Khovanov homologies of some pretzel knots

結び目の数理 III

吉田純*

December 25, 2020

概要

Khovanov homology was developed by Khovanov in 2000 as a categorification of the Jones polynomial. In a recent paper, the speaker found a brand-new method for the computation of Khovanov homology based on a categorified analogue of Vassiliev skein relation, which was constructed in a joint work with N. Ito. In this talk, we will see how it works in computation of Khovanov homologies of some pretzel knots.

1 イントロダクション

Khovanov ホモロジーは [Khovanov, 2000] にて導入された絡み目不変量である。より具体的には、Khovanov は各絡み目図式 D に対して、二重次数付きの鎖複体 $C^{*,\star}(D)$ を構成し、その各次数毎のホモロジー群が Reidemeister 移動によって不変であることを示した。 D が絡み目 L の図式である時、このホモロジー群を $Kh^{*,\star}(L)$ と書く。Khovanov ホモロジーの最も重要な性質は、その次数付き Euler 数が以下の式の意味で Jones 多項式 $V(L)$ を復元することである:

$$\sum_{i,j}(-1)^i q^j \dim_{\mathbb{Q}} Kh^{i,j}(L)\otimes\mathbb{Q} = (t^{1/2}+t^{-1/2})V(L)\Big|_{t=q^2} \quad . \tag{1.1}$$

この性質により、Khovanov ホモロジーは標語的に **Jones 多項式の圏化**であると呼ばれる。特に Khovanov ホモロジーは**量子不変量**と呼ばれる不変量のクラスに数えられており、実際に [Cautis and Kamnitzer, 2008] では導来圏による圏論的な組紐群の表現から Khovanov ホモロジーが構成できることが示されている。

* 東京工業大学情報理工学院 / 東京大学大学院数理科学研究科

ところで、古典的には量子不変量は有限型不変量と密接に関係している。 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_r$ を二重点を丁度 r 個持つ特異結び目の集合とする。特に、有理数値の結び目不変量は、写像 $a : \boldsymbol{\mathcal{X}}_0 \to \mathbb{Q}$ と思うことができる。今、このような a を下の漸化式によって帰納的に $a^{(r)} : \boldsymbol{\mathcal{X}}_r \to \mathbb{Q}$ に拡張することを考える:

$$a^{(r+1)}\left(\quad\right) = a^{(r)}\left(\quad\right) - a^{(r)}\left(\quad\right) \quad . \tag{1.2}$$

実際、$a^{(r)}$ の値は二重点解消の順序によらないことは簡単に確認できる。式 (1.2) を **Vassiliev スケイン関係式**と呼び、また $a^{(r)}$ を a のr **次の Vassiliev 導分**と呼ぶ。

定義. $r \gg 0$ で $a^{(r)} \equiv 0$ となる時、a を**有限型不変量**と呼ぶ。

不定元 t についての Laurent 多項式に値を取る量子不変量 v に対し、$t = 1$ における以下の Taylor 展開を考える:

$$v(L) = \sum_n \frac{a_n(L)}{n!}(t-1)^n \quad .$$

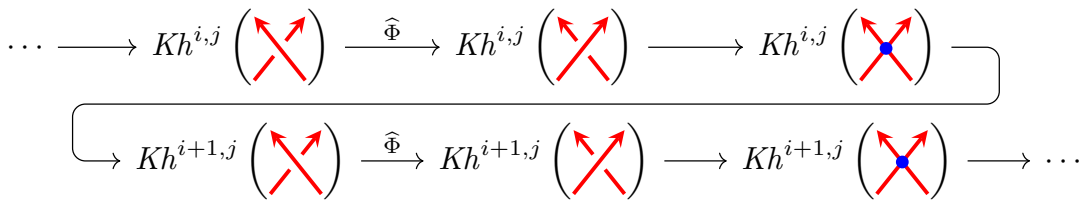
定理 1.1 ([Birman, 1993, Birman and Lin, 1993])**.** 上の状況で、各 a_n は有限型不変量である。

特に v が Jones 多項式の時、その $t = 1$ での Taylor 展開の各係数は有限型不変量である。これをふまえると、以下は自然な問題である。

問題. Khovanov ホモロジーと有限型不変量の関係を明らかにせよ。

講演者は伊藤昇氏[*1]との共同研究 [Ito and Yoshida, 2020a, Ito and Yoshida, 2020b] にて、上の問題へのアプローチを模索し、Vassiliev スケイン関係式 (1.2) を以下の長完全列へと圏化することで、Khovanov ホモロジーを特異絡み目へと拡張することに成功した:

$$\cdots \longrightarrow Kh^{i,j}\left(\quad\right) \xrightarrow{\widehat{\Phi}} Kh^{i,j}\left(\quad\right) \longrightarrow Kh^{i,j}\left(\quad\right) \longrightarrow Kh^{i+1,j}\left(\quad\right) \xrightarrow{\widehat{\Phi}} Kh^{i+1,j}\left(\quad\right) \longrightarrow Kh^{i+1,j}\left(\quad\right) \longrightarrow \cdots \tag{1.3}$$



[*1] 茨城工業高等専門学校

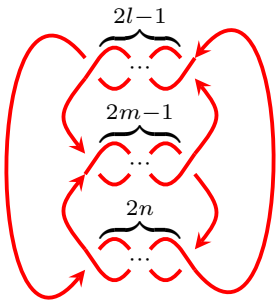


図1　Pretzel 結び目 $P(-2l+1,-2m+1,2n)$

本稿ではその結果をさらに推し進め、特異絡み目上での Khovanov ホモロジーを具体的な計算を紹介する。

最初の主結果は、Khovanov ホモロジーが、特異点に隣接する 2 本の紐の full twist に対して**安定的**であることを示している:

主定理 A. *Khovanov* ホモロジー上に以下の同型がある*:*

$$Kh^{i,j}\left(\quad\right) \cong Kh^{i+2,j+4}\left(\quad\right) \quad .$$

主定理 A と圏化された Vassiliev スケイン関係式 (1.3) を組み合わせることによって、いくつかの結び目の無限系列の Khovanov ホモロジーを決定することができる。講演者は [Yoshida, 2020] で全てのツイスト結び目の Khovanov ホモロジーを決定したが、本稿では図 1 のタイプの Pretzel 結び目の場合を取り上げる。次の結果は Pretzel 結び目の Khovanov ホモロジーがフルツイストについて安定化することを示している:

主定理 B.　(1) 以下の写像で $i > -2n+1$ または $j > -1-4n$ で同型となるものが存在する*:*

$$Kh^{i,j}(P(-3,-1,2n+2)) \to Kh^{i,j}(P(-3,-1,2n)) \quad .$$

(2) 同様に、以下の写像で $i > -2n+1$ または $j > -3-4n$ で同型となるものが存在する*:*

$$Kh^{i,j}(P(-3,-3,2n+2)) \to Kh^{i,j}(P(-3,-3,2n)) \quad ,$$

2　Khovanov ホモロジーの復習

主定理の証明をする前に、Khovanov ホモロジーを簡単に復習する。結び目図式 D に

対し、その交点の集合を $c(D)$ と書き、その部分集合 $s \subset c(D)$ のことを D 上の**ステート**と呼ぶ。各ステート $s \subset c(D)$ に対し、D の s による**平滑化 (smoothing)** D_s を D の各交点 $c \in c(D)$ の近傍を以下のルールで置き換えて得られる平面上の部分多様体とする：

定義から、D_s は円周 S^1 の有限個の非交和になることに注意する。 D 上の **enhanced ステート**とは、ステート $s \subset c(D)$ と写像

$$e : \pi_0(D_s) \to \{1, x\}$$

の組 (s, e) のことである。ここで、$\pi_0(D_s)$ は D_s の連結成分の集合である。 $|s|$ で s の濃度とし、

$$|e| \coloneqq \#\{c \in c(D) \mid e(c) = 1\} - \#\{c \in c(D) \mid e(c) = x\}$$

とおく.

定義. 上の状況で、各整数 i, j についてアーベル群 $C^{i,j}(D)$ を以下で定義する:

$$C^{i,j}(D) \coloneqq \mathbb{Z}\{(s, e) \mid |s| = i + n_-,\ |e| = j - i - w(D)\} \quad , \tag{2.1}$$

ここで、n_- と $w(D)$ はそれぞれ D の負交点の数とひねり数 (writhe) である。

今、この二重次数付きアーベル群 $C^{*,\star}(D)$ に微分

$$d^i : C^{i,j}(D) \to C^{i+1,j}(D) \tag{2.2}$$

を定義する。このために、可換環 $A = \mathbb{Z}[x]/(x^2)$ が以下の演算によって **Frobenius 代数**になることに注意する:

$$\Delta(1) = 1 \otimes x + x \otimes 1 \ , \quad \Delta(x) = x \otimes x \quad ,$$
$$\varepsilon(1) = 0 \ , \quad \varepsilon(x) = 1 \quad .$$

Frobenius 代数と 2 次元の TQFT の同値性から、A は以下のような対称モノイダル関手を定める:

$$Z_A : \mathbf{Cob}_2 \to \mathbf{Ab} \ ; \quad (S^1)^{\amalg n} \mapsto A^{\otimes n} \quad ,$$

ここで $\mathbf{Cob}_2$ と $\mathbf{Ab}$ はそれぞれ 2 $(= 1 + 1)$ 次元のコボルディズムの圏及びアーベル群の圏である。特に $Z_A(S^1) \cong \mathbb{Z}\{1, x\}$ であるが、これを $\deg 1 = 1$, $\deg x = 1$ によって次数付けすることで次数付きアーベル群とみなす。式 (2.1) より以下の同型がわかる:

$$C^{i,j}(D) \cong \bigoplus_{|s| = i + n_-} Z_A(D_s)^{j - i - w(D)} \quad .$$

さらに $c \in c(D) \setminus s$ の時、以下の写像がある:

$$\delta_c \coloneqq Z_A\left(\right) : Z_A(D_s) = Z_A\left(\right) \to Z_A\left(\right) = Z_A(D_{s\cup\{c\}}) \quad .$$

これを用いて微分 (2.2) を $d = \sum_c \pm\delta_c$ として定義する。ただし、符号の決め方は [Khovanov, 2000] や [Bar-Natan, 2002] を参照されたい。

定理 2.1 ([Khovanov, 2000])**.** 上の状況で、各整数 i, j について、ホモロジー群 $H^i(C^{*,j}(D))$ は *Reidemeister* 移動について不変である。

L が D の結び目である時、$Kh^{i,j}(L) \coloneqq H^i(C^{*,j}(D))$ と書き、L の **Khovanov ホモロジー**と呼ぶ。式 (1.1)は、式 (2.1)と Kauffman ブラケットの enhanced ステートによる記述より、直ちに従う。

さて、Vassiliev 理論の観点から、[Ito and Yoshida, 2020b] では以下の式で定義される写像が議論されている:

$$\Phi \coloneqq Z_A\left(\right) - Z_A\left(\right) : C^{*,\star}\left(\right) \to C^{*,\star-2}\left(\right) \quad .$$

定理 2.2 ([Ito and Yoshida, 2020b])**.** 上の写像 Φ は以下の鎖複体の射 $\widehat{\Phi}$ を誘導する*:*

$$\widehat{\Phi} : C^{*,\star}\left(\right) \to C^{*,\star}\left(\right) \quad .$$

さらに以下が成立する*:*

(1) $\widehat{\Phi}$ の**写像錐** $\mathrm{Cone}(\widehat{\Phi})$ のホモトピー型は、**特異絡み目図式の移動**によって不変である。これによって *Khovanov* ホモロジーは特異絡み目の不変量に拡張される*:*

$$Kh^{i,j}\left(\right) \coloneqq H^i\left(\mathrm{Cone}\left(C^{*,j}\left(\right) \xrightarrow{\widehat{\Phi}} C^{*,j}\left(\right)\right)\right) \quad . \tag{2.3}$$

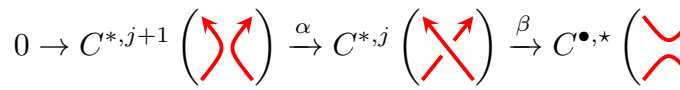
(2) 拡張された *Khovanov* ホモロジーは以下の意味で *FI* 関係式を満たす*:*

$$Kh^{*,\star}\left(\right) = 0 \quad .$$

3 主定理 A の証明

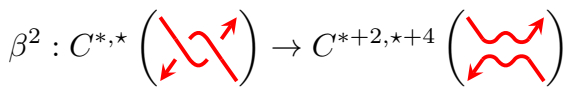
証明に入る前に、まず Khovanov ホモロジーの構成から、以下の鎖複体の短完全列が存在することに注意する:

$$0 \to C^{*,j+1}\left(\right) \xrightarrow{\alpha} C^{*,j}\left(\right) \xrightarrow{\beta} C^{\bullet,\star}\left(\right) \to 0 \quad . \tag{3.1}$$



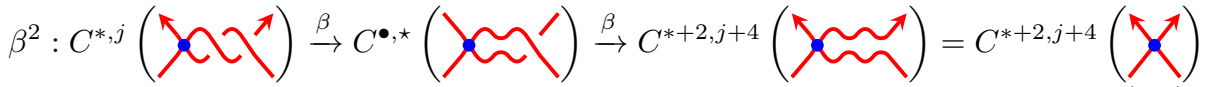
ここで、第 3 項には標準的な向きの選び方は一般には存在しないが、射 β を隣り合う 2 つの交点にそれぞれ適用することで、向きまで込めて以下の鎖複体の射を得る:

$$\beta^2 : C^{*,\star}\left(\right) \to C^{*+2,\star+4}\left(\right) \quad .$$



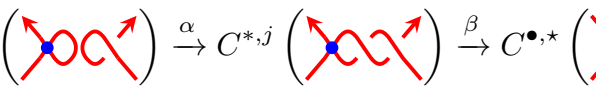
この射と定理 2.2 を用いて主定理 A を証明する。より具体的には、以下の形の β^2 がホモロジー上に同型を誘導することを示せば十分である:

$$\beta^2 : C^{*,j}\left(\right) \xrightarrow{\beta} C^{\bullet,\star}\left(\right) \xrightarrow{\beta} C^{*+2,j+4}\left(\right) = C^{*+2,j+4}\left(\right) \quad . \tag{3.2}$$



ただし、ここで第 2 項については、図式の向きを決めれば次数は一意に定まることに注意する。さて、最初の β について、完全列 (3.1) より以下の短完全列を得る:

$$0 \to C^{*,j+1}\left(\right) \xrightarrow{\alpha} C^{*,j}\left(\right) \xrightarrow{\beta} C^{\bullet,\star}\left(\right) \to 0 \quad .$$



ところが、FI 関係式 (定理 2.2 (2)) より、第 1 項のホモロジー群は自明であるから、鎖複体の短完全列が誘導するホモロジー長完全列を見ることで、この β はホモロジー群の上で同型を誘導することがわかる。同様にして、(3.2) の他方の β もホモロジー群上で同型であることがわかり、従って β^2 もホモロジー群の上に同型を誘導する。これにより、主定理 A は示された。

4 Pretzel 結び目のホモロジー

主定理 A を利用して $P(-2l+1, -2m+1, 2n)$ の形の Pretzel 結び目のいくつかの Khovanov ホモロジーを計算することができる。記号を簡単にするため、ここでは整数 l, m については固定し、$K(n) = P(-2l+1, -2m+1, 2n)$ とおく。アイデアとしては、圏化された Vassiliev スケイン関係式によって、n に関して帰納的に Khovanov ホモロジーを決定していく。

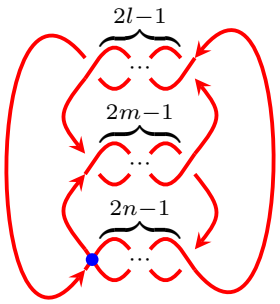


図2　$G(n)$ の図式

まず図 2 にある特異結び目図式 $G(n)$ を考える。 主定理 A から、

$$Kh^{i,j}\left(G(n+1)\right) \cong Kh^{i+2,j+4}\left(G(n)\right) \cong \ldots \cong Kh^{i+2n,j+4n}\left(G(1)\right) \quad . \tag{4.1}$$

一方、圏化された Vassiliev スケイン関係式 (1.3) より、Khovanov ホモロジーの次の完全列がある:

$$Kh^{i-1,j}\left(G(n+1)\right) \to Kh^{i,j}\left(K(n+1)\right) \xrightarrow{\widehat{\Phi}} Kh^{i,j}\left(K(n)\right) \to Kh^{i,j}\left(G(n+1)\right) \quad . \tag{4.2}$$

この完全列と同型 (4.1) により、以下が証明できる:

命題 4.1. 上の状況で、以下が成立する*:*

(1) ある整数 i_0 が存在して、整数の組 i, j について $i \geq i_0$ ならば $Kh^{i,j}(G(1)) = 0$ であるとすると、$i > i_0 - 2n$ ならば、任意の j について写像

$$\widehat{\Phi} : Kh^{i,j}\left(K(n+1)\right) \to Kh^{i,j}\left(K(n)\right) \tag{4.3}$$

は同型である。

(2) ある整数 j_0 が存在して、整数の組 i, j について $j \geq j_0$ ならば $Kh^{i,j}(G(1)) = 0$ であるとすると、$j \geq j_0 - 4n$ ならば、任意の i について写像 (4.3) は同型である。

命題 4.1 によって、実際に $Kh^{i,j}(G(1))$ を計算することで、主結果 B を確かめることができる。以下に $(l, m) = (2, 1), (2, 2)$ の場合の群 $Kh^{i,j}(G(1))$ を計算機によって求めたものを表で示す。なお、計算に用いたプログラムのソースコードは以下から入手できる:

`https://github.com/Junology/khover`

$l = 2$, $m = 1$ の時

$i\backslash j$	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1
-6	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0
-5	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0
-4	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0
-3	0	0	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0
-2	0	0	0	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}$	0	0
-1	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}$

$l = m = 2$ の時

$i\backslash j$	-17	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3
-6	$\mathbb{Z}^2$	0	0	0	0	0	0	0
-5	0	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$\mathbb{Z}^2$	0	0	0	0	0
-4	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0
-3	0	0	0	$\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0
-2	0	0	0	0	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$\mathbb{Z}^2$	0	0
-1	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}$

謝辞とお詫び

結び目の数理 III の世話人の先生方に感謝申し上げます。また、講演ではプログラムのバグを取り切れず、不完全な計算結果を提示してしまったことをお詫び申し上げます。

参考文献

[Bar-Natan, 2002] Bar-Natan, D. (2002). On Khovanov's categorification of the Jones polynomial. *Algebraic & Geometric Topology*, 2(1):337–370.

[Birman, 1993] Birman, J. S. (1993). New points of view in knot theory. *American Mathematical Society. Bulletin. New Series*, 28(2):253–287.

[Birman and Lin, 1993] Birman, J. S. and Lin, X.-S. (1993). Knot polynomials and Vassiliev's invariants. *Inventiones Mathematicae*, 111(2):225–270.

[Cautis and Kamnitzer, 2008] Cautis, S. and Kamnitzer, J. (2008). Knot homology via derived categories of coherent sheaves. I. the $\mathfrak{sl}(2)$-case. *Duke Mathematical Journal*, 142(3):511–588.

[Ito and Yoshida, 2020a] Ito, N. and Yoshida, J. (2020a). Crossing change on Khovanov homology and a categorified Vassiliev skein relation. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 29(07):2050051. arXiv:1911.09308.

[Ito and Yoshida, 2020b] Ito, N. and Yoshida, J. (2020b). Universal Khovanov homology for singular tangles and a categorified Vassiliev skein relation. arXiv:2005.12664.

[Khovanov, 2000] Khovanov, M. (2000). A categorification of the Jones polynomial. *Duke Mathematical Journal*, 101(3):359–426.

[Yoshida, 2020] Yoshida, J. (2020). Decomposition of the first Vassiliev derivative of Khovanov homology and its application. arXiv:2007.15867.