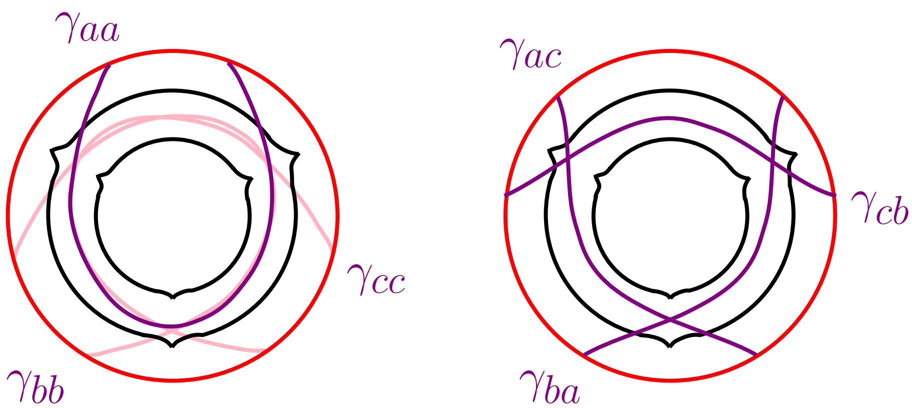

図 6: V_{ij} を定める弧 γ_{ij} の 6 つ組..

定理 9 (Asano [1]). 非自明な 6 つ組 $\begin{pmatrix} V_{aa} & V_{bb} & V_{cc} \\ V_{ba} & V_{cb} & V_{ac} \end{pmatrix}$ は値域の D^2 の向きを逆にする微分同相による違いを除いて次のいずれかと一致する：

$$\begin{pmatrix} S^3 & S^3 & L((q-1)^2, q-1+\epsilon) \\ S^1\times S^2 & L(q-2,\epsilon) & L(q,-\epsilon) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S^3 & L(9,2\epsilon) & L(4,\epsilon) \\ L(2,1) & L(5,\epsilon) & S^3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} S^1\times S^2 & S^3 & S^3 \\ S^3 & L(1+\epsilon,1) & S^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S^1\times S^2 & L(4,1) & L(4,1) \\ S^3 & L(4+\epsilon,1) & S^3 \end{pmatrix},$$

ここで $q\neq 1$ かつ $\epsilon\in\{-1,1\}$ である．

6 つ組 $\begin{pmatrix} V_{aa} & V_{bb} & V_{cc} \\ V_{ba} & V_{cb} & V_{ac} \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} S^1\times S^2 & S^1\times S^2 & S^1\times S^2 \\ S^3 & S^3 & S^3 \end{pmatrix}$ のとき，自明な 6 つ組と呼ぶ．これは図 7 右の円周 γ_μ の定めるモノドロミーが $f^{-1}(p_1)$ $(\simeq T^2)$ 上の恒等写像の場合に得られる 6 つ組である．

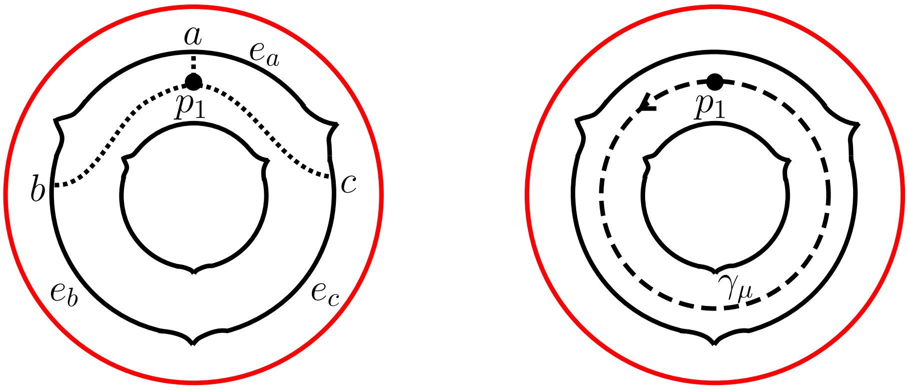

図 7:（左）:p_1 を始点とする reference path と対応する消滅サイクル．（右）: 単純な $(2,0)$-trisection のモノドロミーを定める円周 γ_μ．

講演では既に得られている 6 つ組のリストと，定義域の 4 次元多様体の対応を与える以下の定理について報告した．証明の詳細については [1] を参照されたい．

定理 10 (Asano [1])**.** $f: X\to \mathbf{R}^2$ を単純な $(2,0)$-trisection とする．このとき

(1) 6 つ組 $\begin{pmatrix} V_{aa} & V_{bb} & V_{cc} \\ V_{ba} & V_{cb} & V_{ac} \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} S^3 & S^3 & L((q-1)^2, q-1+\epsilon) \\ S^1\times S^2 & L(q-2,\epsilon) & L(q,-\epsilon) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X = \begin{cases} S^2\times S^2 & (q \text{ が偶数のとき}) \\ \mathbf{CP}^2\#\overline{\mathbf{CP}^2} & (q \text{ が 1 を除く奇数のとき}). \end{cases}$$

(2) 6 つ組が $\begin{pmatrix} S^3 & L(9,2\epsilon) & L(4,\epsilon) \\ L(2,1) & L(5,\epsilon) & S^3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{cases} \mathbf{CP}^2\#\mathbf{CP}^2 & (\epsilon=-1 \text{ のとき}) \\ \overline{\mathbf{CP}^2}\#\overline{\mathbf{CP}^2} & (\epsilon=1 \text{ のとき}). \end{cases}$

(3) 6 つ組が $\begin{pmatrix} S^1\times S^2 & L(4,1) & L(4,1) \\ S^3 & L(4+\epsilon,1) & S^3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{cases} \mathbf{CP}^2\#\mathbf{CP}^2 & (\epsilon=1 \text{ のとき}) \\ \mathbf{CP}^2\#\overline{\mathbf{CP}^2} & (\epsilon=-1 \text{ のとき}). \end{cases}$

(4) 6 つ組が $\begin{pmatrix} S^1\times S^2 & S^3 & S^3 \\ S^3 & S^1\times S^2 & S^3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \mathbf{CP}^2\#\overline{\mathbf{CP}^2}$.

(5) 6 つ組が $\begin{pmatrix} S^1\times S^2 & S^3 & S^3 \\ S^3 & L(2,1) & S^3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \mathbf{CP}^2\#\mathbf{CP}^2, \overline{\mathbf{CP}^2}\#\overline{\mathbf{CP}^2}$.

また，定理より次が従う．

系 11. $\begin{pmatrix} V_{aa} & V_{bb} & V_{cc} \\ V_{ba} & V_{cb} & V_{ac} \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} S^1 \times S^2 & S^3 & S^3 \\ S^3 & L(2,1) & S^3 \end{pmatrix}$ 及び自明な 6 つ組 $\begin{pmatrix} S^1 \times S^2 & S^1 \times S^2 & S^1 \times S^2 \\ S^3 & S^3 & S^3 \end{pmatrix}$ である場合を除いて 4 次元多様体を向きも込めて決定する．

定理 10 の証明の概略．証明は次の 2 つのステップにより行われる．

Step 1：各 6 つ組における消滅サイクルの位置を決定する．
Step 2：決定した消滅サイクルから Kiby 図式を得る．

d を図 7(右) の γ_μ が定めるモノドロミーの Dehn twist のコア，a, b, c を図 7（左）のラベルに対応する消滅サイクルとする．このとき次の (A), (B) いずれかが成り立つ．

(A)：d が a, b, c のいずれかと一度だけ交わる．
(B)：d が a, b, c のいずれかと非交和である．

(A), (B) の各場合で，単純な $(2, 0)$-trisection を図 8 のように変形し，Step1 で得た消滅サイクルの位置の情報から Kirby 図式を描くことで定理を得る．

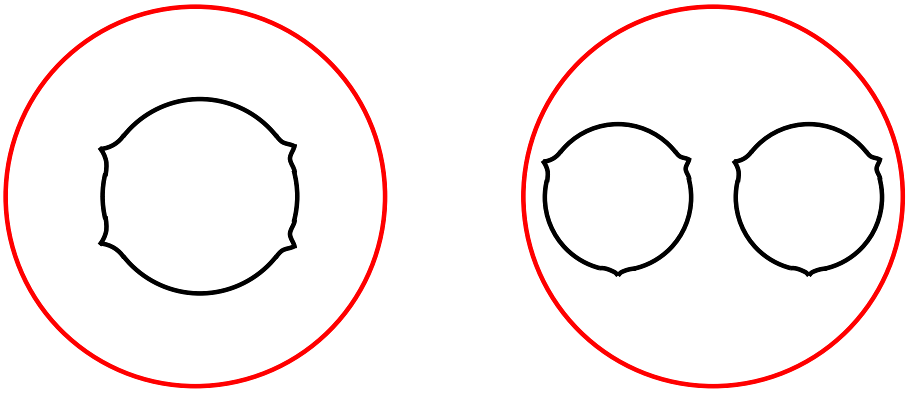

図 8: （左）: (A) における変形後の特異値集合．（右）: (B) における変形後の特異値集合．

□

4 謝辞

本研究集会を運営され，講演者に発表の機会を与えて下さった世話人の皆様に感謝申し上げます．

参考文献

[1] N. Asano, Vertical 3-manifolds in simplified $(2, 0)$-trisections of 4-manifolds, preprint, arXiv:2010.08239.
[2] R. I. Baykur and O. Saeki, Simplifying indefinite fibrations on 4-manifolds, *Transactions of the AMS*, to appear, available at arXiv:1705.11169 [math.GT].
[3] R. I. Baykur and O. Saeki, Simplified broken Lefschetz fibrations and trisections of 4-manifolds, *PNAS*, **115** (2018) , no. 43, 10894–10900.
[4] D. Gay and R. Kirby, Trisecting 4-manifolds, *Geom. Topol.* **20** (2016), no. 6, 3097–3132.
[5] K. Hayano, On diagrams of simplified trisections and mapping class groups, *Osaka J. Math.* **57** (2020), 17–37.