

ハンドル体結び目のMCQねじれAlexander不変量

村尾 智 (早稲田大学 GEC)

概要

多重共役カンドル (MCQ) とは, ハンドル体結び目図式の Reidemeister 変形に由来する代数系である. 本稿では, MCQ Alexander pair と呼ばれる多重共役カンドルの線形拡大に付随する写像の組を用いることで, 多重共役カンドルのねじれ微分を導入し, ハンドル体結び目のMCQねじれAlexander不変量を紹介する. 本研究は石井敦氏 (筑波大学) との共同研究である.

1. 多重共役カンドルとMCQ Alexander pair

カンドル [5, 6] とは, 空でない集合 Q であって, 次を満たす Q 上の二項演算 $\triangleleft: Q \times Q \rightarrow Q$ を持つものである.

- 任意の $a \in Q$ に対して, $a \triangleleft a = a$.
- 任意の $a \in Q$ に対して, 写像 $\triangleleft a: Q \rightarrow Q; x \mapsto x \triangleleft a$ は全単射.
- 任意の $a, b, c \in Q$ に対して, $(a \triangleleft b) \triangleleft c = (a \triangleleft c) \triangleleft (b \triangleleft c)$.

ここで, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $(\triangleleft a)^n: Q \rightarrow Q$ を $\triangleleft^n a$ と表す.

群 G 上の二項演算 $\triangleleft$ を $a \triangleleft b := b^{-1}ab$ と定めると, $(G, \triangleleft)$ はカンドルとなる. これを G の**共役カンドル**と呼び, $\text{Conj } G$ で表す. 正整数 n に対して, 巡回群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}_n$ で表す. $\mathbb{Z}_n$ 上の二項演算 $\triangleleft$ を $a \triangleleft b := 2b - a$ と定めると, $(\mathbb{Z}_n, \triangleleft)$ はカンドルとなる. これを位数 n の**二面体カンドル**と呼び, R_n で表す.

カンドル Q に対して, Q の**型**を

$$\text{type } Q := \min\{n \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \text{任意の } x, y \in Q \text{ に対して, } x \triangleleft^n y = x.\}$$

で定める. ここで, 空集合 $\emptyset$ に対しては $\min \emptyset := \infty$ と定める. 任意の有限カンドルは有限の型を持つことが知られている.

Q をカンドル, R を環とする. このとき, 次を満たす写像 $f_1, f_2: Q \times Q \rightarrow R$ の組 (f_1, f_2) を **Alexander pair** [4] と呼ぶ.

- 任意の $a \in Q$ に対して, $f_1(a, a) + f_2(a, a) = 1$.
- 任意の $a, b \in Q$ に対して, $f_1(a, b)$ は可逆元.
- 任意の $a, b, c \in Q$ に対して,

$$\begin{aligned} f_1(a \triangleleft b, c) f_1(a, b) &= f_1(a \triangleleft c, b \triangleleft c) f_1(a, c), \\ f_1(a \triangleleft b, c) f_2(a, b) &= f_2(a \triangleleft c, b \triangleleft c) f_1(b, c), \\ f_2(a \triangleleft b, c) &= f_1(a \triangleleft c, b \triangleleft c) f_2(a, c) + f_2(a \triangleleft c, b \triangleleft c) f_2(b, c). \end{aligned}$$

定義 1.1 ([2]). **多重共役カンドル (MCQ)** $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ とは, 群 $G_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ の直和であって, 次を満たす X 上の二項演算 $\triangleleft: X \times X \rightarrow X$ を持つものである.

- 任意の $a, b \in G_\lambda$ に対して, $a \triangleleft b = b^{-1}ab$.
- 任意の $x \in X$ 及び $a, b \in G_\lambda$ に対して, $x \triangleleft e_\lambda = x$ かつ $x \triangleleft (ab) = (x \triangleleft a) \triangleleft b$. ここで, e_λ は G_λ の単位元である.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$.
- 任意の $x \in X$ 及び $a, b \in G_\lambda$ に対して, $(ab) \triangleleft x = (a \triangleleft x)(b \triangleleft x)$. ここで, ある $\mu \in \Lambda$ が存在して, $a \triangleleft x, b \triangleleft x \in G_\mu$ を満たす.

$X_1 = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, $X_2 = \bigsqcup_{\mu \in M} G_\mu$ を MCQ, $f : X_1 \rightarrow X_2$ を写像とする. 任意の $x, y \in X_1$ に対し, $f(x \triangleleft y) = f(x) \triangleleft f(y)$ が成り立ち, さらに任意の $a, b \in G_\lambda$ に対し, $f(ab) = f(a)f(b)$ が成り立つとき, f を **MCQ 準同型写像**, または **MCQ 表現** と呼ぶ. 全単射な MCQ 準同型写像を特に **MCQ 同型写像** と呼び, MCQ 同型写像 $f : X_1 \rightarrow X_2$ が存在するとき, X_1 と X_2 は **同型** であるといい, $X_1 \cong X_2$ と表す. また, 二つの MCQ 表現 $\rho_1 : X_1 \rightarrow Y$, $\rho_2 : X_2 \rightarrow Y$ に対して, MCQ 同型写像 $f : X_1 \rightarrow X_2$ が存在して $\rho_1 = \rho_2 \circ f$ を満たすとき, (X_1, ρ_1) と (X_2, ρ_2) は **同型** であるといい, $(X_1, \rho_1) \cong (X_2, \rho_2)$ と表す.

Q をカンドルとする. このとき, $\mathbb{Z} \times Q = \bigsqcup_{x \in Q} (\mathbb{Z} \times \{x\})$ は以下の演算により MCQ となる.

$$\begin{aligned} (a, x) \triangleleft (b, y) &:= (a, x \triangleleft^b y) & (a, b \in \mathbb{Z}, x, y \in Q), \\ (a, x)(b, x) &:= (a + b, x) & (a, b \in \mathbb{Z}, x \in Q). \end{aligned}$$

特に, $\text{type } Q < \infty$ のとき, $\mathbb{Z}_{\text{type } Q} \times Q = \bigsqcup_{x \in Q} (\mathbb{Z}_{\text{type } Q} \times \{x\})$ も同様の演算により MCQ となる. これらを Q の **付随 MCQ** と呼ぶ.

定義 1.2 ([7]). $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ を MCQ, R を環とする. このとき, 次を満たす写像 $f_1, f_2 : X \times X \rightarrow R$ の組 (f_1, f_2) を **MCQ Alexander pair** と呼ぶ.

- 任意の $a, b \in G_\lambda$ に対して,

$$f_1(a, b) + f_2(a, b) = f_1(a, a^{-1}b).$$

- 任意の $a, b \in G_\lambda$ 及び $x \in X$ に対して,

$$\begin{aligned} f_1(a, x) &= f_1(b, x), \\ f_2(ab, x) &= f_2(a, x) + f_1(b \triangleleft x, a^{-1} \triangleleft x) f_2(b, x). \end{aligned}$$

- 任意の $x \in X$ 及び $a, b \in G_\lambda$ に対して,

$$\begin{aligned} f_1(x, e_\lambda) &= 1, \\ f_1(x, ab) &= f_1(x \triangleleft a, b) f_1(x, a), \\ f_2(x, ab) &= f_1(x \triangleleft a, b) f_2(x, a). \end{aligned}$$

- 任意の $x, y, z \in X$ に対して,

$$\begin{aligned} f_1(x \triangleleft y, z) f_1(x, y) &= f_1(x \triangleleft z, y \triangleleft z) f_1(x, z), \\ f_1(x \triangleleft y, z) f_2(x, y) &= f_2(x \triangleleft z, y \triangleleft z) f_1(y, z), \\ f_2(x \triangleleft y, z) &= f_1(x \triangleleft z, y \triangleleft z) f_2(x, z) + f_2(x \triangleleft z, y \triangleleft z) f_2(y, z). \end{aligned}$$

命題 1.3 ([7]). $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ を MCQ, R を環とする. 写像 $f_1, f_2 : X \times X \rightarrow R$ に対して, それらの組 (f_1, f_2) が MCQ Alexander pair であることの必要十分条件は, 任意の左 R -加群 M に対して, $\tilde{X}(f_1, f_2) := \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} (G_\lambda \times M)$ が以下の演算により MCQ となることである.

$$\begin{aligned} (x, u) \triangleleft (y, v) &:= (x \triangleleft y, f_1(x, y)u + f_2(x, y)v) && ((x, u), (y, v) \in \tilde{X}(f_1, f_2)), \\ (a, u)(b, v) &:= (ab, u + f_1(a, a^{-1})v) && ((a, u), (b, v) \in G_\lambda \times M). \end{aligned}$$

命題 1.4. 任意の MCQ 表現 $\rho : X \rightarrow Y$ に対して, 写像 $f_1, f_2 : Y \times Y \rightarrow R$ の組 (f_1, f_2) が MCQ Alexander pair であれば, 写像 $f_1 \circ (\rho \times \rho), f_2 \circ (\rho \times \rho) : X \times X \rightarrow R$ の組 $(f_1 \circ (\rho \times \rho), f_2 \circ (\rho \times \rho))$ も MCQ Alexander pair である.

2. MCQ の表示とハンドル体絡み目の基本 MCQ

本章では, MCQ の表示及びハンドル体絡み目の基本 MCQ について復習する. 詳細は [3] を参照されたい.

集合 S 上の自由群を $F_{\text{Grp}}(S)$ と表す. $S_\Lambda = \{S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を互いに素な集合の集合とし, $S := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ とおく. 任意の $(a, x), (b, y) \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_{\text{Grp}}(S_\lambda) \times F_{\text{Grp}}(S)$ に対して, $c \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_{\text{Grp}}(S_\lambda)$ が存在して $b = cac^{-1}$ 及び $y = cx$ が成り立つとき, $(a, x) \sim (b, y)$ と表す. このとき, $\sim$ は $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_{\text{Grp}}(S_\lambda) \times F_{\text{Grp}}(S)$ 上の同値関係である. $F_{\text{MCQ}}(S_\Lambda) := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_{\text{Grp}}(S_\lambda) \times F_{\text{Grp}}(S) / \sim$ と定める. $a_1, \dots, a_n \in S$ 及び $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ に対して, 語 $a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n}$ が既約であるとは, 各 i について, $a_i = a_{i+1}$ ならば $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ が成り立つことである.

$$F_{\text{Grp}}(S; S_\lambda) := \left\{ a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n} \in F_{\text{Grp}}(S) \left| \begin{array}{l} n \geq 0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}, \\ a_1 \in S - S_\lambda, a_2, \dots, a_n \in S, \\ a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n} \text{ は既約.} \end{array} \right. \right\}.$$

と定める. $\bar{\Lambda} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\{\lambda\} \times F_{\text{Grp}}(S; S_\lambda))$ とおき, 任意の $x \in F_{\text{Grp}}(S)$ に対して

$$F_{\text{Grp}}(S_\lambda) \triangleleft x := \{[(a, x)] \in F_{\text{MCQ}}(S_\Lambda) \mid a \in F_{\text{Grp}}(S_\lambda)\}$$

と定める. このとき, $F_{\text{MCQ}}(S_\Lambda) = \bigsqcup_{(\lambda, x) \in \bar{\Lambda}} F_{\text{Grp}}(S_\lambda) \triangleleft x$ は以下の演算により MCQ となる.

$$\begin{aligned} [(a, x)] \triangleleft [(b, y)] &:= [(a, xy^{-1}by)] && ([(a, x)], [(b, y)] \in F_{\text{MCQ}}(S_\Lambda)), \\ [(a, x)][(b, x)] &:= [(ab, x)] && (a, b \in F_{\text{Grp}}(S_\lambda), x \in F_{\text{Grp}}(S)). \end{aligned}$$

$F_{\text{MCQ}}(S_\Lambda)$ を S_Λ 上の自由 MCQ と呼ぶ. 単射 $\iota : S \rightarrow F_{\text{MCQ}}(S_\Lambda); a \mapsto [(a, 1_{F_{\text{Grp}}(S)})]$ により, $S \subset F_{\text{MCQ}}(S_\Lambda)$ とみなし, $[(a, 1_{F_{\text{Grp}}(S)})]$ を単に a と表す. このとき, 任意の $[(a, a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n})] \in F_{\text{MCQ}}(S_\Lambda)$ は $(\cdots (a \triangleleft a_1^{\varepsilon_1}) \triangleleft \cdots) \triangleleft a_n^{\varepsilon_n}$ と表される.

互いに素な集合の集合 $S_\Lambda = \{S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 及び $R \subset F_{\text{MCQ}}(S_\Lambda) \times F_{\text{MCQ}}(S_\Lambda)$ に対して, $\langle S_\Lambda \mid R \rangle$, または $\langle S_\lambda \ (\lambda \in \Lambda) \mid R \rangle$ と表される MCQ が構成できる (詳細は [3] を参照). 任意の MCQ X に対して, $X \cong \langle S_\Lambda \mid R \rangle$ のとき, $\langle S_\Lambda \mid R \rangle$ を X の **表示** と呼ぶ. またこのとき, S_Λ を **生成系**, R の元を **関係式** と呼ぶ. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ 及び R が有限のとき, 表示 $\langle S_\Lambda \mid R \rangle$ を **有限表示** と呼ぶ. また, 有限表示 MCQ について

$$\begin{aligned} & \langle x_{1,1}, \dots, x_{1,n_1}; \dots; x_{l,1}, \dots, x_{l,n_l} \mid r_1, \dots, r_m \rangle \\ & := \langle \{x_{1,1}, \dots, x_{1,n_1}\}, \dots, \{x_{l,1}, \dots, x_{l,n_l}\} \mid \{r_1, \dots, r_m\} \rangle. \end{aligned}$$

とも表す.

次に, ハンドル体絡み目の基本 MCQ とその Wirtinger 表示について復習する. **ハンドル体絡み目** [1] とは, 3次元球面 S^3 に埋め込まれたハンドル体の非交和のことであり, 特に, 連結なハンドル体絡み目のことを **ハンドル体結び目** と呼ぶ. 二つのハンドル体絡み目 H_1, H_2 が **同値** ($H_1 \cong H_2$) であるとは, S^3 の向きを保存する自己同相写像 f が存在して, $f(H_1) = H_2$ が成り立つことである. ハンドル体絡み目の **ダイアグラム** とは, そのスパインである空間3価グラフのダイアグラムのことである. ハンドル体絡み目のダイアグラム D の **Y-orientation** とは, D の全ての頂点での入次数, 出次数が共に1以上になるように各辺に向きを入れることである (図1). 任意のダイアグラムは Y-orientation を持つことが知られている.



図 1: Y-orientation.

H を Y-orientation が与えられたダイアグラム D で表されるハンドル体絡み目とする. D の交点の集合, 頂点の集合, アークの集合をそれぞれ $C(D), V(D), A(D)$ と表し, 各 $c \in C(D)$ 及び $\tau \in V(D)$ の周辺のアーク $u_c, v_c, w_c, u_\tau, v_\tau, w_\tau$ を図2のように定める. $\bigcup_{\tau \in V(D)} \{u_\tau, v_\tau, w_\tau\}^2$ で生成される $A(D)$ 上の同値関係による商集合を $A^\sqcup(D)$ と表し, 各 $c \in C(D)$ 及び $\tau \in V(D)$ に対して, 関係式 $(u_c \triangleleft v_c, w_c), (u_\tau v_\tau, w_\tau)$ をそれぞれ r_c, r_τ と表す. このとき, H の **基本 MCQ** を

$$\text{MCQ}(H) := \langle A^\sqcup(D) \mid r_c, r_\tau \ (c \in C(D), \tau \in V(D)) \rangle$$

で定める. この MCQ 表示を D に関する $\text{MCQ}(H)$ の **Wirtinger 表示** と呼ぶ. $\text{MCQ}(H)$ の同型類は H のダイアグラム及びその Y-orientation によらないことが知られている.

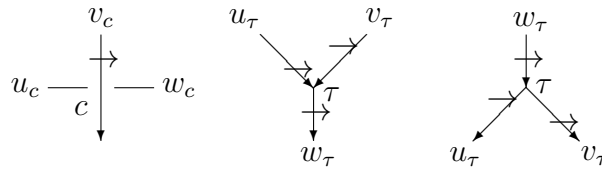


図 2: 各アークの表記.

D をハンドル体絡み目 H の Y-orientation が与えられたダイアグラムとし, X を MCQ とする. D の **X -彩色** とは, 写像 $C : A(D) \rightarrow X$ であって, 各交点 $c \in C(D)$ 及び頂点

$\tau \in V(D)$ において

$$C(u_c) \triangleleft C(v_c) = C(w_c), \quad C(u_\tau)C(v_\tau) = C(w_\tau)$$

を満たすもののことである。 D の X -彩色は $MCQ(H)$ から X への MCQ 表現と同一視することができる。 ハンドル体絡み目 H_1, H_2 及び MCQ 表現 $\rho_1 : MCQ(H_1) \rightarrow X, \rho_2 : MCQ(H_2) \rightarrow X$ に対して、 $H_1 \cong H_2$ かつ $(MCQ(H_1), \rho_1) \cong (MCQ(H_2), \rho_2)$ のとき、 $(H_1, \rho_1) \cong (H_2, \rho_2)$ と表す。

3. MCQ のねじれ微分と MCQ ねじれ Alexander 不変量

$S_\Lambda = \{S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を互いに素な有限集合の有限集合とし、 $S := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda = \{x_1, \dots, x_n\}$ とおく。 $X = \langle S_\Lambda \mid \{r_1, \dots, r_m\} \rangle$ を有限表示 MCQ, $F_{MCQ}(S_\Lambda) = \bigsqcup_{\mu \in M} G_\mu$ を S_Λ 上の自由 MCQ, $\text{pr} : F_{MCQ}(S_\Lambda) \rightarrow X$ を標準射影とする。 ここで、 $\text{pr}(x)$ を単に x とも表す。 $f = (f_1, f_2)$ を写像 $f_1, f_2 : X \times X \rightarrow R$ の組からなる MCQ Alexander pair とする。

定義 3.1. 各 $j \in \{1, \dots, n\}$ に対して、 x_j に関する f -微分とは、写像 $\frac{\partial f}{\partial x_j} : F_{MCQ}(S_\Lambda) \rightarrow R$ であって、任意の $x, y \in F_{MCQ}(S_\Lambda)$, $a, b \in G_\mu$ 及び $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x \triangleleft y) &= f_1(x, y) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + f_2(x, y) \frac{\partial f}{\partial x_j}(y), \\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(ab) &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + f_1(a, a^{-1}) \frac{\partial f}{\partial x_j}(b), \\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i) &= \delta_{ij} \text{ (Kronecker のデルタ)} \end{aligned}$$

を満たすものである。

f -微分を MCQ の**ねじれ微分**とも呼ぶ。

環 R 上の $m \times n$ 行列全体の集合を $M(m, n; R)$ と表す。 R 上の行列 A_1, A_2 が**同値** ($A_1 \sim A_2$) であるとは、それらが有限回の以下の変形により互いに移り合うことである。

- $(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) \leftrightarrow (a_1, \dots, a_i + a_j r, \dots, a_j, \dots, a_n) \ (r \in R),$
- $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + r a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \ (r \in R),$
- $A \leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix},$
- $A \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

R を可換環とし、 $A \in M(m, n; R)$ とする。 任意の $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、 A の**第 d 基本イデアル** $E_d(A)$ を

$$E_d(A) := \begin{cases} 0 & (d < n - m), \\ I(\{A \text{ の } (n - d) \times (n - d) \text{ 小行列式}\})_R & (n - m \leq d < n), \\ R & (n \leq d) \end{cases}$$

で定める. ここで, $I(X)_R$ は X で生成される R のイデアルを表す. また, R が GCD 整域のとき, A の **第 d Alexander 多項式** $\Delta_d(A)$ を

$$\Delta_d(A) := \begin{cases} 0 & (d < n - m), \\ \gcd(\{A \text{ の } (n - d) \times (n - d) \text{ 小行列式}\}) & (n - m \leq d < n), \\ 1 & (n \leq d) \end{cases}$$

で定める. ここで, $\Delta_d(A)$ は単元倍を除いて定まることに注意する. $A \sim B$ のとき, $E_d(A) = E_d(B)$ かつ $\Delta_d(A) \doteq \Delta_d(B)$ が成り立つ. ここで, $\doteq$ は単元倍を除いて等しいことを表す.

MCQ 表現 $\rho : X \rightarrow Y$ 及び写像 $f_1, f_2 : Y \times Y \rightarrow R$ の組からなる MCQ Alexander pair $f = (f_1, f_2)$ に対し, $f \circ (\rho \times \rho) := (f_1 \circ (\rho \times \rho), f_2 \circ (\rho \times \rho))$ とおく. 命題 1.4 より, $f \circ (\rho \times \rho)$ は MCQ Alexander pair である. また, 関係式 $r = (r_1, r_2)$ に対して,

$$\frac{\partial_f}{\partial x_j}(r) := \frac{\partial_f}{\partial x_j}(r_1) - \frac{\partial_f}{\partial x_j}(r_2)$$

と定める.

定義 3.2. H をハンドル体絡み目, $\langle \mathbf{x} | \mathbf{r} \rangle = \langle x_1, \dots, x_k; \dots; x_l, \dots, x_n | r_1, \dots, r_m \rangle$ を H の Y -orientation が与えられたダイアグラム D に関する $MCQ(H)$ の Wirtinger 表示とする. $\rho : MCQ(H) \rightarrow X$ を MCQ 表現, $f = (f_1, f_2)$ を写像 $f_1, f_2 : X \times X \rightarrow R$ の組からなる MCQ Alexander pair とする. このとき, (H, ρ) の (表示 $\langle \mathbf{x} | \mathbf{r} \rangle$ に関する) **f -ねじれ Alexander 行列** を

$$A(H, \rho; f_1, f_2) := \begin{pmatrix} \frac{\partial_{f \circ (\rho \times \rho)}}{\partial x_1}(r_1) & \dots & \frac{\partial_{f \circ (\rho \times \rho)}}{\partial x_n}(r_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial_{f \circ (\rho \times \rho)}}{\partial x_1}(r_m) & \dots & \frac{\partial_{f \circ (\rho \times \rho)}}{\partial x_n}(r_m) \end{pmatrix}$$

で定める. また, f に付随する (H, ρ) の **第 d 基本イデアル** を

$$E_d(H, \rho; f_1, f_2) := E_d(A(H, \rho; f_1, f_2)),$$

f に付随する (H, ρ) の **第 d Alexander 不変量** を

$$\Delta_d(H, \rho; f_1, f_2) := \Delta_d(A(H, \rho; f_1, f_2))$$

で定める.

これらを総称して, ハンドル体絡み目の **MCQ ねじれ Alexander 不変量** と呼ぶ.

定理 3.3. H, H' をハンドル体絡み目, $\rho : MCQ(H) \rightarrow X, \rho' : MCQ(H') \rightarrow X$ を MCQ 表現, $f = (f_1, f_2)$ を写像 $f_1, f_2 : X \times X \rightarrow R$ の組からなる MCQ Alexander pair とする. このとき, $(H, \rho) \cong (H', \rho')$ であれば,

$$A(H, \rho; f_1, f_2) \sim A(H', \rho'; f_1, f_2)$$

が成り立つ. 特に, R が可換環のとき,

$$E_d(H, \rho; f_1, f_2) = E_d(H', \rho'; f_1, f_2),$$

R が GCD 整域のとき,

$$\Delta_d(H, \rho; f_1, f_2) \doteq \Delta_d(H', \rho'; f_1, f_2)$$

が成り立つ.

4. 計算例

本章では、自明なハンドル体結び目及び非自明な2成分ハンドル体絡み目のMCQねじれAlexander不変量の計算例を紹介する.

命題 4.1. O_g を種数 g の自明なハンドル体結び目とする. このとき, 任意のMCQ表現 $\rho: MCQ(O_g) \rightarrow X$ 及び任意のMCQ Alexander pair $f_1, f_2: X \times X \rightarrow R$ に対して,

$$A(O_g, \rho; f_1, f_2) \sim (0 \cdots 0) \in M(1, g; R)$$

が成り立つ. 特に, R が可換環のとき,

$$E_d(O_g, \rho; f_1, f_2) = \begin{cases} 0 & (d < g), \\ R & (g \leq d), \end{cases}$$

R がGCD整域のとき,

$$\Delta_d(O_g, \rho; f_1, f_2) = \begin{cases} 0 & (d < g), \\ 1 & (g \leq d) \end{cases}$$

が成り立つ.

Proof. $A(O_1, \rho; f_1, f_2) \sim (0) \in M(1, 1; R)$ は簡単に確かめられる. $g \geq 2$ とする. D_g を図3で表される O_g のY-orientationが与えられたダイアグラムとすると, D_g に関する $MCQ(O_g)$ のWirtinger表示は

$$\left\langle x_1, \dots, x_{3g-3} \left| \begin{array}{l} (x_1 x_2, x_1), (x_{3g-3} x_{3g-4}, x_{3g-3}), \\ (x_{3i} x_{3i+1}, x_{3i-1}), (x_{3i} x_{3i+1}, x_{3i+2}) \quad (1 \leq i \leq g-2) \end{array} \right. \right\rangle$$

で与えられる. ここで, $a_i := (f_1 \circ (\rho \times \rho))(x_i, x_i^{-1})$ とおくと, MCQ Alexander pairの公理より, a_i は可逆元であるから,

$$\begin{aligned} & A(O_g, \rho; f_1, f_2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & & & & \\ 0 & -1 & 1 & a_3 & & & & & \\ & & 1 & a_3 & -1 & & \cdots & & 0 \\ & & & -1 & 1 & a_6 & & & \\ & & & 1 & a_6 & -1 & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & & & -1 & 1 & a_{3g-6} \\ & & 0 & & & \cdots & 1 & a_{3g-6} & -1 & 0 \\ & & & & & & & a_{3g-3} & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \cdots \sim (0 \cdots 0) \in M(1, g; R) \end{aligned}$$

が成り立つ. □

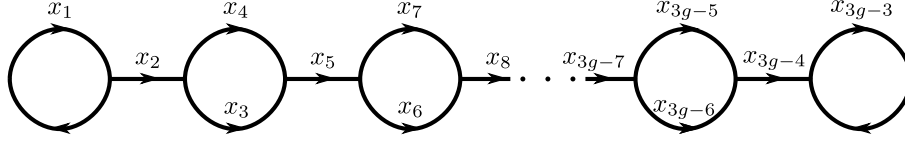


図 3: $D_g : O_g$ の Y-orientation が与えられたダイアグラム.

例 4.2. H を Y-orientation が与えられたダイアグラム D (図 4) で表される 2 成分ハンドル体絡み目とする. このとき, D に関する $MCQ(H)$ の Wirtinger 表示は

$$\left\langle x_1, x_2, x_3; x_4, x_5, x_6; x_7 \left| \begin{array}{l} (x_5 * x_1, x_6), (x_1 * x_6, x_2), (x_7 * x_3, x_7), \\ (x_4 * x_7, x_3), (x_3 x_1, x_2), (x_6 x_4, x_5) \end{array} \right. \right\rangle$$

で与えられる. $X := \mathbb{Z}_2 \times R_3$ を二面体カンドル R_3 の付随 MCQ とする. ここで, R_3 を巡回群 $\langle t | t^3 \rangle$ とみなす. $\rho : MCQ(H) \rightarrow X$ を図 4 で表される X -表現 (X -彩色) とする. ここで, 図 4 の下線付きで表される X の元は X -表現 ρ を表す. MCQ Alexander pair $f_1, f_2 : X \times X \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(t^3 - 1)$ を

$$f_1((a, x), (b, y)) = \begin{cases} 1 & (b = 0), \\ -x^{-1}y & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

$$f_2((a, x), (b, y)) = \begin{cases} 0 & (a = 0), \\ -1 - xy^{-1} & (a = 1, b = 0), \\ 1 + xy^{-1} & (a = 1, b = 1) \end{cases}$$

で定める. このとき,

$$A(H, \rho; f_1, f_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より,

$$\Delta_d(H, \rho; f_1, f_2) = \begin{cases} 0 & (d < 2), \\ 4 & (d = 2), \\ 1 & (d > 2) \end{cases}$$

を得る. 一方, 種数 1 と種数 2 の 2 成分からなる自明なハンドル体絡み目 O , 及び任意の MCQ 表現 $\rho_0 : MCQ(O) \rightarrow X$ に対し,

$$\Delta_d(O, \rho_0; f_1, f_2) = \begin{cases} 0 & (d \leq 2), \\ 1 & (d > 2) \end{cases}$$

である. よって, 定理 3.3 より, $H \not\cong O$ である.

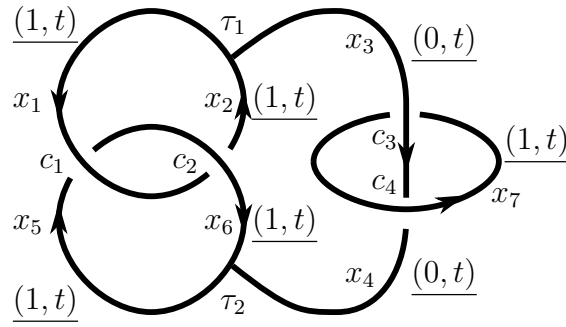


図 4: $D : H$ の Y-orientation が与えられたダイアグラム.

参考文献

- [1] A. Ishii, *Moves and invariants for knotted handlebodies*, Algebr. Geom. Topol. 8 (2008), 1403–1418.
- [2] A. Ishii, *A multiple conjugation quandle and handlebody-knots*, Topology Appl. 196 (2015), 492–500.
- [3] A. Ishii, *The fundamental multiple conjugation quandle of a handlebody-link*, preprint.
- [4] A. Ishii and K. Oshiro, *Twisted derivatives with Alexander pairs for quandles*, preprint.
- [5] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Alg. 23 (1982) 37–65.
- [6] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. (N.S.) 119 (161) (1982) 78–88.
- [7] T. Murao, *Linear extensions of multiple conjugation quandles and MCQ Alexander pairs*, to appear in J. Algebra Appl. (Online Ready)