

折り目写像の特異性に関する違いと多様体の情報の違いの関係 について

(On relations between difference on the singularity of fold maps
and that on information of the manifolds)

*†‡北澤 直樹 (Naoki Kitazawa)

本稿は研究集会「結び目の数理 III」の著者の講演内容の報告である。講演のスライド (http://www.math.twcu.ac.jp/mathsciknot3/msk3_slides/Kitazawa.pdf) は英語であり、用語も英語であったが、講演で英語で説明したものについて適宜触れながら、日本語で執筆させて頂く。本稿は、かなり、第 17 回数学総合若手研究集会 (<https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/wakate/mcy/2021/ja/index.html>) の予稿として提出中で発表予定の [18] を基にしておりオーバーラップする記述も大変多いと思われる。なお、著者の至らなさからの誤りや記述をよくできる部分は多くあるかもしれない、その場合には教えて頂ければ幸いである。

1 導入。

(k を 2 以上の整数として C^k 級の) 多様体上に必ずたくさんある良い C^k 級関数である Morse 関数について、特異点、つまり微分が退化するような定義域多様体の点から、多様体のホモロジー群やいくらかのホモトピー的性質が分かるというのは古典的な Morse 理論としてよく知られている。では値域の次元を上げるとどうなるか？すると、落ちてしまう情報がいくらか減りより深い情報が分かることがある。例えば、Reeb の定理が示すように、球面は大体特異点を丁度 2 個有する Morse 関数を許容する閉多様体として位相的に特徴づけられるが、高次元版といえるものを考えると、可微分構造に関する制限が出てくることがある。この関数を自然に一般化したクラスの写像は、special generic 写像とよばれる。このクラスや、Morse 関数の自然な高次元化である折り目写像の自然なクラスを考えると多様体の位相や可微分構造がしばしば制限を受けることがある。これにより写像の特異性の違いと多様体の違いの間に関係性が出てくる。なお、折り目写像やそれに特異点の理論の意味で近いような可微分写像について、特異点の集合や特異値つまり逆像が特異点を含むような点の集合は、基本的に定義域多様体や値域 (の空間) の部分多様体や値域にはめ込まれた多様体となるが、そのあたりに「結び目」との関連性がある (しまだあるはずである)。関連して、具体的ところで、低次元の幾何学には、既にいくらか主に平面への折り目写像やより一般の良い可微分写像 (いわゆる ジェネリックな写像や安定写像) を絡めた研究がある。そして今回、著者にとっては大変うれしいこと、この折り目写像やいわゆるより一般のジェネリックな写像や安定写像 (やそれらに近いもの) を主に 3 次元閉多様体やその中の結び目や 4 次元の閉多様体の位相や可微分構造の理解へと応用しているものと考えられる話が多かった。話を戻し、著者は述べた写像の特異性の違いと多様体の違いの間の関係について、新たに具体例を見つけたり、最近では一

* 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 (Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University)

† n-kitazawa@imi.kyushu-u.ac.jp

‡ <https://naokitazawa.github.io/NaokiKitazawa.html> (HP)

般的な捉え方を検討している。既にいくつかこの毎年恒例の結び目に関わるトポロジー幾何学数学に関する研究集会で発表させて頂いた内容、新たな内容について、講演ではいくつか紹介させて頂いた。本稿では、講演に関連する話を、講演の流れを尊重しながら、講演では触れなかった部分等も含め説明する。

2 可微分写像と特異点と折り目写像。

多様体やその間の写像は特に指示のない限り滑らかつまり C^∞ 級とする。多様体の間の写像は、言い換えれば、任意の点でいくらでも微分できるものである。多様体間の写像 $f: M \rightarrow N$ について微分 $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ の階数が $\min\{\dim M, \dim N\}$ より低いような点 $p \in M$ を f の特異点とよぶ。 f の特異点全体の集合を f の特異点集合と呼び $S(f)$ と表記する。 $f(S(f))$ を f の特異値集合、値域におけるその補空間を f の正則値集合と呼ぶ。特異値集合、正則値集合上の点をそれぞれ f の特異値、正則値と呼ぶ。今後 $m \geq n \geq 1$ を整数とし M を連結な m 次元コンパクト多様体、 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ を滑らかな写像とする。早速、Morse 関数、折り目写像を導入する。

Definition 1. 前の写像 f で $n = 1$ とする。特異点が境界上になく、各特異点 p のまわりで、適切な座標とある整数 $0 \leq i(p) \leq m$ があり $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{j=n}^{m-i(p)} x_j^2 - \sum_{j=m-i(p)+1}^m x_j^2 + f(p)$ という形で表せるとき、 f は Morse 関数であるという。

Definition 2. 前の写像 f で、多様体 M は閉多様体で、各特異点 p のまわりで、適切な座標とある整数 $0 \leq i(p) \leq \frac{m-n+1}{2}$ があり $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \sum_{j=n}^{m-i(p)} x_j^2 - \sum_{j=m-i(p)+1}^m x_j^2)$ という形で表せるとき、 f は折り目写像 (fold map) であるという。

折り目写像で $n = 1$ の場合が、他ならぬ閉多様体上の Morse 関数の場合である。

Proposition 1. Definition 1 で、各特異点において特異値の周辺でもとの値域の実数全体の空間における大小で定まる順序を保つように座標がとれる。それで考えた場合 $i(p)$ は一意。さらに特異点は離散的に現れる。そして、Definition 2 で、 $i(p)$ は一意で、決まった指数の特異点全体の集合は $n - 1$ 次元の境界のない閉部分多様体でそこへ制限するとはめ込みになる。

これら一意に定まる $i(p)$ を p の指数とよぶ。図 1 で、簡単な Morse 関数の例として、 $\mathbb{R}^{m+1}$ の中の m 次元単位球面の高さを考えて得られる関数と 2 次元トーラスの 3 次元空間にある自然なやり方で埋め込み高さを考え得られる関数を図示する。図 2 で折り目写像の例として、単位球面の射影と平面への $S^2 \times S^{m-2}$ 上の折り目写像の (特異値集合の) 像を正則値の逆像の多様体とともに示した。後者はいずれも後ほど重要な例として触れられる。Morse 関数について、詳細は例えば [21]、[22]、[30] 等を参照のこと。折り目写像については、いわゆる一般的な可微分写像の特異点の理論に関する有名な教科書である [7] や、具体的な折り目写像と定義域多様体の位相や可微分構造の関係に関する研究が推進されだしたといえる 1990 年代の、初期の論文 [25] 等を参照のこと。

3 Morse 関数折り目写像と多様体の位相。

Fact 1. 各特異点で値の異なる Morse 関数は、任意のコンパクト可微分多様体についてその上の可微分関数の空間に (Whitney 位相が入っているという状況のもと) 稠密に存在する。

Whitney 位相については詳しくは [7] 等を参照のこと。

Fact 2 (Reeb の定理 ([24])). 4 次元でない閉多様体の特異点を丁度 2 個有する Morse 関数を許容するのは、それが球面に同相であるときかつその時に限る。4 次元の時は "球面に同相" が "単位球面に微分同相" と

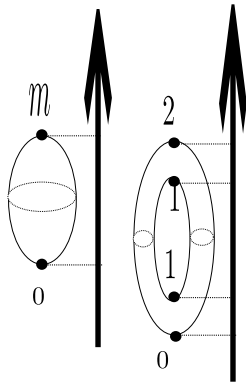


図1 簡単な Morse 関数 (数字は Definition 1 で定義した特異点の指数)。

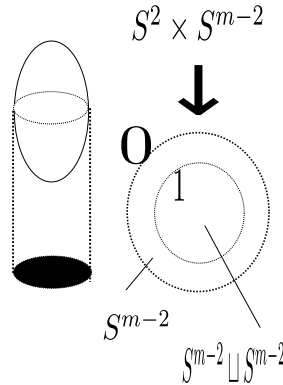


図2 簡単な折り目写像 (後者の 0 と 1 は Definition 2 で定義した折り目写像の特異点の指数)。

なる。

Fact 3. 閉多様体の j 次の整係数ホモロジー群の階数は、Morse 関数の値域の順序も考慮した場合の指数 j の特異点の個数で上から評価できる。また単連結で整係数ホモロジー群が自由なものなどある程度単純なものは、これら特異点の個数が整係数ホモロジー群の階数と一致するようにできる。

例えば図1の例を確認してみるとよい (円周やトーラスは単連結ではないが後半の良い性質は成立する)。

値域が一般次元のユークリッド空間の場合の折り目写像の存在について少しだけ触れる。次元が2以上の閉多様体が平面への折り目写像を許容するための必要十分条件は、オイラー数が偶数であることである ([31] や [35] 等)。一般的な研究としては [5]、[6] 等が有名である。

4 Special generic 写像と同心円形折り目写像。

今後多様体をファイバーとする束や多様体の (境界) 連結和が出てくることが多くなるが、これらもすべて滑らかなカテゴリーで考える。

4.1 Special generic 写像と多様体の位相や可微分構造。

Definition 3. 特異点の指数が常に0であるような折り目写像を special generic 写像と呼ぶ。

Reeb の定理の Morse 関数や単位球面の射影を自然に含むクラスとなる。

Fact 4 ([2]、[26]、[27]、[36]。). 次元が2以上の球面と同相な可微分多様体で4次元でないもの、または4次元の単位球面は、平面への special generic 写像を有する。さらに特異点集合に制限すると円周の埋め込みとなり像が2次元の球体となるようなものとできる。次元が4以上の単位球面と同相だが微分同相でない多様体は、自身より $k = 1, 2, 3$ 次元低いユークリッド空間への special generic 写像を許容しない。また7次元の向きの入った、球面と同相な可微分多様体は、向きを保つ微分同相写像の存在を法として28種類あるが、そのうち14種類のものは $\mathbb{R}^3$ への special generic 写像を許容しない。

7次元の球面の可微分構造については、有名な [20] 続く [4] さらには [30] にも関連解説がある。

Example 1. 整数 $m > n \geq 2$, $l > 0$, l 個の整数 $1 \leq k_j \leq n-1$ ($1 \leq j \leq l$) が与えられているとする。単位球面と微分同相な球面の直積 $S^{k_j} \times S^{m-k_j}$ l 個の連結和で得られる多様体は、単位球面 S^{k_j} と単位球体

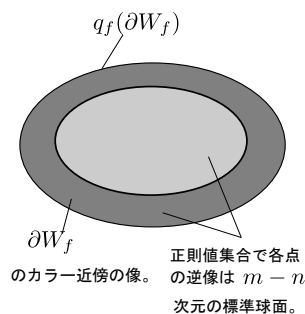


図3 Proposition 2 の special generic 写像の像と逆像他 ($\bar{f}$ が埋め込みであるようなものを考えている)。

D^{n-k_j} の直積 l 個の境界連結和で得られる多様体と微分同相な多様体を像とする、特異点集合に制限すると埋め込みで、特異値集合が写像の像の境界であるような、 $\mathbb{R}^n$ への special generic 写像を許容する。

一般に次が成り立つ。

- Proposition 2** ([26]).
1. $m > n \geq 1$ とし、 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ を special generic 写像とする。このとき f はある n 次元コンパクト多様体 W_f への全射 $q_f : M \rightarrow W_f$ で $q_f(S(f)) = \partial W_f$ を満たすものとほめ込み $\bar{f} : W_f \rightarrow \mathbb{R}^n$ の合成となる。
 2. $m > n \geq 1$ とする。 n 次元コンパクト連結多様体 W_N とほめ込み $\bar{f}_N : W_N \rightarrow \mathbb{R}^n$ があるとする。このとき m 次元閉連結多様体 M と special generic 写像 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ で前述のように W_N への全射 $q_{f,N} : M \rightarrow W_N$ で $q_{f,N}(S(f)) = \partial W_N$ と $f = \bar{f}_N \circ q_{f,N}$ 、そして次を満たすようなものが得られる。
 - (a) $q_{f,N}$ を ∂W_N の適当な小さなカラー近傍の逆像へ制限したものと境界への自然な射影の合成は、自明な線形束を与える。
 - (b) $q_{f,N}$ を前述のカラー近傍の内部の補空間の逆像に制限したものは、自明な、ファイバーが S^{m-n} であるような束を与える。

図3で Proposition 2 の写像の像や逆像や構造を示しておく。

- Fact 5.**
1. ([25].) 円周上の、special generic 関数を許容するような多様体をファイバーとする束の全空間の連結和として得られる多様体は、平面への special generic 写像を許容する多様体として特徴づけられる。
 2. ([28], [29].) 4 次元の同相な閉連結多様体の組で次を満たすものがある。
 - (a) 二つの多様体は $\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容する。
 - (b) 二つの多様体の丁度一個が $\mathbb{R}^3$ への special generic 写像を許容する。

Fact 4 と 5 は、値域の次元が一般の場合 special generic 写像が、多様体の位相や可微分構造に強い制限を与えることを具体的に示す。

4.2 同心円形折り目写像。

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^k$ 上の点 p について $\|p\|$ で原点からの距離を表す (標準的な距離を考える)。

Definition 4 ([9], [10].). 折り目写像 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ が次のいずれかを満たすとき、同心円形(round) であるという。

1. $n = 1$ で、 $f|_{S(f)}$ は埋め込みで f の正則値 a と微分同相写像の組 $(\Phi : f^{-1}((-\infty, a]) \rightarrow$

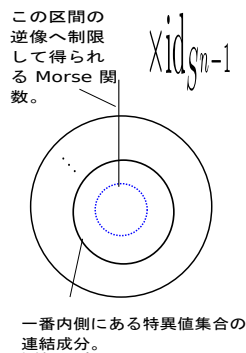


図 4 大域的に自明なモノドロミーを持つ同心円形折り目写像の (特異値集合の) 像、正則値集合のうち一番内側の連結成分の中の n 次元の標準閉球体の内部と逆像を値域から取り除いたところでの写像の構造: Morse 関数と $n-1$ 次元の標準的な球面上の恒等写像の直積とみなせる。なお内部を除くためにとった閉球体の境界は青い点で描かれた円周で示されている。

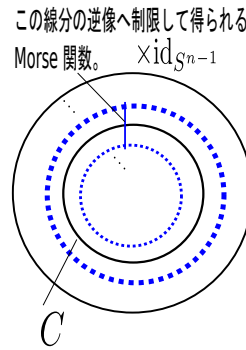


図 5 特異値集合の連結成分ごとに自明なモノドロミーを持つ同心円形折り目写像の (特異値集合の) 像、任意の特異値集合の連結成分 C の閉管状近傍の逆像上にもとの写像を制限して得られる写像の構造: Morse 関数と $n-1$ 次元の標準的な球面上の恒等写像の直積とみなせる。閉管状近傍は二個の青い点で描かれた円周で囲まれた部分。

$f^{-1}([a, +\infty)), \phi : (-\infty, a] \rightarrow [a, +\infty))$ で $f|_{f^{-1}([a, +\infty))} \circ \Phi = \phi \circ f|_{f^{-1}((-\infty, a])}$ を満たすものがとれる。

2. $n \geq 2$ で、 $f|_{S(f)}$ は埋め込みで正の整数 l と微分同相写像 $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ があり $(\phi \circ f)(S(f)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \in \mathbb{N}, 1 \leq \|x\| \leq l\}$ とできる。

Definition 5. 同心円形折り目写像 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ を考える。

1. $n = 1$ であるか、 $n \geq 2$ で Definition 4 において $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \geq \frac{1}{2}\}$ の $\phi \circ f$ による逆像への $\phi \circ f$ の制限と $x \mapsto \frac{1}{\|x\|}x$ で与えられる写像の合成で定まる写像が自明な束を与えるとき、 f は大域的に自明なモノドロミーを持つという。
2. $n = 1$ であるか、 $n \geq 2$ で Definition 4 において $\{x \in \mathbb{R}^n \mid j - \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq j + \frac{1}{2}\}$ の $\phi \circ f$ による逆像への $\phi \circ f$ の制限と $x \mapsto \frac{1}{\|x\|}x$ で与えられる写像の合成で定まる写像が各整数 $1 \leq j \leq l$ において自明な束を与えるとき、 f は特異値集合の連結成分ごとに自明なモノドロミーを持つという。

図 4 と 5 で Definition 5 の写像の像や構造を説明した (実は関数と球面上の恒等写像の直積になるという部分はより強い条件である: 深入りすると大変難しい部分であり今回の内容では "関数と球面上の恒等写像の直積になる" という表現で自明性を扱って問題ない)。

同心円形折り目写像の具体的な構成に挑み以下を得てきた。これらは過去にこの「結び目の数学 (理)」含め多くの研究集会等でも発表している。

Theorem 1 ([8], [9], [11]). $m > n \geq 1$ とし、 Σ を $m-n$ 次元の特異点を丁度 2 個有する Morse 関数を許容する球面とする。 m 次元閉連結多様体 M について次は同値。

1. M は S^n 上の Σ をファイバーとする束の全空間。
2. M は $n = 1$ で特異点が丁度 4 個有するか $n \geq 2$ で特異点集合の連結成分が 2 個であるような大域的に自明なモノドロミーを持つ同心円形折り目写像 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ で、Definition 4 における $\phi \circ f$ による正則値 a ($n = 1$ の場合) か 0 ($n \geq 2$ の場合) の逆像が $\Sigma \sqcup \Sigma$ と微分同相であるようなものを許容

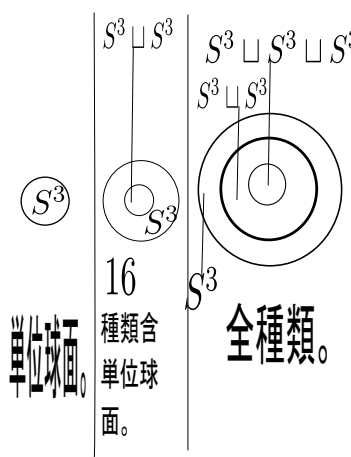


図6 Corollary 1 の折り目写像の (特異値集合の) 像と正則値の逆像 (下は定義域に現れ得る 7 次元球面の種類を表す)。

する。

これは、図 2 の後者の平面への折り目写像を含むクラスで、基本的な多様体の族を特徴づけている Theorem といえる。

Theorem 2 ([8], [9]). $m > n$ とし、 m 次元閉連結多様体 M を S^{m-n} をファイバーとする S^n 上の束の全空間の連結和として得られる多様体とする。 M は特異値集合の連結成分ごとに自明なモノドロミーを持つ同心円形折り目写像 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ で次を満たすものを許容する。

1. $n = 1$ で特異点を丁度 $2(l+1)$ 個有するか $n \geq 2$ で特異点集合の連結成分が $l+1$ 個。また特異点の指数は 0 か 1。
2. 正則値の逆像が単位球面と微分同相な多様体の非交和で、Definition 4 における $\phi \circ f$ による正則値 a ($n = 1$ の場合) か 0 ($n \geq 2$ の場合) の逆像の連結成分数が $l+1$ 個。

そして $m \geq 2n$ ならばこの Theorem は逆も成立する。

Corollary 1 ([9]). 7 次元の球面と同相な多様体は $\mathbb{R}^4$ への、Theorem 2 の条件を満たすような写像を許容する。特に特異点集合の連結成分数を 1 個のものを許容するのは、単位球面と微分同相なもののみで、2 個のものを許容するのは (向きを保つ微分同相写像を法として考えた場合) 単位球面を含む 16 種類のもののみである。そして全ての 7 次元の球面と同相な多様体は、 $\mathbb{R}^4$ への特異点集合の連結成分数が $l \geq 3$ 個のものを許容する。

この Corollary は、special generic 写像の Fact 4 や 5 にあたるようなものを新たな折り目写像のクラスで発見したことを意味する。この Corollary に出てくる写像を図 6 で示す。

5 高次元閉単連結多様体上の折り目写像。

一般に具体的な多様体に具体的な可微分写像を構成するのは存在を知ることと違った難しさがあり、また簡単な多様体上の構成でも難しい中、今回いくらか構成に成功してきていることを説明してきている。一般の高次元特に次元が 7 以上の閉単連結多様体を具体的に折り目写像の構成を通して得られるかという問題について考えたい。

Remark 1. [1] によれば 5 次元の閉単連結位相多様体は完全に可微分構造まで込めて分類されている。[23] がこれらに対しユークリッド空間への special generic 写像の存在非存在を完全に決定している (Theorem 5 と 6 に関連)。6 次元の場合も重要で分類に関してはやや複雑だが [32] 等ある程度知られた結果はあり、続きというべき結果は出せそうである。が、6 次元には 5 や 7 次元にはない難しさもある。

さて、高次元の閉単連結多様体は、ホモトピー論、[33] で解説されている手術理論など高度な代数的抽象的な道具を介しある意味完全な分類がなされている。また 7 次元に関しては、最近でもいわゆるコボルディズム理論等代数トポロジーを具体的に駆使して [3] や [19] や [34] 等で進められている。一方これらをより幾何的構成的に理解することは大変難しい。このような状況で、講演者はさらに進んで具体的に折り目写像を構成し、多様体の無限族もいくつか得たので紹介する。

Theorem 3 ([12], [13]). a, b, c を非負整数として、 $A := \mathbb{Z}^a, B := \mathbb{Z}^b, C := \mathbb{Z}^c$ とし $\{a_{i,j}\}_{j=1}^a$ を b 個の長さ a の整数列とする ($1 \leq i \leq b$ は整数)。 $\{h_{i,j}\}$ を (i,j) 成分が整数 $h_{i,j}$ で対角成分が 0 である b 次正方形行列とする。さらに $p \in B \oplus C$ とする。このとき 7 次元閉単連結スピンド様体 M と折り目写像 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^4$ があり次を満たす。

1. コホモロジー群は最後の群と適切に同一視して $H_2(M; \mathbb{Z}) \cong H^2(M; \mathbb{Z}) \cong A \oplus B, H_4(M; \mathbb{Z}) \cong H^4(M; \mathbb{Z}) \cong B \oplus C$ という同型がある。そして以下が成立する。
 - (a) $A \oplus \{0\} \subset H^2(M; \mathbb{Z})$ の元同士の積は 0。適切な $A \oplus \{0\} \subset H^2(M; \mathbb{Z})$ の基底 $\{(a_j^*, 0)\}_{j=1}^a$ と $\{0\} \oplus B \subset H^2(M; \mathbb{Z})$ の基底 $\{(0, b_j^*)\}_{j=1}^b$ があり、 $(a_{j_1}^*, 0)$ と $(0, b_{j_2}^*)$ の積は $(a_{j_2, j_1} b_{j_2}^*, 0) \in B \oplus \{0\} \subset H^4(M; \mathbb{Z})$ で $(0, b_{j_1}^*)$ と $(0, b_{j_2}^*)$ の積は $(h_{j_1, j_2} b_{j_2}^* + h_{j_2, j_1} b_{j_1}^*, 0) \in B \oplus \{0\}$ となる。
 - (b) M の 1 次の Pontryagin 類は $4p \in H^4(M; \mathbb{Z})$ 。
2. f の特異点の指数は 0 か 1 で、正則値の逆像は S^3 3 個以下の非交和。特に h が零行列の時、 f の特異点集合への制限は埋め込みで、正則値の逆像は S^3 2 個以下の非交和になるようにできる。さらに h が零行列ではない時には、この零行列の場合に得られるものと同相になりえない 7 次元の多様体を得られる。

定義域値域の次元対やコホモロジー群の次元が一般の場合も、適切な状況で同様の定理ができる。

Theorem 4 ([14]). 1. 整係数コホモロジー環が $\mathbb{C}P^2 \times S^3$ のそれと同型。

2. $\mathbb{R}^4$ への大域的に自明なモノドロミーを持つような同心円形折り目写像を許容する。

という性質を満たす、7 次元閉単連結スピンド様体の可算無限族 $\{M_j\}$ で、 $j_1 \neq j_2$ であれば M_{j_1} と M_{j_2} は同相でないようなものがある。さらに Theorem 1–3 ではこれらの多様体と同相なものは定義域になり得ない。

より詳しく、Theorem 4 で、同心円形折り目写像は具体的に構成されるが、図 7 のようになる。実は、プレプリント [34] が正しいければ、 $\{M_j\}$ は、7 次元閉単連結スピンド様体で整係数コホモロジー環が $\mathbb{C}P^2 \times S^3$ のそれと同型なものすべてを (微分同相写像の存在を法として) 含むようにできる (ただし同時に構成される同心円形折り目写像はほんの少し複雑になりうる)。

最後に、special generic 写像を許容する値域のユークリッド空間について知られた結果、最近得た、多様体の違いと special generic 写像を許容するユークリッド空間の次元の違いが強く関係していることを示唆する具体的な結果を紹介する。

Theorem 5 ([25], [23] 他.). 4 または 5 次元の閉単連結多様体は、 S^2 上の標準球面をファイバーとする滑らかな束の全空間の連結和として表される時、かつその時に限り、 $\mathbb{R}^3$ への special generic 写像を許容す

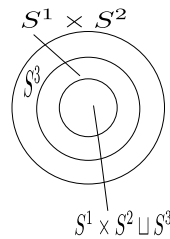


図7 Theorem 4 の同心円形折り目写像の特異値集合の像と正則値の逆像 (値域は 4 次元)。

る。5 次元の場合は値域を $\mathbb{R}^4$ に変えても同様の主張が成り立つ。

Theorem 6 ([23]). 次元が 5 以上の閉単連結多様体は、2 次の整係数ホモロジー群が自由でないとき、次元が 4 以下のユークリッド空間への special generic 写像を許容しない。

Theorem 7 ([16], [17]). $l > 0$ を正の整数、 $\{G_j\}_{j=0}^9$ を長さ 10 の有限生成可換群の列で以下を満たすものとする。

1. $G_j = G_{9-j}$ が $0 \leq j \leq 9$ で成立。
2. $G_0 = \mathbb{Z}$ で $G_1 = \{0\}$ 。
3. G_2 のねじれ部分群は位数 2 の可換群 $2l$ 個の直和と同型。
4. G_j は $j \neq 2, 6$ で自由。 G_4 と G_5 の階数は $2l$ 以上。

このとき 9 次元の閉単連結多様体の組 (M_1, M_2) で次を満たすものがある。

1. 整係数ホモロジー群について $i = 1, 2$, $0 \leq j \leq 9$ で $H_j(M_i; \mathbb{Z})$ は G_j と同型。
2. 有理係数コホモロジー環は互いに同型。
3. いずれの多様体についても 0 次以外の Stiefel-Whitney 類と Pontryagin 類は零である。
4. M_1 は次元 $n \geq 4$ のユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ への special generic 写像を許容しないが $\mathbb{R}^5$ へはする。さらにその写像の特異点集合への制限は埋め込みにできる。
5. M_2 は次元 $n \geq 5$ のユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ への special generic 写像を許容しないが $\mathbb{R}^6$ へはする。

関連して、この結果につながる [15] 等も参考にされると良い。

6 今後のための問題。

Problem 1. 写像の特異性の違いと多様体の違いの間の関係について、うまく説明している具体例を新たに発見せよ。またこういった現象の一般的な良い捉え方を探れ。

Problem 2. より広いクラスの (高次元閉単連結) 多様体を、具体的に低次元空間への折り目写像より一般の良い可微分写像を構成して得られるか？ ほぼ同じこと、一般に、強力な、折り目写像やより広いクラスの良い可微分写像そして (定義域) 多様体の構成方法を見つけ出せるか？

7 謝辞。

改めて講演の機会を下さった世話人の大山先生、新國先生、日頃から研究を支えて下さっている、ホスト教員の佐伯先生他先生方や同僚にも感謝申し上げたい。また講演で質問をして下さった先生方、講演を聴講して

下さった皆様、逆に大変興味深い講演をして下さり時に稚拙な質問に対し答えて下さった講演者の方々、世話人の先生方に加え研究集会をサポートされた方々等にも感謝申し上げます。このご時世オンラインで話すことくらいしかできずなかなか会えない、研究生活をあらゆる意味でサポートして下さっている家族友人にも感謝申し上げます。

新型コロナウイルス感染症の猛威はなかなか収まらないが、それでも皆前へ進んできていることは確かであろう。その中で今回、オンラインで毎年恒例の結び目に関連する数理科学に関する本研究集会が開催できたこと、来年以降も(うまくいけば対面も加える形で)開催できそうなこと、大変喜ばしく思う。

著者は KAKENHI Grant Number JP17H06128 "Innovative research of geometric topology and singularities of differentiable mappings" より給与そしてそれとは別に補助を受けている。そして、紹介してきた研究結果の多くは、これらとは独立に「2020 年度笹川科学研究助成」(2020-2002)のもと実施した研究によるものである。

参考文献

- [1] D. Barden, *Simply Connected Five-Manifolds*, Ann. of Math. (3) 82 (1965), 365–385.
- [2] E. Calabi, Quasi-surjective mappings and a generation of Morse theory, Proc. U.S.-Japan Seminar in Differential Geometry, Kyoto, 1965, pp. 13–16.
- [3] D. Crowley and J. Nordström, *The classification of 2-connected 7-manifolds*, Proc. London. Math. Soc. 119 (2019), 1–54, arxiv:1406.2226.
- [4] J. J. Eells and N. H. Kuiper, *An invariant for certain smooth manifolds*, Ann. Mat. Pura Appl. 60 (1962), 93–110.
- [5] Y. Eliashberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR Izv. 4 (1970). 1119–1134.
- [6] Y. Eliashberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, Math. USSR Izv. 6 (1972). 1302–1326.
- [7] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics (14), Springer-Verlag (1974).
- [8] N. Kitazawa, *On round fold maps* (in Japanese), RIMS Kokyuroku Bessatsu B38 (2013), 45–59.
- [9] N. Kitazawa, *On manifolds admitting fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Doctoral Dissertation, Tokyo Institute of Technology (2014).
- [10] N. Kitazawa, *Fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Hokkaido Mathematical Journal Vol.43, No.3 (2014), 327–359.
- [11] N. Kitazawa, *Round fold maps and the topologies and the differentiable structures of manifolds admitting explicit ones*, submitted to a refereed journal, arXiv:1304.0618 (the title has changed).
- [12] N. Kitazawa *Notes on explicit smooth maps on 7-dimensional manifolds into the 4-dimensional Euclidean space*, submitted to a refereed journal, arxiv:1911.11274.
- [13] N. Kitazawa *Explicit fold maps on 7-dimensional closed and simply-connected manifolds of new classes*, arxiv:2005.05281.
- [14] N. Kitazawa, *7-dimensional simply-connected spin manifolds whose integral cohomology rings are isomorphic to that of $CP^2 \times S^3$ admit round fold maps*, submitted to a refereed journal, arxiv:2007.03474.
- [15] N. Kitazawa, *Closed manifolds admitting no special generic maps whose codimensions are negative and their cohomology rings*, arxiv:2008.04226.
- [16] N. Kitazawa, *Notes on explicit special generic maps into Euclidean spaces whose dimensions are*

- greater than 4, arxiv:2010.10078.
- [17] N. Kitazawa, *The images of special generic maps of several classes*, arxiv:2011.12066.
 - [18] 北澤 直樹, Morse 関数折り目写像を介した高次元多様体のより幾何学的構成的な理解, 「第 17 回数学総合若手研究集会」のシングルセッション (専門家のみならず一般の数学系や周辺の応用系の主に若手の研究者向けのセッションで講演申請し採用) 用予稿として提出しており発表予定.
 - [19] M. Kreck, *On the classification of 1-connected 7-manifolds with torsion free second homology*, to appear in the Journal of Topology, arxiv:1805.02391.
 - [20] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. (2) 64 (1956), 399–405.
 - [21] J. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematic Studies AM-51, Princeton University Press; 1st Edition (1963.5.1).
 - [22] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1965.
 - [23] M. Nishioka, *Special generic maps of 5-dimensional manifolds*, Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées, Volume LX No.4 (2015), 507–517.
 - [24] G. Reeb, *Sur les points singuliers d’une forme de Pfaff complètement intégrable ou d’une fonction numérique*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l’Académie des Sciences 222 (1946), 847–849.
 - [25] O. Saeki, *Notes on the topology of folds*, J. Math. Soc. Japan Volume 44, Number 3 (1992), 551–566.
 - [26] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. 49 (1993), 265–293.
 - [27] O. Saeki, *Topology of special generic maps into $\mathbb{R}^3$* , Workshop on Real and Complex Singularities (Sao Carlos, 1992), Mat. Contemp. 5 (1993), 161–186.
 - [28] O. Saeki and K. Sakuma, *On special generic maps into $\mathbb{R}^3$* , Pacific J. Math. 184 (1998), 175–193.
 - [29] O. Saeki and K. Sakuma, *Special generic maps of 4-manifolds and compact complex analytic surfaces*, Math. Ann. 313, 617–633, 1999.
 - [30] 田村 一郎, 微分位相幾何学, 岩波オンデマンドブックス, 2015/7/10, 岩波書店.
 - [31] R. Thom, *Les singularités des applications différentiables*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 6 (1955–56), 43–87.
 - [32] C. T. C. Wall, *Classification problems in differential topology. V. On certain 6-manifolds*, Invent. Math. 1 (1966), 355–374.
 - [33] C. T. C. Wall, *Surgery On Compact Manifolds*. Second Edition, Edited by A. A. Ranicki, <http://www.math.uchicago.edu/~shmuel/tom-readings/Wall,%20Surgery%20on%20Compact%20Manifolds.pdf>.
 - [34] X. Wang *On the classification of certain 1-connected 7-manifolds and related problems*, arXiv:1810.08474.
 - [35] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces: I, mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math. 62 (1955), 374–410.
 - [36] D. J. Wrazidlo, *Standard special generic maps of homotopy spheres into Euclidean spaces*, Topology Appl. 234 (2018), 348–358, arxiv:1707.08646.