# Extension of Tong-Yang-Ma representation

高野暁弘　(東京大学大学院数理科学研究科)

**概要**

Tong-Yang-Ma 表現（あるいは標準表現）は，1996 年に D. M. Tong，S. D. Yang および Z. Q. Ma によって発見された組み紐群 $B_n$ の $n$ 次元既約表現である．この表現は Burau 表現によく似ているものだが，これまであまり研究されてこなかった．例えば，Burau 表現は様々な方法でストリング絡み目の表現へ拡張がなされてきたが，Tong-Yang-Ma 表現に関してはそのような拡張はまだされていない．よって本稿では，Tong-Yang-Ma 表現をストリング絡み目の表現へ拡張する方法を紹介する．本研究は Arthur Soulié 氏（Glasgow 大学）との共同研究 [6] である．

## 謝辞

本稿は「結び目の数理」の報告書の一部になります．本研究集会での講演の機会を頂き，世話人である大山淑之先生（東京女子大学），新國亮先生（東京女子大学）に心よりお礼申し上げます．指導教員の逆井卓也先生には非常に丁寧にご指導いただきました．この場をお借りして深く感謝申し上げます．また，共に研究を進めてくださった Arthur Soulié 氏にも大変感謝しております．最後に，講演を聞いてくださった全ての方に改めて感謝を申し上げます．

## 1　導入

組み紐群 $B_n$ とは，次のような表示を持つ群である:

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & (|i-j| \geq 2) \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & (i = 1, \ldots, n-2) \end{array} \right\rangle$$

Tong，Yang および Ma [7] は組み紐群の表現 $B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ であって，各生成元 $\sigma_i$ が

$$I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1}$$

という行列に写るようなものについて研究を行った．彼らの結果は，上のような非自明な表現は同値や転置を除いて 2 種類しかないというものである．1 つは，これ以前から知られていた Burau 表現 (生成元 $\sigma_i$ が

$$I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1}$$

に写るようなもの) であり，もう 1 つがこのとき初めて発見された表現で，生成元 $\sigma_i$ が

$$I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1}$$

という行列に写るものである．これを **Tong-Yang-Ma 表現**と呼び，$TYM_n \colon B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ と書く．

Burau 表現をストリング絡み目に拡張するという研究はこれまでいくつか行われてきた ([1, 2, 3, 5]) が，Tong-Yang-Ma 表現に対してはまだなされていない．よって本稿では，Massuyeau，Oancea および Salamon[4] の方法を用いて，Tong-Yang-Ma 表現をストリング絡み目に拡張する．彼らは，Tong-Yang-Ma 表現とは全く別のテーマの中で，Tong-Yang-Ma 表現とよく似た行列を構成している．この構成法をストリング絡み目の文脈で見直すことによって表現の拡張を行う．また，拡張された Tong-Yang-Ma 表現 (厳密には写像) の核が絡み数を用いて記述できることを示す．

# 2 拡張

## 2.1 ストリング絡み目

$n$ を正整数とし，$D^2$ を $\mathbb{R}^2$ 内の 2 次元単位円板とする．$D^2$ の内部に $n$ 個の点 $z_1, \ldots, z_n$ を固定する．ここで各点 $z_i$ は $\mathrm{Int}(D^2) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = (-1, 1) \times \{0\}$ 上にあり，$z_1 < \cdots < z_n$ を満たしているとする．

**定義 2.1.** $n$ **成分ストリング絡み目**とは，$n$ 個の向き付けられた単位区間 $I$ の $D^2 \times I$ への埋め込みであって，各区間の始点がある $z_i \times \{0\}$ に，終点がある $z_j \times \{1\}$ になるようなものである．始点が $z_i \times \{0\}$ であるような単位区間の埋め込みを，$i$ **番目の成分**と呼ぶ．

$n$ 成分ストリング絡み目であって，各 $i$ 番目の成分の終点が $z_i \times \{1\}$ となるようなものを**純** $n$ **成分ストリング絡み目**という．図 1 は純 2 成分ストリング絡み目の例である．

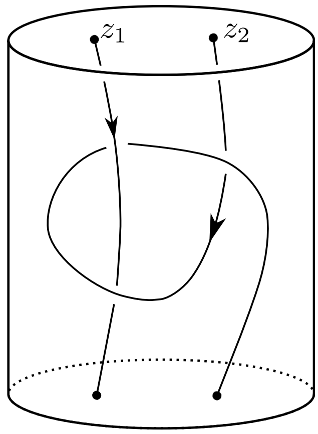


図 1

$n$ 成分ストリング絡み目全体の集合および純 $n$ 成分ストリング絡み目全体の集合を，$D^2 \times I$ 上のアンビエントイソトピーによる同値関係で割ったものをそれぞれ $\mathcal{SL}_n$，$\mathcal{PSL}_n$ と書く．このとき，2 つの $n$ 成分ストリング絡み目に対し，一方の終点をもう一方の始点に繋げることにより新たな $n$ 成分ストリング絡み目が得られる．これにより $\mathcal{SL}_n$，$\mathcal{PSL}_n$ 上に積が定まり，これらはモノイドの構造を持つ．

$n$ 成分ストリング絡み目であって，各成分が任意の $t$ $(0 \leq t \leq 1)$ に対し $D^2 \times \{t\}$ と横断的に 1 点で交わるようなものを $n$ **成分組み紐**という．$n$ 成分組み紐の同値類全体の集合は上で述べた積により群をなし，組み紐群 $B_n$ と同型になる．図 2 は組み紐群 $B_n$ の生成元 $\sigma_i$ を表す $n$ 成分ストリング絡み目 (の図式) である．

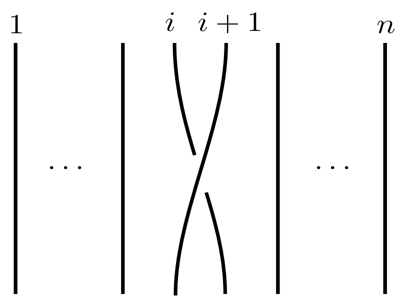


図 2

## 2.2 拡張

$L$ を $n$ 成分ストリング絡み目とし，$L_i$ を $L$ の $i$ 番目の成分とする．$D^2$ の境界上に点 $w_0$ を固定する．また，$D^2$ の内部に各 $z_i$ の近傍 $N(z_i)$ を互いに交わらないように十分小さくとり，各境界上に点 $w_i$ を固定する．$N(Z) := N(z_1)\sqcup\cdots\sqcup N(z_n)$ とおく．各 $i=1,\ldots,n$ に対し，$c_i$ を $w_0$ から $w_i$ に向かう $D^2$ 内の互いに交わらない単純な道とし，$c_i^j := c_i\times\{j\}$ $(j=0,1)$ とする．また，$n$ 個の道の組 $(c_1,\ldots,c_n)$ を $c$ とおく．さらに，$D^2\times I$ 内に $L$ の各成分 $L_i$ の近傍 $N(L_i)$ を互いに交わらないようにとり，$N(L) := N(L_1)\sqcup\cdots\sqcup N(L_n)$ とおく．ここで，$N(L)$ は $N(L)\cap(D^2\times\{j\}) = N(Z)\times\{j\}$ を満たすとする．各近傍 $N(L_i)$ の境界上に，$w_i\times\{0\}$ を始点，$w_{k_i}\times\{1\}$ を終点とする $L_i$ に平行な道 $\widetilde{L}_i$ を，$lk(L_i,\widetilde{L}_i)=0$ となるようにとる．ここで，$k_i$ は $L_i$ の終点の番号，$lk(L_i,\widetilde{L}_i)$ は $L_i$ と $\widetilde{L}_i$ の絡み数を表す．また，$w := w_0\times I$ とし，$w_0\times\{0\}$ から $w_0\times\{1\}$ へ向きをつけておく．$X := D^2\times I - \mathrm{Int}(N(L))$，$X_0 := X\cap(D^2\times\{0\})$ とし，$\iota\colon X_0 \longrightarrow X$ を包含写像とすると，$H_1(X_0;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}^{\oplus n}\cong\langle t_1,\ldots,t_n \mid t_it_j=t_jt_i\ (\forall i,j)\rangle$ であり，包含写像 $\iota$ は同型写像 $\iota_*\colon H_1(X_0;\mathbb{Z})\longrightarrow H_1(X;\mathbb{Z})$ を誘導する．ここで，各 $t_i$ は $N(z_i)$ の境界を一周するループを表す．$X_0 = (D^2-\mathrm{Int}(N(Z)))\times\{0\}$ と書けるので，$X_0$ は $n$ ストリング絡み目によらず共通であることに注意しておく．

**定義 2.2.** (cf. [4, Section 5]) **多変数 Tong-Yang-Ma 写像** $\mathcal{T}_c\colon \mathcal{SL}_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z}[H_1(X_0;\mathbb{Z})])\cong GL_n(\mathbb{Z}[t_1,\ldots,t_n])$ を次で定義する:

$$(\mathcal{T}_c(L))_{ij} := \begin{cases} \iota_*^{-1}(c_i^0\cdot\widetilde{L}_i\cdot(c_j^1)^{-1}\cdot w^{-1}) & (\text{if } \tau_L(j)=i) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ここで，$(\mathcal{T}_c(L))_{ij}$ は $n\times n$ 行列 $\mathcal{T}_c(L)$ の $(i,j)$ 成分を表す．また，$n$ 成分ストリング絡み目 $L$ に対し，$\tau_L$ は次で定義される $n$ 次対称群 $S_n$ の元である:

$z_j\times\{1\}$ を終点にもつ $L$ の成分が $i_j$ 番目の成分 $L_{i_j}$ であるとき，$\tau_L(j) := i_j$.

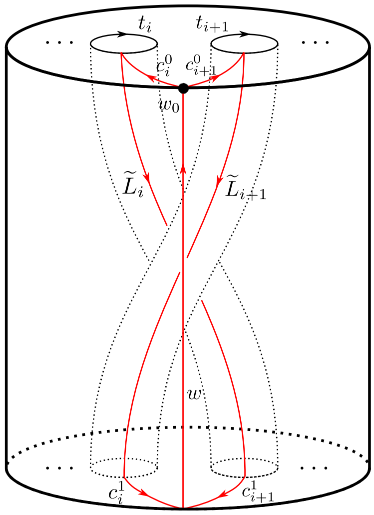


図 3

図 3 は，$n$ 成分ストリング絡み目として組み紐群の生成元 $\sigma_i$ をとり，$n$ 個の道の組 $c=(c_1,\ldots,c_n)$ を図 4 のように選んだ場合のループ $c_i^0\cdot\widetilde{L}_i\cdot(c_j^1)^{-1}\cdot w^{-1}$ を表している (ただし，$j(\neq i,i+1)$ 番目の成分は，他のどの成分とも絡まない $z_j\times\{0\}$ から $z_j\times\{1\}$ へ向かう単調な道のため省いている)．このとき，$\iota_*^{-1}(c_i^0\cdot\widetilde{L}_i\cdot(c_{i+1}^1)^{-1}\cdot w^{-1}) = t_{i+1}$，$\iota_*^{-1}(c_{i+1}^0\cdot\widetilde{L}_{i+1}\cdot(c_i^1)^{-1}\cdot w^{-1}) = 1$ となるので，多変数 Tong-Yang-Ma 写像による像は

$$\mathcal{T}_c(\sigma_i) = I_{i-1}\oplus\begin{pmatrix} 0 & t_{i+1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\oplus I_{n-i-1}$$

となる．ゆえに，$t_1 = \cdots = t_n = t$ とすることにより

$$I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1} = TYM_n(\sigma_i)$$

が得られる．よって，多変数 Tong-Yang-Ma 写像は Tong-Yang-Ma 表現の拡張とみなすことが出来る．

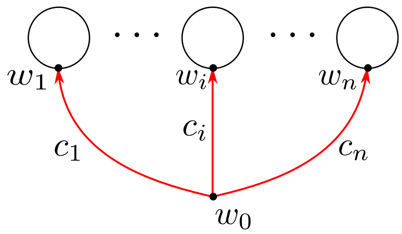


図 4

**例 2.3.** 図 1 の 2 成分ストリング絡み目をとり，$n$ 個の道の組 $c = (c_1, \ldots, c_n)$ を図 4 のように選ぶ．このとき，$\iota_*^{-1}(c_1^0 \cdot \widetilde{L}_1 \cdot (c_1^1)^{-1} \cdot w^{-1}) = t_2$，$\iota_*^{-1}(c_2^0 \cdot \widetilde{L}_2 \cdot (c_2^1)^{-1} \cdot w^{-1}) = t_1$ となる (図 5 参照)．よって

$$\mathcal{T}_c(L) = \begin{pmatrix} t_2 & 0 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix}$$

である．

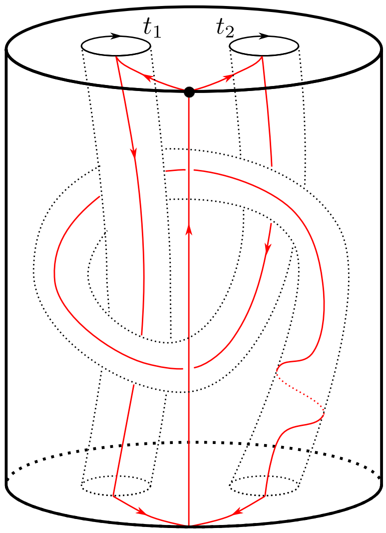


図 5

$n$ 個の道の組 $c = (c_1, \ldots, c_n)$ が与えられたとき，これには自然に組み紐群 $B_n$ の作用が定まる．$\sigma \in B_n$ による作用を $\sigma \cdot c = (\sigma \cdot c_1, \ldots, \sigma \cdot c_n)$ と書き，$c' := (c'_1, \ldots, c'_n) := (\sigma \cdot c_{i_1}, \ldots, \sigma \cdot c_{i_n})$ とする (図 6 参照)．ただし，$j = 1, \ldots, n$ に対して，$i_j$ は $\tau_\sigma(i_j) = j$ を満たすとする．

**定理 2.4.** (cf. [4, Theorem 4])

(1) 任意の道の組 $c = (c_1, \ldots, c_n)$ と 2 つの $n$ 成分ストリング絡み目 $L, L'$ に対し，

$$\mathcal{T}_c(LL') = \mathcal{T}_c(L)(L \cdot \mathcal{T}_c(L'))$$

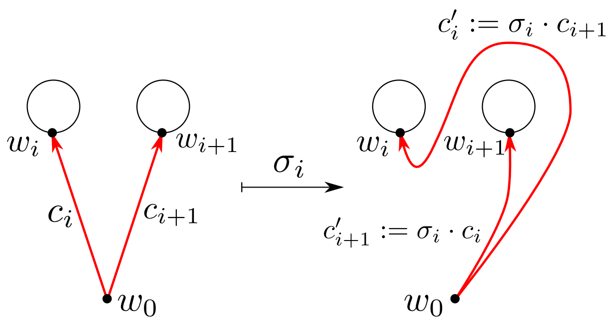


図 6

が成り立つ．ここで，ストリング絡み目の同値類全体の集合 $\mathcal{SL}_n$ から $GL_n(\mathbb{Z}[H_1(X_0;\mathbb{Z})])$ への作用は $L \cdot t_j := t_{\tau_L(j)}$ で定まっているとする．

(2) 任意の道の組 $c = (c_1, \ldots, c_n)$，$n$ 成分組み紐 $\sigma \in B_n$，そして $n$ 成分ストリング絡み目 $L$ に対し，

$$\mathcal{T}_{\sigma\cdot c}(L) = \sigma_*(\mathcal{T}_c(\sigma)^{-1}\mathcal{T}_c(L)(L \cdot \mathcal{T}_c(\sigma)))$$

が成り立つ．ここで，組み紐群 $B_n$ から $GL_n(\mathbb{Z}[H_1(X_0;\mathbb{Z})])$ への作用は，任意の $(a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{Z}[H_1(X_0;\mathbb{Z})])$ に対し，$\sigma_*(a_{ij}) := (a_{\tau_\sigma(i)\tau_\sigma(j)})$ で定まっているとする．

**証明**. (1) 行列の各成分について考える．$j = \tau_{L'}(k), i = \tau_L(j) = \tau_{LL'}(k)$ とする．多変数 Tong-Yang-Ma 写像の定義より，$\mathcal{T}_c(LL')_{ik}$ は $(\mathcal{T}_c(L))_{ij}$ と $(\mathcal{T}_c(L'))_{jk}$ によって書けるはずである．しかし，いま $L$ の $i$ 番目の成分 $L_i$ は $L'$ の $j$ 番目の成分 $L'_j$ に繋がっている．つまり，$L'_j$ は $LL'$ の中で $i(=\tau_L(j))$ 番目の成分になっている．ゆえに，$\mathcal{T}_c(L')$ の各成分は $\tau_L$ によって補正しなければならない．よって

$$(\mathcal{T}_c(LL'))_{ik} = (\mathcal{T}_c(L))_{ij}(L \cdot (\mathcal{T}_c(L'))_{jk})$$

が成り立つ．$i \neq \tau_{LL'}(k)$ のときは，定義より $\mathcal{T}_c(LL')$ と $\mathcal{T}_c(L)(L \cdot \mathcal{T}_c(L'))$ の $(i,k)$ 成分はともに 0 となる．よって，求める式を得る．

(2) $n$ 成分ストリング絡み目 $\sigma^{-1}L\sigma$ を考え，$\sigma^{-1}$ が $D^2 \times [0,1/3]$ 内に，$L$ が $D^2 \times [1/3,2/3]$ 内に，そして $\sigma$ が $D^2 \times [2/3,1]$ 内にあるとする．また，$\tau_L(k) = j$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}_{\sigma\cdot c}(L))_{jk} &= (\sigma \cdot c^0_{i_j}) \cdot \widetilde{L}_j \cdot (\sigma \cdot c^1_{i_k})^{-1} \cdot w^{-1} \\ &= (c^0_{i_j} \cdot \widetilde{\sigma^{-1}} \cdot (c^{1/3}_j)^{-1}) \cdot (c^{1/3}_j \cdot \widetilde{L}_j \cdot (c^{2/3}_k)^{-1}) \cdot (c^{2/3}_k \cdot \widetilde{\sigma} \cdot (c^1_{i_k})^{-1}) \cdot w^{-1}\end{aligned}$$

である．ただし，$\tau_\sigma(i_j) = j, \tau_\sigma(i_k) = k$ とする．ここで，

$$\begin{aligned}c^0_{i_j} \cdot \widetilde{\sigma^{-1}} \cdot (c^{1/3}_j)^{-1} \cdot w|^{-1}_{[0,1/3]} &= \sigma \cdot (\mathcal{T}_c(\sigma^{-1}))_{i_j j}, \\ c^{1/3}_j \cdot \widetilde{L}_j \cdot (c^{2/3}_k)^{-1} \cdot w|^{-1}_{[1/3,2/3]} &= (\mathcal{T}_c(L))_{jk}, \\ c^{2/3}_k \cdot \widetilde{\sigma} \cdot (c^1_{i_k})^{-1} \cdot w|^{-1}_{[2/3,1]} &= L \cdot (\mathcal{T}_c(\sigma))_{ki_k}\end{aligned}$$

となるので，

$$(\mathcal{T}_{\sigma\cdot c}(L))_{jk} = (\sigma \cdot (\mathcal{T}_c(\sigma^{-1}))_{i_j j})(\mathcal{T}_c(L))_{jk}(L \cdot (\mathcal{T}_c(\sigma))_{ki_k})$$

となり，

$$\mathcal{T}_{\sigma\cdot c}(L) = \sigma_*((\sigma \cdot \mathcal{T}_c(\sigma^{-1}))\mathcal{T}_c(L)(L \cdot \mathcal{T}_c(\sigma)))$$

が成り立つ．さらに，

$$I_n = \mathcal{T}_c(\sigma\sigma^{-1}) = \mathcal{T}_c(\sigma)(\sigma \cdot \mathcal{T}_c(\sigma^{-1}))$$

より，$\sigma \cdot \mathcal{T}_c(\sigma^{-1}) = \mathcal{T}_c(\sigma)^{-1}$ となり，求める式を得る． □

**系 2.5.** (1) 任意の道の組 $c$ および純 $n$ 成分ストリング絡み目 $L, L'$ に対して，

$$\mathcal{T}_c(LL') = \mathcal{T}_c(L)\mathcal{T}_c(L')$$

が成り立つ．

(2) 任意の道の組 $c$，$n$ 成分組み紐 $\sigma \in B_n$ および純 $n$ 成分ストリング絡み目 $L$ に対して，

$$\mathcal{T}_{\sigma\cdot c}(L) = \mathcal{T}_c(L)$$

が成り立つ．

**証明**. (1) 純 $n$ 成分ストリング絡み目の $H_1(X_0;\mathbb{Z})$ への作用は自明であるので明らか．

(2) 定理 2.4 (2) より，

$$\mathcal{T}_{\sigma\cdot c}(L) = \sigma_*(\mathcal{T}_c(\sigma)^{-1}\mathcal{T}_c(L)\mathcal{T}_c(\sigma))$$

を得る．ここで，$L$ は純 $n$ 成分ストリング絡み目なので $\mathcal{T}_c(L)$ は対角行列であり，よって $\mathcal{T}_c(\sigma)^{-1}\mathcal{T}_c(L)\mathcal{T}_c(\sigma)$ も対角行列である．$a_i$ を $\mathcal{T}_c(L)$ の $i$ 番目の対角成分とすると，$\mathcal{T}_c(\sigma)^{-1}\mathcal{T}_c(L)\mathcal{T}_c(\sigma)$ の $j$ 番目の対角成分は $a_{i_j}$ となる．ここで，$j = 1, \ldots, n$ に対して，$\tau_\sigma(i_j) = j$ である．よって，

$$\mathcal{T}_c(\sigma)^{-1}\mathcal{T}_c(L)\mathcal{T}_c(\sigma) = \mathrm{Diag}(a_{\tau_\sigma^{-1}(1)}, \ldots, a_{\tau_\sigma^{-1}(n)}) = \sigma_*^{-1}\mathcal{T}_c(L)$$

となる．したがって，$\mathcal{T}_{\sigma\cdot c}(L) = \sigma_*(\sigma_*^{-1}\mathcal{T}_c(L)) = \mathcal{T}_c(L)$ が成り立つ． $\square$

## 2.3 Tong-Yang-Ma 写像の核

最後に，多変数 Tong-Yang-Ma 写像 $\mathcal{T}_c \colon \mathcal{SL}_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z}[H_1(X_0;\mathbb{Z})])$ の核を求める．オリジナルの Tong-Yang-Ma 表現の場合は既に [4] の中で示されている．

まず，多変数 Tong-Yang-Ma 写像の核に入るためには，少なくとも対角行列でなければならないので，定義より純ストリング絡み目のみ考えれば十分である．$L$ を純 $n$ 成分ストリング絡み目とし，$\hat{L}$ を $S^3$ 内の $L$ の閉包とする．また，$\hat{L}$ の管状近傍 $N(\hat{L})$ を $N(\hat{L}) \cap (D^2 \times [0,1]) = N(L)$ となるようにとる．このとき，$H_1(S^3 - \mathrm{Int}(N(\hat{L}));\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus n} \cong \langle t_1, \ldots, t_n \mid t_i t_j = t_j t_i \ (\forall i,j) \rangle$ であり，各 $t_i$ は $\hat{L}$ の第 $i$ 成分のメリディアンと見なすことが出来る．一方，$\widetilde{L}_i$ の定義より，$\mathcal{T}_c(L)$ の $i$ 番目の対角成分は $\hat{L}$ の第 $i$ 成分のロンジチュードと見なすことが出来る．よって，絡み数の定義より，$(\mathcal{T}_c(L))_{ii}$ の $t_j$ の指数は $lk(\hat{L_i}, \hat{L_j}) = lk(L_i, L_j)$ に一致する．

以上の議論より，次を得る．

**定理 2.6.** 任意の道の組 $c$ および $n \geq 2$ に対して

$$\ker \mathcal{T}_c = \{L \in \mathcal{PSL}_n \mid \text{各 } i,j \ (1 \leq i \neq j \leq n) \text{ に対して，} lk(L_i, L_j) = 0\}$$

が成り立つ．

また，$t_1 = \cdots = t_n = t$ とすると次の系を得る．

**系 2.7.** 任意の道の組 $c$ および $n \geq 2$ に対して

$$\ker(\mathcal{T}_c|_{t_i=t}) = \left\{ L \in \mathcal{PSL}_n \;\middle|\; \text{各 } i \ (i = 1, \ldots n) \text{ に対して，} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} lk(L_i, L_j) = 0 \right\}$$

が成り立つ．

# 参考文献

[1] Paul Kirk, Charles Livingston, and Zhenghan Wang. The Gassner representation for string links. *Commun. Contemp. Math.*, 3(1):87–136, 2001.

[2] J.-Y. Le Dimet. Enlacements d'intervalles et représentation de Gassner. *Comment. Math. Helv.*, 67(2):306–315, 1992.

[3] Xiao-Song Lin, Feng Tian, and Zhenghan Wang. Burau representation and random walks on string links. *Pacific J. Math.*, 182(2):289–302, 1998.

[4] Gwénaël Massuyeau, Alexandru Oancea, and Dietmar A. Salamon. Lefschetz fibrations, intersection numbers, and representations of the framed braid group. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.)*, 56(104)(4):435–486, 2013.

[5] Daniel S. Silver and Susan G. Williams. A generalized Burau representation for string links. *Pacific J. Math.*, 197(1):241–255, 2001.

[6] Arthur Soulié and Akihiro Takano. Extensions of Tong-Yang-Ma representation. *arXiv:2012.03767*, 2020.

[7] Dian-Min Tong, Shan-De Yang, and Zhong-Qi Ma. A new class of representations of braid groups. *Comm. Theoret. Phys.*, 26(4):483–486, 1996.