

Thick isotopy property and the mapping class groups of Heegaard splittings

井口大幹^{*†}

概要

向き付け可能な閉 3 次元多様体 M とその Heegaard 曲面 S に対し, 左剰余類空間 $\text{Diff}(M)/\text{Diff}(M, S)$ を (M の) Heegaard 曲面の空間とよぶ. 本稿では次の結果について報告する. Heegaard 曲面の空間の基本群が有限生成になるための必要十分条件は, この空間における任意のループが “thick isotopy” により実現できることである. 応用として, 双曲多様体の強既約 Heegaard 分解の写像類群は有限生成であることを示す. 本研究の議論は Heegaard 曲面の分類問題を扱うために考案された Colding-Gabai-Ketover の方法に基づいており, 主な道具として正規曲面 (normal surface) の理論を用いる.

1 導入

M を向き付け可能な閉 3 次元多様体とし, S を M の Heegaard 曲面とする. すなわち S は M 内の分離的な曲面であり, M を 2 つのハンドル体に分ける.

Definition 1.1. 次で定義される群を **Heegaard 分解の写像類群** といい $\text{MCG}(M, S)$ と書く:

$$\text{MCG}(M, S) := \pi_0(\text{Diff}(M, S)).$$

ここで, $\text{Diff}(M, S)$ は曲面 S を (集合として) 保つ M の微分同相写像がなす群を表す.

Heegaard 分解の写像類群に関して Minsky は次の問を提起した.

Question (Minsky [6]). Heegaard 分解の写像類群はいつ有限生成群になるか?

3 次元球面 S^3 の Heegaard 分解は各種数でイソトピーを法として一意であることが知られているが, 種数が 2 である場合には Goeritz [5] によりその写像類群の生成元が与えられた. この結果は最近, Freedman-Scharlemann [4] によって種数が 3 の場合に拡張された. S^3 の Heegaard 分解の写像類群については種数が 4 以上である場合にも同様に有限生成であると予想されているが, 現時点ではまだ未解決である. その他の具体例としては, 3 次元トーラスの種数 3 の Heegaard 分解の写像類群の生成元が知られている (Johnson [9]). また Cho-Koda [1] は全ての種数 2 の弱可約 Heegaard 分解の写像類群に対しその有限表示を与えた. ここで Heegaard 分解 (または Heegaard 曲面) が弱可約であるとは, Heegaard 曲面によって張られる 2 つのハンドル体のそれぞれのメリディアン円盤であって互いに交わらないものが存在するときをいう. またそうでないとき, Heegaard 分解 (または Heegaard 曲面) は強既約であるといわれる. 実は上で述べた 3 次元球面の Heegaard 分解や 3 次元トーラスの種数 3 の Heegaard 分解は全て弱可約であることが容易に確かめられる. 有限生成でない写像類群をもつ Heegaard 分解が存在するかどうかについては何も知られていない.

本稿の主結果は次の通りである.

^{*}広島大学大学院先進理工系科学研究科数学プログラム

[†]e-mail: d200643@hiroshima-u.ac.jp

Theorem 1.2 (Iguchi [8]). N を向き付け可能な閉双曲 3 次元多様体とし, S を N の強既約 Heegaard 曲面とする. このとき Heegaard 分解の写像類群 $\text{MCG}(N, S)$ は有限生成である.

つまり, この定理は双曲多様体の強既約 Heegaard 分解の写像類群は比較的“小さい”群であるということを主張している. 一方, 上の定理の仮定を満たす Heegaard 分解であり, その写像類群が無限群である例が無数に存在する (例えば Johnson [9], Iguchi-Koda [7] を参照). 従って上記の定理において, 「有限生成である」という帰結を「有限群である」というようには改良することは出来ない.

本稿では Theorem 1.2 の概略について紹介する. 証明は Colding-Gabai-Ketover [3] の方法に基づいており, 主な道具として正規曲面 (normal surface) の理論を用いる. 本稿の構成は次の通りである. 2 章では, まず Heegaard 曲面の空間の定義とその基本的な性質について述べる. 特に我々の設定においては Heegaard 分解の写像類群の有限生成性が Heegaard 曲面の空間の基本群の有限生成性に帰着できることを説明する. その後, Heegaard 曲面の空間の基本群が有限生成になるための条件を“thick isotopy”の概念を用いて与える. 3 章では, 双曲多様体の強既約 Heegaard 曲面に 2 章で得られた結果を適用することにより Theorem 1.2 の証明を与える. 最後に, 4 章では今後の課題と展望について述べる.

本稿は 2020 年 12 月に開催された研究集会「結び目の数理論 III」における発表の報告であり, 内容はプレプリント [8] に基づく. 研究集会の世話人の先生方にこの場を借りて深く御礼申し上げます.

2 Heegaard 曲面の空間

以下 Theorem 1.2 の証明の概略について述べる. まず準備として Heegaard 曲面の空間の定義とその性質について述べる. この節では, M を向き付け可能な閉 3 次元多様体とし, S をその Heegaard 曲面とする. また単位区間 $[0, 1]$ を I と書く.

Definition 2.1 (Johnson-McCullough [11]). 左剰余類空間 $\mathcal{H}(M, S) := \text{Diff}(M)/\text{Diff}(M, S)$ を **Heegaard 曲面の空間** とよぶ. ここで, $\text{Diff}(M)$ は M の自己微分同相写像がなす群を表す.

Heegaard 曲面の空間 $\mathcal{H}(M, S)$ は, 名前から想像できるように, 各点が Heegaard 曲面によって代表されるような空間である. $\mathcal{H}(M, S)$ の任意の点は $\varphi \cdot \text{Diff}(M, S)$ と書くことができる. この点に M の Heegaard 曲面 $\varphi(S)$ を対応させることにより $\mathcal{H}(M, S)$ から S と同値な M の Heegaard 曲面がなす集合への一対一対応を得る. この対応により以下 $\mathcal{H}(M, S)$ を Heegaard 曲面がつくる空間とみなす. 本稿では常に $\mathcal{H}(M, S)$ の基点として曲面 S (つまり左剰余類 $\text{id}_M \cdot \text{Diff}(M, S)$ に対応する Heegaard 曲面) をとる.

上の対応により, $\mathcal{H}(M, S)$ 内の任意の道は Heegaard 曲面の間のイソトピーを定め, 逆に Heegaard 曲面の間のイソトピーは $\mathcal{H}(M, S)$ 内の道を定める. このことから基本群 $\pi_1(\mathcal{H}(M, S))$ は Heegaard 曲面 S の (smooth) motion がなす群とみることができる. 定義から次の完全系列が存在することが確認できる:

$$\pi_1(\mathcal{H}(M, S)) \rightarrow \text{MCG}(M, S) \rightarrow \text{MCG}(M).$$

大雑把に言うと, Heegaard 分解の写像類群 $\text{MCG}(M, S)$ は $\pi_1(\mathcal{H}(M, S))$ に対応する部分と $\text{MCG}(M)$ の部分群に対応する部分に分解される. 今回の設定では M が双曲構造を許容する場合を考える. この場合写像類群 $\text{MCG}(M)$ は有限群であるので, $\text{MCG}(M, S)$ が有限生成になるためには $\pi_1(\mathcal{H}(M, S))$ が有限生成であればよい. したがって今回の主眼は $\pi_1(\mathcal{H}(M, S))$ が有限生成になるための条件を求めることにあてられる.

以下, M 上の Riemann 計量を 1 つ固定する. M の部分集合 A に対し, $\text{diam}(A)$ により A の M における直径を表す. また M 内の曲面 T に対し $\text{Area}(T)$ により T の面積を表す. この設定のもとで $\pi_1(\mathcal{H}(M, S))$ が有限生成になるための条件として thick isotopy property という性質を導入する.

Definition 2.2. $\delta > 0$ とする. 3 次元多様体 M 内の曲面 T が δ -compressible であるとは, T の compression disk D であり $\text{diam}(\partial D) < \delta$ を満たすものが存在するときをいう. ここで M 内の disk D が曲面 T の **compression disk** であるとは, $D \cap T = \partial D$ でありかつ ∂D が T 上の本質的単純閉曲線であるときをいう. 曲面 T は δ -compressible でないとき δ -locally incompressible であるといわれる.

Definition 2.3. 曲面 S を M の Heegaard 曲面とする. このとき S が **thick isotopy property** を満たすとは, S のみに依存するある定数 $C = C(S)$ と $\delta = \delta(S)$ が存在し次を満たすときをいう. 曲面 S を基点にもつ $\mathcal{H}(M, S)$ 内の任意のループ $\{T_t\}_{t \in I}$ は次を満たすようにホモトピー (基点を止める) によって変形できる:

- 任意の $t \in I$ に対し, $\text{Area}(T_t) \leq C$ が成り立つ,
- 任意の $t \in I$ に対し, T_t は δ -locally incompressible である.

次の定理が本研究の鍵である.

Theorem 2.4 (Iguchi [8]). M を向き付け可能かつ既約な閉 Riemann 3 次元多様体とし, S を M の Heegaard 曲面とする. このとき次の 2 つの条件は同値である.

- (1) 曲面 S は thick isotopy property を満たす.
- (2) 基本群 $\pi_1(\mathcal{H}(M, S))$ は有限生成である.

条件 (2) が成り立つならば (1) が成り立つことは次のようにして示すことができる. $[\{T_t^i\}_{t \in I}]$ ($1 \leq i \leq n$) を $\pi_1(\mathcal{H}(M, S))$ の有限生成系とする. このとき, $\pi_1(\mathcal{H}(M, S))$ 内の任意のループは $\{T_t^i\}_{t \in I}$ の積とホモトピックであることに注意する. 従って定数 C と δ を次のように定めることができる:

$$C := \max_{1 \leq i \leq n, t \in I} \text{Area}(T_t^i),$$

$$\delta := \min_{1 \leq i \leq n, t \in I} \min\{\text{diam}(\partial D) \mid D \text{ is a compression disk of } T_t^i\}.$$

以下, 条件 (1) から (2) が従うことを説明する. 準備としてまず crudely almost normal surface の定義について述べる. Δ を M の 3 角形分割とする. T を M 内の曲面とし, Δ の各単体と横断的に交わっているとする.

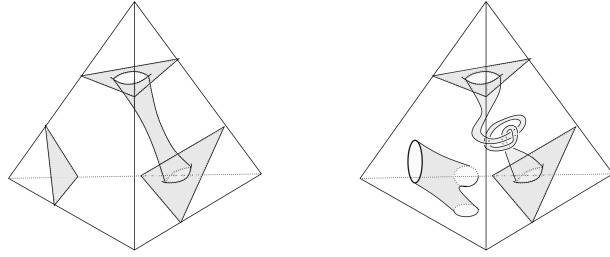


図 1: Crudely almost normal surface と 3-単体の交わりとして許されるもの (左図) と許さないもの (右図) の例.

Definition 2.5. 曲面 T が (3 角形分割 Δ に対し) **crudely almost normal** であるとは次の条件を満たすときをいう (図 1 を参照).

- Δ の各 2-単体 τ に対し, $T \cap \tau$ の成分はいずれも circle ではない,
- Δ の各 3-単体 σ に対し, $T \cap \sigma$ の各成分は disk または unknotted な annulus である,
- T と Δ の 3-単体によって作られる annulus 成分は高々 1 つしか存在しない.

また T の **weight** を T と Δ の 1-骨格 Δ^1 との交わりの数 $|T \cap \Delta^1|$ により定義する.

以下 (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. Heegaard 曲面 S は thick isotopy property を満たすと仮定する. 任意の 3-単体 σ に対しその直径 $\text{diam}(\sigma)$ が定数 δ に比べて十分小さい M の 3 角形分割 Δ を 1 つ固定する. 必要なら Δ の細分をとることにより, S は Δ に対して crudely normal であると仮定してよい. このときグラフ $\mathcal{G}$ を次のように構成する.

- $\mathcal{G}$ の頂点は weight が高々 $K(C+1)$ である crudely almost normal surface (より正確にはその “transverse isotopy class”) からなる. ここで K はある uniform な定数であり, Heegaard 曲面 S , 3 角形分割 Δ と M の Riemann 計量のみに依存する.
- $\mathcal{G}$ の 2 つの頂点が, それらを代表する crudely almost normal surface が 3 つの “elementary move” あるいは pinch のいずれか 1 回の操作で互いに移りあうとき辺を張る (図 2 を参照).

定義より次が成り立つ.

Lemma 2.6. グラフ $\mathcal{G}$ は有限グラフである.

上の Lemma より $\pi_1(\mathcal{G}, S)$ が有限生成であることが従う. よって次のことを示せば十分である.

Lemma 2.7. 自然な準同型 $\eta: \pi_1(\mathcal{G}, S) \rightarrow \pi_1(\mathcal{H}(M, S))$ は全射である.

Lemma 2.7 の証明の概略. $\{T_t\}_{t \in I}$ を $\mathcal{H}(M, S)$ 内の任意のループとする. このとき次の Step 1 から 3 に従って $\{T_t\}_{t \in I}$ をホモトピーによって変形していく.

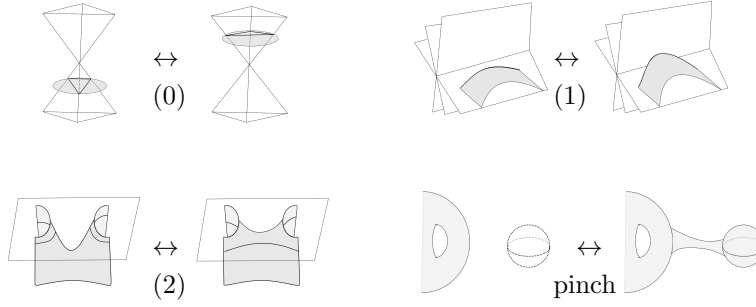


図 2: Elementary moves と pinch.

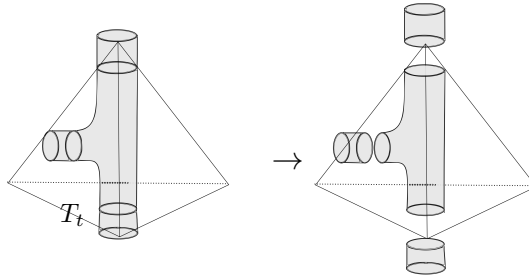


図 3: Surgery

Step 1: 仮定より次の 2 つの条件を満たすように $\{T_t\}_{t \in I}$ を変形することができる.

- 任意の $t \in I$ に対し, $\text{Area}(T_t) \leq C$ が成り立つ,
- 任意の $t \in I$ に対し, T_t は δ -locally incompressible である.

Step 2: $\{T_t\}_{t \in I}$ を摂動させることにより次を満たすと仮定してよい: 有限個の $t \in I$ を除いて各 T_t は Δ と横断的に交わり, さらにこのとき T_t の weight $|T_t \cap \Delta^1|$ は高々 $K(C+1)$ である.

Step 3: 曲面 T_t と Δ が横断的に交わるような任意の $t \in I$ に対し, T_t と 3-単体 σ の境界 $\partial\sigma$ の近くで “surgery” を行う (図 3 を参照). さらにこの操作によって生じる球面成分を忘れることにより T_t を crudely almost normal surface に変えることができる. 一般にはこの操作を施すことで得られる曲面は元の曲面とイソトピックではないことに注意する. ところが今 Step 1 により 各 T_t は δ -locally incompressible であるから, 上の操作の前後で曲面の種数は変わらないことが分かる. 実はこの操作は先に紹介した pinch という操作と同じものであることが確認できる. 仮定より M は既約であるからこれらの操作はイソトピーで実現できる.

Step 1,2,3 より, $[\{T_t\}_{t \in I}]$ は η の像に含まれる. 従って η は全射である. □

3 双曲多様体の Heegaard 分解の写像類群

次の補題は本質的には Colding-Gabai-Ketover [3] によるものである.

Lemma 3.1. N を向き付け可能な閉双曲 3 次元多様体とし, S を N の強既約な Heegaard 曲面とする. このとき S は thick isotopy property を満たす.

ここでは証明は省略し, 使う道具とポイントについてだけ触れておく. 主な道具としては次の 2 つが挙げられる.

- Almgren-Pitts の min-max theory,
- 双曲多様体内の極小曲面の面積の (genus の言葉を用いた) 上からの評価.

Heegaard 曲面 S が thick isotopy property を満たすためには少なくとも曲面のイソトピーにおいて全ての曲面の面積がある一様な定数によって一斉に上から抑えられる必要がある. Almgren-Pitts の方法を用いると, 与えられた曲面の n -パラメータ族に対し, ある極小曲面の面積を用いて面積の上からの評価が得られる. Almgren-Pitts の方法は一般の Riemann 多様体に対して適用可能なものであるが, 特に双曲多様体に対しては極小曲面の面積の上からの評価が知られているので, この 2 つの面積の評価を組み合わせることで曲面のイソトピーにおける面積の評価が得られる.

Theorem 2.4 と Lemma 3.1 を用いて Theorem 1.2 を示すことができる:

Theorem 1.2 の証明. N を向き付け可能な閉双曲 3 次元多様体とし, S を N の強既約な Heegaard 曲面とする. 次の短完全系列が存在する:

$$\pi_1(\mathcal{H}(N, S)) \rightarrow \text{MCG}(N, S) \rightarrow \text{MCG}(N).$$

Lemma 3.1, Theorem 2.4 より $\pi_1(\mathcal{H}(N, S))$ は有限生成である. 一方, N は双曲多様体であるので N の写像類群 $\text{MCG}(N)$ は有限群である. 従って $\text{MCG}(N, S)$ は有限生成である. $\square$

Choi-Schoen [2] により, 球面的多様体に埋め込まれた極小曲面に対し, その面積の上からの評価が曲面の genus の言葉を用いて与えられている. この事実を用いると実は Lemma 3.1 と同様のことが双曲多様体だけでなく球面的多様体に対しても成り立つことが確かめられる. 上の定理の証明と同様の議論により次の定理が従う.

Theorem 3.2. N を球面的 3 次元多様体とし, S を N の強既約 Heegaard 曲面とする. このとき $\text{MCG}(N, S)$ は有限生成である.

4 Problem

最後に本稿の内容から自然に生じる問についてまとめておく.

Question. どのような Heegaard 曲面が thick isotopy property を満たすか? 特に以下に挙げる Heegaard 曲面は thick isotopy property を満たすか?

- (a) 双曲幾何あるいは球面幾何の構造を許容する 3 次元多様体の弱可約な Heegaard 曲面.
- (b) 双曲幾何あるいは球面幾何以外の幾何構造を許容する 3 次元多様体の強既約 Heegaard 曲面.

(a) の特別な場合として 3 次元球面の Heegaard 曲面は thick isotopy property を満たすかという問があるが, 先に述べたように種数が 3 以下である場合は写像類群は有限生成であることが知られており, このことから種数が 3 以下であるときはこの問の答えが肯定的であることが容易に確認できる.

また (b) について, Lemma 3.1 の証明と同様の議論により, 実はこの問題は極小曲面の面積の上からの評価が存在するかという問題に帰着されることが確認できる.

参考文献

- [1] S. Cho, Y. Koda, The mapping class groups of reducible Heegaard splittings of genus two. *Trans. Amer. Math. Soc.* **371** (2019), no. 4, 2473–2502.
- [2] H. I. Choi, R. Schoen, The space of minimal embeddings of a surface into a three-dimensional manifold of positive Ricci curvature. *Invent. Math.* **81** (1985), no. 3, 387–394.
- [3] T. H. Colding, D. Gabai, D. Ketover, On the classification of Heegaard splittings. *Duke Math. J.* **167** (2018), no. 15, 2833–2856.
- [4] M. Freedman, M. Scharlemann, Powell moves and the Goeritz group. [arXiv:1804.05909](https://arxiv.org/abs/1804.05909).
- [5] L. Goeritz, Die abbildungen der brezelfläche und der vollbrezel vom geschlecht 2. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **9** (1933), no. 1, 244–259.
- [6] C. Gordon, Problems. *Workshop on Heegaard Splittings*, pp. 401–411, *Geom. Topol. Monogr.* **12**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2007.
- [7] D. Iguchi, Y. Koda, Twisted book decompositions and the Goeritz groups. *Topology Appl.* **272** (2020), 107064, 15 pp.
- [8] D. Iguchi, Thick isotopy property and the mapping class groups of Heegaard splittings. [arXiv:2008.11548](https://arxiv.org/abs/2008.11548).
- [9] J. Johnson, Automorphisms of the three-torus preserving a genus-three Heegaard splitting. *Pacific J. Math.* **253** (2011), no. 1, 75–94.
- [10] J. Johnson, Heegaard splittings and open books. [arXiv:1110.2142](https://arxiv.org/abs/1110.2142).
- [11] J. Johnson, D. McCullough, The space of Heegaard splittings. *J. Reine Angew. Math.* **679** (2013), 155–179.