安定写像と双曲絡み目

古谷 凌雅 * †

概 要

S^3 から $\mathbb{R}^2$ への安定写像であって, S^3 内の絡み目 L を定値折り目特異点のなす集合に含むものを (S^3, L) の安定写像という. このような安定写像の特異ファイバーの連結成分のうち不定値折り目特異点を 2 つ含むものは II^2 型特異ファイバーと II^3 型特異ファイバーの 2 種類ある. L が双曲絡み目のとき, (S^3, L) の安定写像はこれらの特異ファイバーを必ずもつ. $i = 2, 3$ に対して, (S^3, L) の安定写像 f がもつ II^i 型特異ファイバーの総数を $\mathrm{II}^i(f)$ とあらわす. Ishikawa-Koda は, 3 次元多様体の shadow を用いて, S^3 内の双曲絡み目 L であって, $\mathrm{II}^2(f) = 1$ かつ $\mathrm{II}^3(f) = 0$ を満たす (S^3, L) の安定写像 f を許容するもの分類を与えた. 本稿では, shadow を用いて, S^3 内の双曲絡み目 L であって, $\mathrm{II}^2(f) = 0$ かつ $\mathrm{II}^3(f) = 1$ を満たす (S^3, L) の安定写像 f を許容するものの分類を与える.

1 導入

本稿では, M を向き付け可能な閉 3 次元多様体とし, M 内の絡み目 L に対して, $E(L)$ を L の外部空間 $M - \mathrm{Int}\,\mathrm{Nbd}(L; M)$ とする.

定義 1.1. 可微分写像 $f : M \to \mathbb{R}^2$ が**安定写像**であるとは, 次を満たすときをいう.
$f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$ の開近傍 U_f が存在して, 任意の $g \in U_f$ に対して, 微分同相写像 $\Phi : M \to M,\ \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が存在して, $g = \varphi \circ f \circ \Phi^{-1}$ を満たす.

安定写像のなす集合は, 写像空間 $C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$ 上で開かつ稠密である (Mather [8]).

定義 1.2. $f : M \to \mathbb{R}^2$ を安定写像とする. M 上に次の同値関係 $\sim$ を定める.

2 つの点 $p_1,\ p_2 \in M$ が同値であるとは, p_1 と p_2 が f のあるファイバーの同じ連結成分に含まれているときをいう.

このとき商空間 $Q_f = M/\sim$ を安定写像 f の **Stein 分解**という.

*広島大学大学院理学研究科数学専攻
†e-mail: m190897@hiroshima-u.ac.jp

安定写像 $f: M \to \mathbb{R}^2$ のファイバーの連結成分とその近傍における安定写像の Stein 分解の様子は図 1 の通りである.

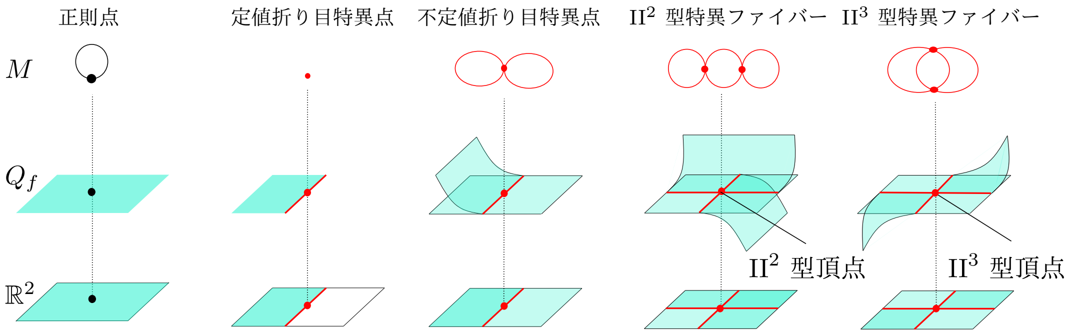


図 1: 安定写像のファイバーの連結成分と Stein 分解.

図 1 において, 1 点型のファイバーをもつ特異点を**定値折り目特異点**といい, 8 の字型のファイバーをもつ特異点を**不定値折り目特異点**という. 特異点のなす集合は M 内の絡み目であることに注意する. 不定値折り目特異点を 2 つ含む連結ファイバーは 2 種類あり, それぞれ II^2 **型特異ファイバー**, II^3 **型特異ファイバー**という (Saeki [9]). II^i 型特異ファイバーの商写像 $q_f: M \to Q_f$ による像を II^i **型頂点**といい, 安定写像 f がもつ II^i 型特異ファイバーの総数を $\mathrm{II}^i(f)$ とあらわす $(i = 2, 3)$. Stein 分解の定義より, $\mathrm{II}^i(f)$ は, f の Stein 分解 Q_f の II^i 型頂点の総数と一致する $(i = 2, 3)$.

注意. 安定写像には, **カスプ特異点**と呼ばれる特異点が存在するが, これはホモトピックな変形により除去可能である (Levine [7]). 本稿では, 安定写像はカスプ特異点を持たないものとする.

定義 1.3. L を M 内の絡み目とする. $f: M \to \mathbb{R}^2$ を安定写像とする. f の定値折り目特異点のなす集合が L を含むとき, f を (M, L) **の安定写像**であるという. このとき (M, L) の安定写像 f を $f: (M, L) \to \mathbb{R}^2$ とあらわす.

定理 1.4 (Saeki [9])**.** L を M 内の絡み目とする. このとき次の 2 つの命題は同値である.

1. (M, L) の安定写像 $f: (M, L) \to \mathbb{R}^2$ であって, $\mathrm{II}^2(f) = 0$ かつ $\mathrm{II}^3(f) = 0$ を満たすものが存在する.

2. $E(L)$ がグラフ多様体である.

定理 1.4 より, L が M 内の双曲絡み目であるならば, (M, L) の安定写像は II^2 型特異ファイバーまたは II^3 型特異ファイバーを必ずもつ. Ishikawa-Koda [6] は, S^3 内の双曲絡み目 L であって, $\mathrm{II}^2(f) = 1$ かつ $\mathrm{II}^3(f) = 0$ を満たす (S^3, L) の安定写像 $f: (S^3, L) \to \mathbb{R}^2$ を許容するものの分類を与えた. 本稿の目的は, S^3 内の双曲絡み目 L であって, $\mathrm{II}^2(f) = 0$ かつ $\mathrm{II}^3(f) = 1$ を満たす (S^3, L) の安定写像 $f: (S^3, L) \to \mathbb{R}^2$ を許容するものの分類を与えることである. 次の定理は本稿の主定理である.

定理 1.5. L を S^3 内の双曲絡み目とする. このとき次の 2 つの命題は同値である.

1. (S^3, L) の安定写像 $f : (S^3, L) \to \mathbb{R}^2$ であって, $\mathrm{II}^2(f) = 0$ かつ $\mathrm{II}^3(f) = 1$ を満たすものが存在する.
2. $E(L)$ が, 図 2 の絡み目 L'_1, L'_2, L'_3, L'_4, L'_5 の外部空間もしくはそれらの外部空間のいくつかの境界成分に沿って Dehn filling を施した空間と同相である.

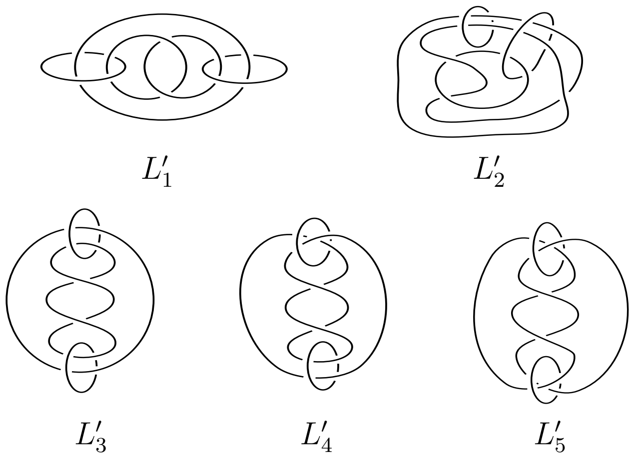


図 2: 絡み目 L'_1, L'_2, L'_3, L'_4, L'_5.

本稿は, 2020 年 12 月に開催された研究集会「結び目の数理 III」 で行った発表の報告書である. 貴重な講演の機会を与えてくださった世話人の先生方にこの場を借りて感謝申し上げます.

2 3 次元多様体の shadow

本章では 3 次元多様体の shadow を定義する. Shadow と安定写像には関係があり, 先の 2 つの分類は, この関係を用いることで与えられる.

定義 2.1. コンパクト空間 P が **simple polyhedron** であるとは, P の任意の点が, 図 3 のいずれかと同相である近傍をもつときをいう.

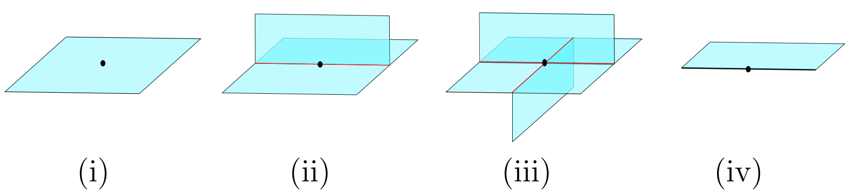


図 3: Simple polyhedron の局所モデル.

P を simple polyhedron とする. $p \in P$ とする. p が図 3 の (ii) または (iii) と同相な近傍をもつとき, p を P の**特異点**という. 特に p が図 3 の (iii) と同相な近傍をもつをもつとき, p を P の**頂点**という. また p が図 3 の (iv) と同相な近傍をもつとき, p を P の**境界点**という. P の特異点, 頂点, 境界点のなす集合をそれぞれ $S(P)$, $V(P)$, ∂P とあらわす. $P - S(P)$ の連結成分を P の**領域**という. P の領域であって, ∂P と共通部分をもたないものを P の**内部領域**という.

定義 2.2. P を simple polyhedron とする. P の **branching** とは, P の領域の向きづけであり, $S(P) - V(P)$ の各成分に対して, それに隣接する 3 つの領域が誘導する向きがすべて一致することがないものをいう. Simple polyhedron であって, branching が備わっているものを **branched polyhedron** という.

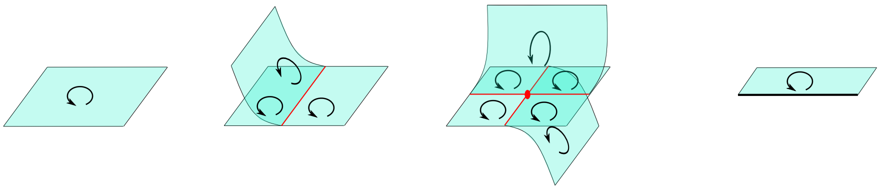


図 4: Branched polyhedron の局所モデル.

定義 2.3. L を M 内の絡み目とする. P を simple polyhedron とする. このとき P が $E(L)$ の **shadow** であるとは, コンパクトかつ向き付けられた境界付き 4 次元多様体 W であって, 次を満たすものが存在するときをいう.

1. P は W に適切かつ滑らかに埋め込まれている. すなわち $P \cap \partial W = \partial P$ であり, P の任意の点 p に対して, W における p のある座標近傍 (U_p, φ_p) が存在して, 次を満たすものがとれる. ただし $\mathbb{R}^4_+ = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 \geq 0\}$ とし, $\{0\} \times \mathbb{R}^3_+ = (\{0\} \times \mathbb{R}^3) \cap \mathbb{R}^4_+ \subset \mathbb{R}^4_+$ とする.

   $\varphi_p(U_p \cap P) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^3_+$ かつ $(\{0\} \times \mathbb{R}^3_+, \varphi_p(U_p \cap P))$ は図 3 のいずれかである.

2. W に自然な PL 構造を定めると, W は P に collapse する.

3. $M = \partial W$, $L \subset \partial P$ である.

このとき, P は W の shadow または M の shadow であるともいう. W から P への collapsing を $E(L)$ に制限したものを $E(L)$ から P への**射影**という. また branched polyhedron P が $E(L)$ の shadow であるとき, P を $E(L)$ の **branched shadow** という.

注意. コンパクトかつ向き付け可能であり境界成分が空またはトーラスである任意の 3 次元多様体 M は branched shadow をもつ (Turaev [10],[11], Costantino [1], Costantino-Thurston [3]). 特に例 2.4 でみるように, S^3 内の任意の絡み目 L に対して, L の図式から $E(L)$ の branched shadow を得る標準的な方法が存在する.

Simple polyhedron P に対して, P の内部領域から半整数値集合 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ への写像であって, ある条件を満たすものを P の **gleam 写像**という. Simple polyhedron P と P の gleam 写像 gl との組 (P, gl) から, P を shadow にもつ 4 次元多様体 W が一意に構成される. この構成方法を **Turaev の reconstruction** という (Turaev [10],[11]). 逆に 4 次元多様体 W と W の shadow P との組 (W, P) が与えられると, P のある gleam 写像 gl であって, 組 (P, gl) に Turaev の reconstruction を施すと, (W, P) を復元するものが存在する (Turaev [10],[11]). これより gleam 写像が備わった simple polyhedron P は, それを shadow にもつ 4 次元多様体 W を 1 つあらわす. このとき W の境界として 3 次元多様体 M が得られ, P の境界成分を指定することで M 内の絡み目 L を得る. 以上より, gleam 写像が備わった simple polyhedron P は, その境界成分をあらかじめ指定しておくことで, P を shadow にもつ絡み目外部空間 $E(L)$ を 1 つあらわす.

例 **2.4.** S^3 内の絡み目 L に対して, $E(L)$ の branched shadow を次のようにして得ることができる (Costantino-Thurston [3], Ishikawa-Koda [6]).

Step 1. S^3 を $D^4 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| + |w| \leq 1\}$ の境界とみなす. D^4 内の 2 次元円盤 D を $D = \{(z,w) \in D^4 \mid w = 0\}$ とおく. ただし D は向きが入っているとする. $D' = D - \mathrm{Int}\,\mathrm{Nbd}(\partial D; D)$ とおく. $\pi : S^3 \to D$ を, D^4 から D への collapsing を D^4 の境界 S^3 に制限したものとする. ソリッドトーラス $V = \pi^{-1}(D')$ を $D' \times S^1$ と同一視する.

Step 2. $p \in S^1$ をとる. 必要ならば, L をイソトピックで動かして, L は $D' \times \{p\} \subset V$ の十分小さい近傍に含まれ, $\pi|_V : V \to D$ は L に関して generic であるとしてよい. このとき L の図式 D_L は, 像 $\pi(L) \subset D'$ の 2 重点に上下の情報を加えることで得られる.

Step 3. $\pi|_L : L \to D'$ による写像柱 $((L \times [0,1]) \sqcup D')/(x,0) \sim \pi(x)$ は simple polyhedron である. これを $P^*_{D_L}$ と定める. $P^*_{D_L}$ は D^4 の shadow であり, $L \times \{1\} \subset \partial P^*_{D_L}$ であるので, $P^*_{D_L}$ は $E(L)$ の shadow である. さらに, D' に含まれている領域に対して, D' の向きから誘導される向きを入れ, その他の領域に対しては, 適当に向きを定めることにより, $P^*_{D_L}$ は $E(L)$ の branched shadow となる.

Step 4. $P^*_{D_L}$ の領域 R を, $\partial D'$ を境界にもつものとする. R と $P^*_{D_L}$ の branching は次の条件を満たすと仮定する.

- R の閉包はアニュラスである.
- $L \times \{1\}$ の成分を境界にもつ領域 A に対して, A と R が $S(P^*_{D_L}) - V(P^*_{D_L})$ のある連結成分 l に隣接するならば, A の向きが誘導する l の向きと R の向きが誘導する l の向きは一致する.

このとき $P^*_{D_L} - R$ は simple polyhedron である. これを P_{D_L} と定める. P_{D_L} は D^4 の shadow であり, $L \times \{1\} = \partial P_{D_L}$ であるので, P_{D_L} は $E(L)$ の shadow である. さらに P_{D_L} には $P^*_{D_L}$ の branching から誘導される branching が入り, これにより P_{D_L} は $E(L)$ の branched shadow となる.

以下, 安定写像と branched shadow の関係を述べる.

記号. 図 5 のような branched polyhedron の局所モデルを X とあらわす ($+1$ は 2 角形領域の gleam をあらわす).

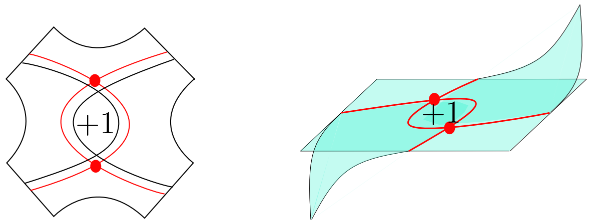


図 5: Branched polyhedron の局所モデル X.

定理 2.5. (Costantino-Thurston [3]) L を M 内の絡み目とする. $f:(M,L)\to\mathbb{R}^2$ を (M,L) の安定写像とする. f の Stein 分解 Q_f のすべての II^3 型頂点の近傍を X に取り換えたものを P とする. このとき P は $E(L)$ の branched shadow である.

定理 2.6. (Ishikawa-Koda [6]) L を M 内の絡み目とする. P を $E(L)$ の branched shadow とする. このとき (M,L) の安定写像 $f:(M,L)\to\mathbb{R}^2$ であって, $\mathrm{II}^2(f)$ が P の頂点数と等しく, $\mathrm{II}^3(f)=0$ を満たすものを P から構成できる.

命題 2.7. L を M 内の絡み目とする. P を $E(L)$ の branched shadow であって, X を含むものとする. P に定理 2.6 を適用して構成した (M,L) の安定写像を $f:(M,L)\to\mathbb{R}^2$ とおく. このとき f の Stein 分解は X を部分集合にもち, (M,L) の安定写像 $g:(M,L)\to\mathbb{R}^2$ であって, 次を満たすものを f から構成できる.

Stein 分解 Q_g は, f の Stein 分解 Q_f の X を II^3 型頂点の近傍におき換えたものである.

3 主定理の証明

本章では定理 1.5 の証明の概要について述べる.

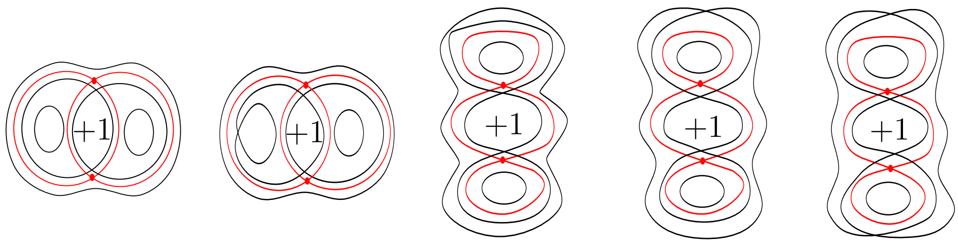
まず 1 ならば 2 であることを示す. L を S^3 内の双曲絡み目とする. (S^3,L) の安定写像 $f:(S^3,L)\to\mathbb{R}^2$ であって, 定理 1.5 の 1 を満たすものが存在すると仮定する. f の Stein 分解 Q_f の II^3 型頂点の近傍を X に取り換えて得られる branched polyhedron を P とおく. 定理 2.5 より, P は (S^3,L) の branched shadow である. 特異集合 $S(P)$ の連結成分 c を P のすべての頂点を含むものとし, branched polyhedron SP を $SP:=\mathrm{Nbd}(c;P)\cup X$ とおく. 定理 1.5 は次の 3 つの主張から従う.

主張 1. $\pi:E(L)\to P$ を射影とする. このとき $E(L)$ は, $\pi^{-1}(SP)$ または $\pi^{-1}(SP)$ のいくつかの境界成分に沿って Dehn filling を施した空間と同相である.

証明の概要 l を SP の境界成分とする. P は, l によって 2 つの部分 P_1, P_2 に分かれる. これに従って, $E(L)$ はトーラス $T_l=\pi^{-1}(l)$ によって 2 つの部分 $M_1=\pi^{-1}(P_1)$,

$M_2 = \pi^{-1}(P_2)$ に分かれる. このとき一般性を失うことなく, P_1 は c を含むと仮定してよい. すると定理 1.4, 定理 2.6 より M_2 はグラフ多様体となる. さらに L の双曲性より, M_2 は $E(L)$ のある境界成分のカラー近傍であるか, ソリッドトーラスと同相であることが示される. これより主張 1 が従う. □

主張 2. SP は図 6 の P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 のいずれかと同型である.



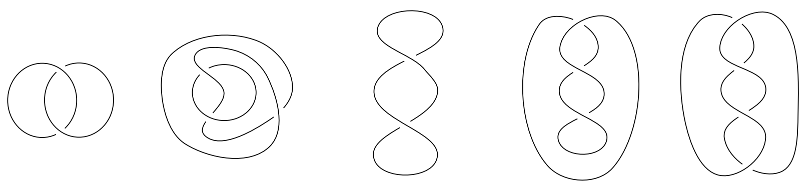
P_1　P_2　P_3　P_4　P_5

図 6: SP のリスト.

証明の概要 c に沿って X の境界を同一視することで, SP としてとり得る branched polyhedron のリストを得る. S^3 の shadow は単連結である (Ishikawa-Koda [6]). このことから, このリストの内, すべての境界に 2 次元円盤を接着しても単連結にならないものは, リストから除外される. このとき残った branched polyhedron が図 6 である. □

主張 3. 図 6 の P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 はそれぞれ $E(L_1')$, $E(L_2')$, $E(L_3')$, $E(L_4')$, $E(L_5')$ の branched shadow である.

証明の概要 U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 を, 自明な結び目または Hopf 絡み目の次の図式とする.



U_1　U_2　U_3　U_4　U_5

図 7: 自明な結び目または Hopf 絡み目の図式.

P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 は, $P^*_{U_1}$, P_{U_2}, $P^*_{U_3}$, P_{U_4}, P_{U_5} から図 8 に図示された 2 次元円盤を取り除くことで得られる. これら 2 次元円盤の射影 π による引き戻しは, 図 8 に図示されたソリッドトーラスである. これより $i \in \{1,2,3,4,5\}$ に対して, P_i は $E(L_i')$ の branched shadow であることがわかる.

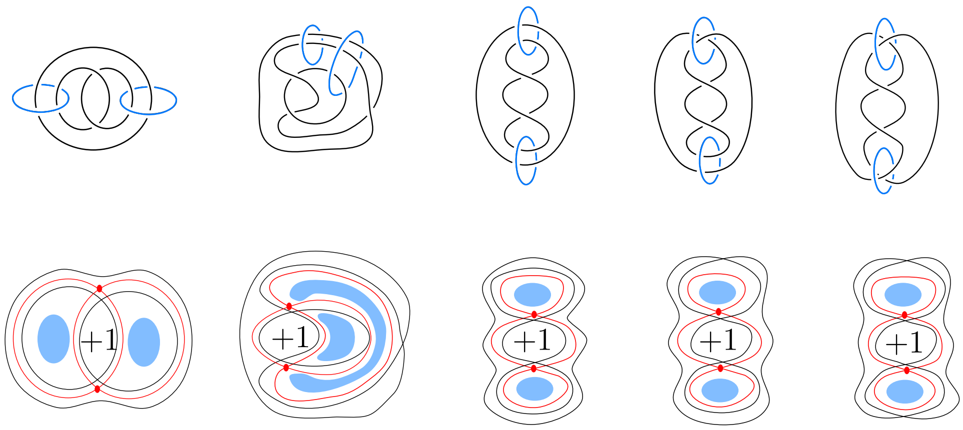


図 8: Polyhedron P_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$.

次に 2 ならば 1 であることを示す. L を S^3 内の双曲絡み目とする. 任意に $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ をとる. $E(L)$ は, $E(L'_i)$ または $E(L'_i)$ のいくつかの境界成分に沿って Dehn filling を施した空間と同相であると仮定する. このとき次の手順に従って, 定理 1.5 の 1 を満たす (S^3, L'_i) の安定写像 $f : (S^3, L'_i) \to \mathbb{R}^2$ を得る.
(Step 1.) 仮定より, $E(L)$ の branched shadow として, 図 6 の P_i または P_i のいくつかの境界成分に, tower とよばれる頂点を持たない branched polyhedron を接着したものがとれる (Costantino-Thurston [3], Ishikawa-Koda [6]). これを P とおく.
(Step 2.) 定理 2.6 より, P から (S^3, L'_i) の安定写像 $g : (S^3, L'_i) \to \mathbb{R}^2$ を得る.
(Step 3.) 命題 2.7 より, (S^3, L'_i) の安定写像 $f : (S^3, L'_i) \to \mathbb{R}^2$ であって, 次を満たすものを得る.

f の Stein 分解 Q_f は, g の Stein 分解 Q_g の X を II^3 型頂点の近傍に取り換えたものである. □

以上が定理 1.5 の証明の概要である.

図 2 の絡み目 L'_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ に, 定理 1.5 の 2 ならば 1 であることの証明を適用することで, (S^3, L'_i) の安定写像 $f_i : (S^3, L'_i) \to \mathbb{R}^2$ であって, $\mathrm{II}^2(f) = 0$ かつ $\mathrm{II}^3(f) = 1$ を満たすものを明示的に構成できる. 構成から, f_i の Stein 分解の境界成分と図 2 の L'_i の図式における L'_i の成分との間には明確な対応がある. これより f_i の II^3 型特異ファイバーは図 2 上に明示できる ([5] p. 23 の図).

次でみる通り, 図 2 の 5 つの絡み目 L'_1, L'_2, L'_3, L'_4, L'_5 は双曲絡み目であり, その双曲構造について, 次の定理が成り立つ.

定理 3.1. 図 2 の 5 つの絡み目 L'_1, L'_2, L'_3, L'_4, L'_5 は双曲絡み目であり, これらの補空間の双曲体積はすべて $10v_4$ である. ただし v_4 は理想双曲正 4 面体の体積をあらわす.

証明. Dunfield-Thurston [4] に従って, $\mathrm{Int}\, E(L'_1)$ の 10 個の理想双曲正 4 面体への分割を次で構成する.

(Step 1) 対合 $\tau : E(L'_1) \to E(L'_1)$ を, 図の横線を軸に 180 度回転をするものとする.

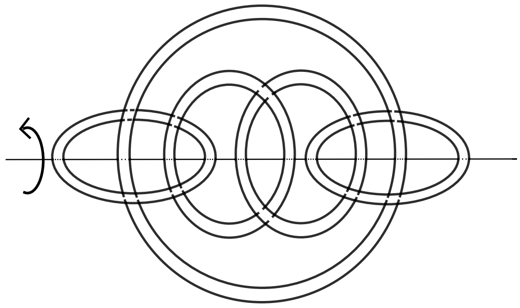


図 9: 対合 τ.

(Step 2) 外部空間 $E(L'_1)$ に対合 τ による同値関係を定め, $E(L'_1)/\sim$ をこれによる商空間とする. このとき商写像 $E(L'_1)/\sim \to E(L'_1)$ は 2 重分岐被覆となる. 4 単体の境界を S^3 とみなす. このとき $E(L'_1)/\sim$ は, 4 単体の境界から頂点の近傍を除いたものと同相であり, 4 単体の辺は τ の不動点集合と一致する. これにより $E(L'_1)/\sim$ の 5 個の切頂 4 面体への分割であって, 各辺に 3 つの面が集まるものがとれる. この分割の τ による引き戻しにより, $E(L'_1)$ の 10 個の切頂 4 面体への分割であって, 各辺に 6 つの面が集まるものが誘導される. これよりこの分割は $\mathrm{Int}\, E(L'_1)$ の 10 個の理想双曲正 4 面体への分割を与える.

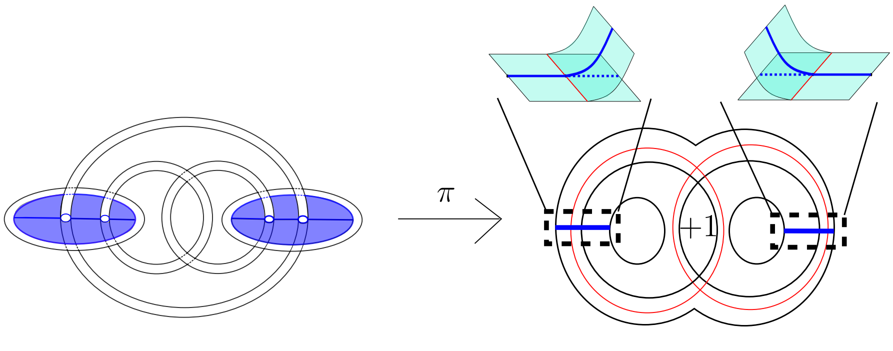


図 10: X は P_1 を青線に沿って切り開くことで得られる.

P_1 を図 6 のものとする. 定理 1.5 の証明でみた通り, P_1 は $E(L'_1)$ の branched shadow である. $\pi : E(L'_1) \to P_1$ を射影とする. P_1 から図 10 の右の青線で示された Y の字に沿って切り開いて得られる simple polyhedron を X と同一視する. この青線部分の射影 π による引き戻しは, 図 10 の青で塗られた 3 つ穴あき球面である. よって X の π によるの引き戻し $\pi^{-1}(X)$ は, 図 10 の青で塗られた 3 つ穴あき球面に沿って $E(L'_1)$ を切り開いたものである. この 3 つ穴あき球面は, $E(L'_1)$ の先の切頂理想双曲正 4 面体分割における 4 面体の 2 つの面から構成されることに注意する. 以

上より $\pi^{-1}(X)$ の 10 個の切頂 4 面体への分割を得る. $\pi^{-1}(X)$ の境界上には, 図 10 の青で塗られた 3 つ穴あき球面の切り口に対応する 4 つの 3 つ穴あき球面があり, 先ほどの注意より, これらは切頂 4 面体の 2 つの面から構成される. 図 6 の branched polyhedron P_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ は, X の境界に図 3 の (ii) を接着することで得られる. Turaev の reconstruction より, この接着は, $\pi^{-1}(X)$ の境界上にある 3 つ穴あき球面の 2 組を同一視することに対応する. この同一視は, 3 つ穴あき球面を構成する切頂 4 面体の面同士を同一視するものである. これより $E(L'_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ の 10 個の切頂正 4 面体への分割が入る. 特にこの分割は各辺に 6 つの面が集まるものである. これよりこの分割は $\operatorname{Int} E(L'_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ の 10 個の理想双曲正 4 面体への分割を与える. 以上より $\operatorname{Int} E(L'_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ に双曲構造が入り, 双曲体積は $10v_4$ であることがわかる.

□

参考文献

[1] Costantino, F.: *Shadows and branched shadows of* 3 *and* 4*-manifolds.* Edizioni della Normale, Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy, 2005.

[2] Costantino, F.: A short introduction to shadows of 4-manifolds. Fundam. Math. **188**, pp. 271–291 (2005).

[3] Costantino, F., Thurston, D.: 3-manifolds efficiently bound 4-manifolds. J. Topol. **1**(3), pp. 703–745 (2008).

[4] Dunfield, N., Thurston, W.P.: The virtual Haken conjecture: experiments and examples. Geom. Topol. **7**, pp. 399–441 (2003).

[5] 古谷凌雅: 安定写像と双曲絡み目, 結び目の数理 III スライド, 2020 年 12 月.

[6] Ishikawa, M., Koda, Y.: Stable maps and branched shadows of 3-manifold. Math. Ann. **367**, pp. 1819–1863 (2017).

[7] Levine, H.: Elimination of cusps. Topology **3**, suppl. 2, pp. 263–296 (1965).

[8] Mather, J.: Stability of C^∞ mappings, VI: The nice dimensions, *Proceedings of Liverpool Singularities-Symposium*, I, Lecture Notes in Math., Vol. 192, Springer, Berlin, pp. 207–253 (1971).

[9] Saeki, O.: Simple stable maps of 3-manifolds into surfaces, Topology **35**(3), pp. 671–698 (1996).

[10] Turaev, V.G.: Shadow links and face models of statistical mechanics. J. Differential Geom. **36**(1), pp. 35–74 (1992).

[11] Turaev, V.G.: *Quantum invariants of knots and* 3*-manifolds.* de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 18. Walter de Gruyter & Co., Berlin (1994).