

Classification of handlebody decompositions of the 3-sphere and lens spaces

小川 将輝 (埼玉大学理工学研究科)

概要

ヒーガード分解は有向閉 3 次元多様体のハンドル体 2 つによる分解で、これまでによく研究されてきた. 3 次元球面とレンズ空間のヒーガード分解は各種数で唯一であることが知られている. ヒーガード分解の一般化として、3 次元多様体のハンドル体 3 つによる分解を考えることができる. 今回は 3 次元球面とレンズ空間のハンドル体 3 つによる分解をハンドル体の種数が 1 以下の場合において分類することができたので報告する.

1 ヒーガード分解

ヒーガード分解は有向閉 3 次元多様体のハンドル体 2 つによる分解である. 任意の有向閉 3 次元多様体はヒーガード分解を持つことが知られている.

定義 1.1. M を連結である向きづけ可能閉 3 次元多様体, H_1, H_2 をそれぞれ種数 g のハンドル体とする. この時, $M = H_1 \cup H_2$ が種数 g のヒーガード分解であるとは, $H_1 \cap H_2 = \partial H_1 \cap \partial H_2$ を満たす時をいう.

多様体のヒーガード分解はそのヒーガード曲面がイソトピックであるかどうかで分類される. 一般に, 3 次元多様体はヒーガード分解をたくさん持つことが知られている. しかし, Reidemeister と Singer によって, 安定同値が示されたことで, 少なくとも, 有限回の安定化という操作をすることでイソトピックにすることができることが知られている [13, 14]. 一方, 3 次元球面とレンズ空間のヒーガード分解は各種数において 1 つに定まることが Waldhausen, Bonahon, Otal によって示されている.

定理 1.1 ([15]). 3 次元球面のヒーガード分解は各種数においてイソトピックなものを除き唯一である.

定理 1.2 ([1]). レンズ空間のヒーガード分解は各種数においてイソトピックなものを除き唯一である.

以上の定理はそれぞれの 3 次元多様体においてヒーガード曲面がアンビエントイソトピーを法として唯一に定まるということを述べている.

2. ハンドル体分解

2

2 ハンドル体分解

この章では3次元多様体のハンドル体分解を定義する. また, ハンドル体分解についてこれまでに知られている事実を紹介する. ハンドル体分解は一般に, 有限個のハンドル体による3次元多様体の分解である [11]. ここでは, ハンドル体3つによる3次元多様体の分解を考える. M を連結である向き付け可能閉3次元多様体とする.

定義 2.1 (ハンドル分解). H_1, H_2, H_3 をそれぞれ種数 g_1, g_2, g_3 であるハンドル体とする. この時, $M = H_1 \cup H_2 \cup H_3$ がハンドル対分解であるとは次の2つの条件を満たす時をいう.

- (1) すべての $i \neq j$ に対して, $H_i \cap H_j = \partial H_i \cap \partial H_j$ は (連結でなくて良い) 曲面である.
- (2) $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ は M 内の絡み目である.

このような分解を $type-(g_1, g_2, g_3; b)$ 分解と呼ぶ. ここで b は $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ の成分数である. また, $H_i \cap H_j$ を F_{ij} と書き, $F_{12} \cup F_{13} \cup F_{23}$ を分岐曲面と呼ぶ.

Koenig は3次元多様体の Trisection を導入した [12]. Koenig が導入した3次元多様体の trisection はハンドル体同士の共通部分である曲面が連結であることを仮定しているが, ハンドル体分解ではそれを仮定していないため, 3次元多様体の trisection の一般化としてみれる. これまでにこのような分解について得られた結果の1つに, 種数が1以下のハンドル体でのハンドル体分解による3次元多様体の特徴づけがある.

命題 2.1 ([7]). $\mathbb{L}_i$ をレンズ空間, $\mathbb{B}$ を $S^2 \times S^1$ のいくつかの連結和, $\mathbb{S}(3)$ を多くても3つの特異ファイバーを持つようなザイフェルト多様体とする.

- (1) M が $type-(0, 0, 0)$ 分解を持つ. $\Leftrightarrow M \cong \mathbb{B}$.
- (2) M が $type-(0, 0, 1)$ 分解を持つ. $\Leftrightarrow M \cong \mathbb{B}$ または $M \cong \mathbb{B} \# \mathbb{L}$.
- (3) M が $type-(0, 1, 1)$ 分解を持つ. $\Leftrightarrow M \cong \mathbb{B}, M \cong \mathbb{L}$ または $M \cong \mathbb{B} \# \mathbb{L}_1 \# \mathbb{L}_2$.
- (4) M が $type-(1, 1, 1)$ 分解を持つ. $\Leftrightarrow M \cong \mathbb{B}, M \cong \mathbb{L}, M \cong \mathbb{B} \# \mathbb{L}, M \cong \mathbb{B} \# \mathbb{L}_1 \# \mathbb{L}_2, M \cong \mathbb{B} \# \mathbb{L}_1 \# \mathbb{L}_2 \# \mathbb{L}_3$ または $M \cong \mathbb{S}(3)$.

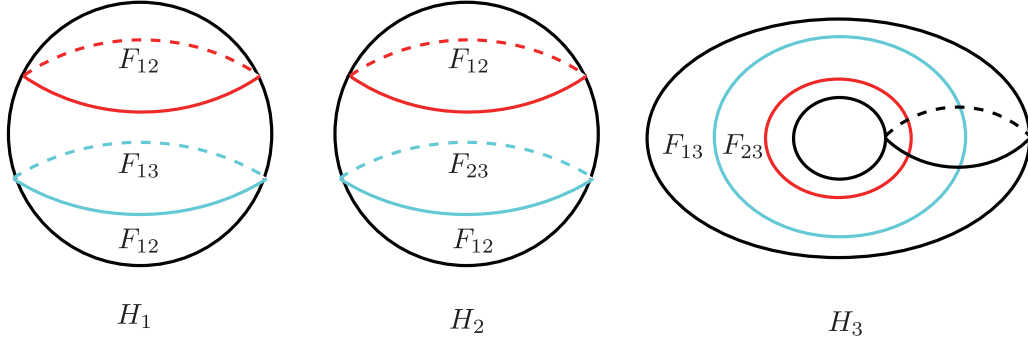
この命題以外にも, Koenig が3次元多様体の Trisection が安定同値であることを示しているなどの先行研究が散見される. 上の命題より, 3次元球面とレンズ空間はそれぞれのハンドル体の種数が1以下であるハンドル体分解を持つことがわかる. 筆者とその研究室の先輩である伊藤氏は3次元球面とレンズ空間のそれぞれのハンドル体の種数が1以下であるハンドル体分解の分岐曲面がどういう位相型をしているか決定した.

命題 2.2. 3次元球面の $type-(0, 0, 0)$ 分解は $F_{ij} \cong D^2$ をみだし, その分岐曲線の成分数は1である.

2. ハンドル体分解

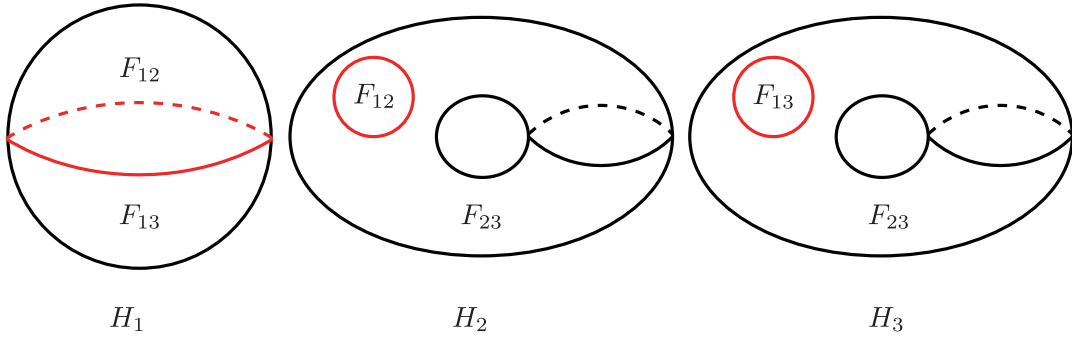
3

命題 2.3. 3次元球面とレンズ空間の $type-(0, 0, 0)$ 分解は, $F_{12} \cong D^2 \cup D^2$, $F_{13} \cong A$, $F_{23} \cong A$ を満たし, その分岐曲線の成分数は2である.

図 1: 3次元球面の $type-(0, 0, 1)$ 分解

命題 2.4. 3次元球面とレンズ空間の $type-(0, 1, 1)$ 分解は以下のいずれかを満たす.

- (1) $F_{12} \cong D^2$, $F_{13} \cong D^2$, $F_{23} \cong T^\circ$ であり, その分岐曲線の成分数は1である.
- (2) $F_{12} \cong D^2 \cup A$, $F_{13} \cong D^2 \cup A$, $F_{23} \cong P$ であり, その分岐曲線の成分数は3である.

図 2: 3次元球面の $type-(0, 1, 1)$ で, 命題 2.4 (1) を満たすもの.

命題 2.5. 3次元球面とレンズ空間の $type-(1, 1, 1)$ 分解は以下のいずれかを満たす.

- (1) $F_{12} \cong F_{13} \cong F_{23} \cong A$ であり, その分岐曲線の成分数は2である.
- (2) $F_{12} \cong D^2 \cup T^\circ$, $F_{13} \cong F_{23} \cong A$ であり, その分岐曲線の成分数は2である.
- (3) $F_{12} \cong D^2 \cup P$, $F_{13} \cong F_{23} \cong A \cup A$ であり, その分岐曲線の成分数は4である.
- (4) $F_{12} \cong A \cup A$, $F_{13} \cong F_{23} \cong D^2 \cup P$ であり, その分岐曲線の成分数は4である.
- (5) $F_{12} \cong F_{13} \cong F_{23} \cong D^2 \cup P$ であり, その分岐曲線の成分数は4である.

3. 主結果

4

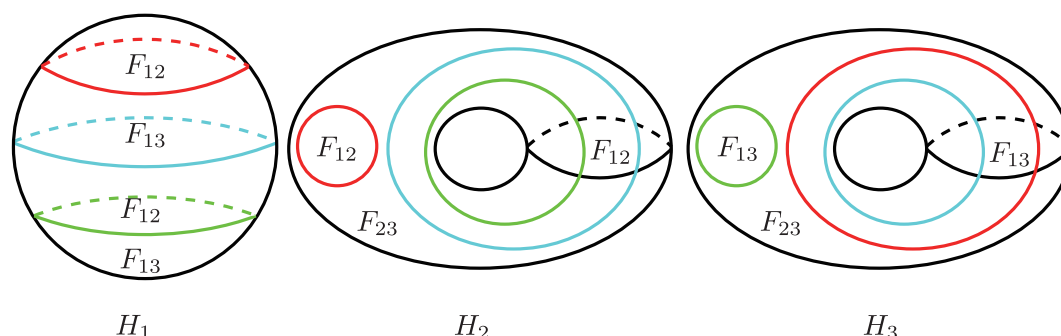


図 3: 3次元球面の type-(0, 1, 1) で, 命題 2.4 (2) を満たすもの.

さらに以下が成り立つ

(6) $M \cong L(4, 1)$, $F_{12} \cong F_{13} \cong F_{23} \cong A \cup A$ であり, その分岐曲線の成分数は 2 である.

以上の命題から分岐曲面がどのような位相型をしているかがわかる. しかし, 分岐曲面がそれぞれの多様体の中におけるアンビエントイソトピーを法としてどのような埋め込みを持つかについては分からない. ハンドル体分解を分類するためには分岐局面の埋め込み方を見る必要がある. これはヒーガード分解を, そのヒーガード曲面のイソトピー類によって分類することを一般化した考え方である.

3 主結果

これまでに, ハンドル体分解について解説してきた. この章では 2 章で紹介して 3 次元球面とレンズ空間のハンドル体分解を分類について述べる. まず初めに得られた結果を述べる.

定理 3.1. 3次元球面とレンズ空間 $L(p, q)$ で $(p-1)q \equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たすものの type-(0, 0, 1) 分解はアンビエントイソトピーを法として 1 つである. 一方 $L(p, q)$ で $(p-1)q \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たすものの type-(0, 0, 1) 分解はアンビエントイソトピーを法として 2 つである.

定理 3.2. 3次元球面かレンズ空間 $L(p, q)$ で $p = 2$ を満たすものの type-(0, 1, 1) 分解は以下のように分類される.

(1) 命題 2.4 (1) を満たす分解はアンビエントイソトピーを法として 1 つである.

(2) 命題 2.4 (2) を満たす分解はアンビエントイソトピーを法として 1 つである.

一方レンズ空間 $L(p, q)$ で $p \neq 2$ を満たすものの type-(0, 1, 1) 分解は以下のように分類される.

(3) 命題 2.4 (1) を満たす分解はアンビエントイソトピーを法として 1 つである.

4. 証明の概略

5

- (4) $(p-1)q \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たす時, 命題 2.4 (2) を満たす分解はアンビエントイソトピーを法として 2 つである. $(p-1)q \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たす時, 命題 2.4 (2) を満たす分解はアンビエントイソトピーを法として 4 つである.

さらに type-(1, 1, 1) 分解に関しても以下のように分類される.

定理 3.3. 3次元球面かレンズ空間 $L(p, q)$ で $p = 2$ を満たすものの type-(1, 1, 1) 分解は以下のように分類される.

- (1) 命題 2.5 (2) を満たす分解はアンビエントイソトピーを法として 2 つである.
- (2) 命題 2.5 (3) を満たす分解はアンビエントイソトピーを法として 2 つである.
- (3) 命題 2.5 (4) を満たす分解はアンビエントイソトピーを法として 2 つである.
- (4) 命題 2.5 (5) を満たす分解はアンビエントイソトピーを法として 1 つである.

一方レンズ空間 $L(p, q)$ で $p \neq 2$ を満たすものの type-(0, 1, 1) 分解は以下のように分類される.

- (5) $(p-1)q \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たす時, 命題 2.5 (2) を満たす分解はアンビエントイソトピーを法として 2 つである. $(p-1)q \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たす時, 命題 2.5 (2) を満たす分解はアンビエントイソトピーを法として 4 つである.
- (6) $(p-1)q \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たす時, 命題 2.5 (3) を満たす分解はアンビエントイソトピーを法として 3 つである. $(p-1)q \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たす時, 命題 2.5 (3) を満たす分解はアンビエントイソトピーを法として 6 つである.
- (7) $(p-1)q \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たす時, 命題 2.5 (4) を満たす分解はアンビエントイソトピーを法として 4 つである. $(p-1)q \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たす時, 命題 2.5 (4) を満たす分解はアンビエントイソトピーを法として 8 つである.
- (8) $(p-1)q \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たす時, 命題 2.5 (5) を満たす分解はアンビエントイソトピーを法として 1 つである. $(p-1)q \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たす時, 命題 2.5 (5) を満たす分解はアンビエントイソトピーを法として 2 つである.

4 証明の概略

この章では証明の概略を述べていく. 特に type-(0, 1, 1) 分解で Proposition 2.4 (2) の分解の分類に着目し, その分解を分類することを考える. まず初めに, ヒーガード分解と上で得られたハンドル体分解の関係について述べる. 実際, 上のハンドル体分解からヒーガード分解を構成することができる.

4. 証明の概略

6

補題 4.1. $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ を命題 2.4 (2) を満たす $type-(0, 1, 1)$ 分解とする. この時, 以下が成り立つ

- (1) $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ がレンズ空間である時, ∂H_2 か ∂H_3 のどちらか一方はヒーガード曲面である.
- (2) $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ が 3 次元球面である時, ∂H_2 と ∂H_3 のどちらもヒーガード曲面である.

M をレンズ空間もしくは 3 次元球面とする. また, $V_1 \cup V_2$ を M の種数 1 のヒーガード分解とする. 上の補題より, ∂H_3 がヒーガード曲面であることができる. ∂H_3 がヒーガード曲面であるとする. この時, H_3 は種数 1 のヒーガード分解のソリッドトーラスの一方になる. よって $H_3 = V_1$ もしくは $H_3 = V_2$ となる. $H_3 = V_i$ とすると, F_{12} は V_j に適切に埋め込まれた曲面であり, V_j をソリッドトーラスと 3 次元球体に分割するアニュラスと円盤である. ここで $i \neq j$ である. 以上のことから, 分岐局面の埋め込みは F_{12} のソリッドトーラスへの埋め込みを見ることが必要になる.

V_1 が V_2 に M 内でアンビエントイソトピックであることがいえれば, $H_3 = V_1$ の場合のみ考えれば良いことになる. 以下の補題はそのようなアンビエントイソトピーを許容する M の条件を与えるものである.

補題 4.2. M を 3 次元球面またはレンズ空間, $V_1 \cup V_2$ を M の種数 1 のヒーガード分解とする. この時, V_1 と V_2 がアンビエントイソトピックである必要十分条件は, M が 3 次元球面であるかレンズ空間 $L(p, q)$ で $(p-1)q \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たすことである.

補題 4.2 から, M が 3 次元球面, もしくは, $(p-1)q \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たすレンズ空間である時には $H_3 = V_1$ の場合のみを考えればよい. 一方, M がこのような条件を満たさない場合は $H_3 = V_1$ である場合と $H_3 = V_2$ である場合の両方を考える必要がある.

次に, F_{12} のソリッドトーラスへの埋め込みはアンビエントイソトピーを法としてどのようなものがあるかを調べる. 以下の補題は F_{12} の埋め込みがどのようなものに限られるかを示している.

補題 4.3. V をソリッドトーラス, D と A をそれぞれ V に適切に埋め込まれた互いに交わらない円盤とアニュラスとする. $D \cup A$ が以下の 2 つの条件を満たす時, その埋め込みはアンビエントイソトピーを法として 2 つである.

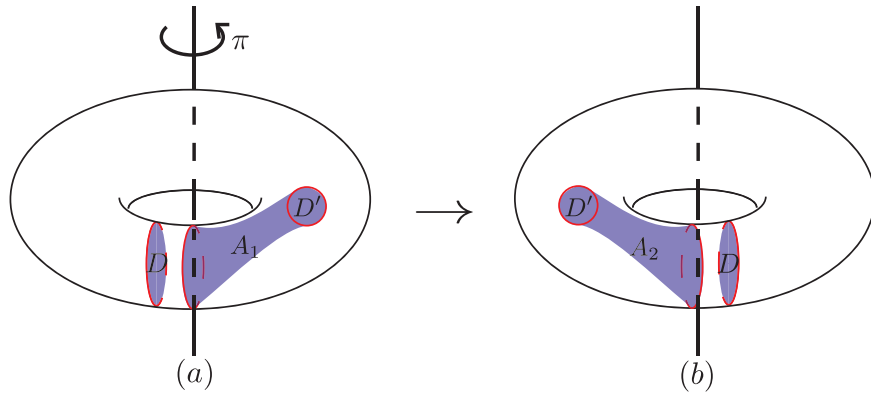
- (1) $D \cup A$ は V を 3 次元球体とソリッドトーラスに切り開く
- (2) $\partial(D \cup A)$ は ∂V をアニュラス, 円盤, 3 つ穴あき球面に切り開く.

さらに, それらの 2 つの埋め込みは V の超楕円対合によってうつり合う.

補題 4.3 より, F_{12} の 2 つに埋め込みは超楕円対合によってうつり合う. 話を F_{12} の V_i への埋め込みに戻す. F_{12} が V_i に埋め込まれているとすると, V_i での超楕円対合が M 内でのアンビエントイソトピーで実現できるとき, F_{12} の埋め込みは唯 1 つに定まる. そうでな

4. 証明の概略

7



ければ2つのアンビエントイソトピー類が存在することがわかる. 以上のことから, M のヒーガード分解 $V_1 \cup V_2$ を保つ同相写像のイソトピー類を考えることが必要になる. 以下の定理はレンズ空間の Diffeotopy 群に関する結果である. Diffeotopy 群は3次元多様体の写像類群である. 詳しい内容は [2, 9] を参照していただきたい.

定理 4.1 ([2, 9]). レンズ空間 $L(p, q)$ の *diffeotopy* 群は以下の群に同型である.

1. $p = 2$ ならば, $\mathbb{Z}_2$ でありその生成元は σ_- .
2. $q \equiv \pm 1 \pmod{p}$ かつ $p \neq 2$ ならば, $\mathbb{Z}_2$ であり, その生成元は τ .
3. $q^2 \equiv +1 \pmod{p}$ かつ $q \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ ならば, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ であり, その生成元は τ と σ_+ .
4. $q^2 \equiv -1 \pmod{p}$ かつ $p \neq 2$ ならば, $\mathbb{Z}_4$ であり, その生成元は σ_- .
5. $q^2 \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ ならば, $\mathbb{Z}_2$ であり, その生成元は τ .

ここで τ のヒーガード分解のソリッドトーラスへの制限は超楕円対合となっている. また, $\sigma_-^2 = \tau$ である. 定理 4.1 より以下の補題を得る.

補題 4.4. M を3次元球面もしくはレンズ空間 $L(p, q)$, $V_1 \cup V_2$ を M の種数 1 のヒーガード分解とする. この時, M が3次元球面もしくはレンズ空間で $p = 2$ を満たすものであることと, アンビエントイソトピー $F : M \times [0, 1] \rightarrow M$ で次を満たすものを許容することは必要十分である.

- (1) $F(V_1, 1) = V_1$ かつ $F(V_2, 1) = V_2$
- (2) $f_t(x) = F(x, t)$ とする. この時, $f_1|_{\partial V_1} : \partial V_1 \rightarrow \partial V_1$ は超楕円対合.

補題 4.4 より, M が3次元球面もしくはレンズ空間で $p = 2$ を満たすものである時, 4.3 で得られた2つのアンビエントイソトピー類は移り合うことがわかる.

以上のことから, 3次元球面もしくはレンズ空間で $p = 2$ を満たす時は $(p-1)q \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たすので, 補題 4.2 より, $H_3 = V_2$ とみなすことができる. また, 補題 4.4 より,

参考文献

8

V_2 への F_{12} の埋め込みは 1 つである. 以上のことから, 分岐曲面のアンビエントイソトピー類は 1 つである.

$p \neq 2$ であり, $(p-1)q \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たす時, 補題 4.2 より, $H_3 = V_2$ とみなすことができる. 補題 4.3, 4.4 より, V_2 への F_{12} の埋め込みは 2 つである. よって, 分岐曲面のアンビエントイソトピー類は 2 つである. 一方, $(p-1)q \equiv \pm 1 \pmod{p}$ を満たさない場合, $H_3 = V_1$ と $H_3 = V_2$ の場合を考える必要があるので分岐曲面のアンビエントイソトピー類の個数はその倍である 4 つである.

参考文献

- [1] F. Bonahon and J-P Ota. Scindements de Heegaard des espaces lenticulaires. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **16** (1983), 451-466.
- [2] F. Bonahon. Difféotopies des espaces lenticulaires. Topology **22** (1983), 305-314.
- [3] E. J. Brody, The topological classification of the lens space, Ann. of Math. (2) **71** (1960), 163-184.
- [4] A. Cattabriga and E. Manfredi. Diffeomorphic vs isotopic links in lens spaces. Mediterr. J. Math. **15** (2018) 172.
- [5] D. Gay, R. Kirby. Trisecting of 4-manifolds. Geom. Topol. **20** (2016), 3097-3132.
- [6] H. Geiges and C. Lange. Seifert fibration of lens spaces. Abh. Math. Semin. Univ Hambg. **88** (2018), 1-22.
- [7] J. C. Gómez-Larrañaga. 3-manifolds which are unions of three solid tori. Manuscripta Math. **59** (1987), 325-330.
- [8] J. C. Gómez-Larrañaga, Wolfgang Heil and Victor Nuñez. Stiefel-Whitney surfaces and decompositions of 3-manifolds into handlebodies. Topology Appl. **60** (1994), 267-280.
- [9] C. Hodgson and J. H. Rubstein. Involution and isotopies of lens spaces. In Knot theory and Manifold Lecture Note in Math vol. 1144 (Springer-Verlag, 1983), pp. 60-96.
- [10] K. Ishihara, Y. Koda, M. Ozawa and K. Shimokawa. Neighborhood equivalence for multi-branched surfaces in 3-manifolds. Topology Appl. **257** (2019), 11-21.
- [11] K. Ishihara, Y. Koda, R. Mishina, M. Ogawa, M. Ozawa, N. Sakata and K. Shimokawa. Handlebody decomposition of 3-manifolds and polycontinuous patterns. preprint (2020).
- [12] D. R. Koenig. Trisections in three and four dimensions. PhD. thesis. University of California (2017).

参考文献

9

- [13] K. Reidemeister. Zur dreidimensionalen Topologie. Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **9** (1933), 189-194.
- [14] J. Singer. Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams. Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933), 88-111.
- [15] F. Waldhausen, Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre, Topology **7** (1968), 195-203.