

曲面の基本群の無限表示

小林 竜馬 (石川工業高等専門学校)*

概 要

有限型曲面の基本群の有限表示はよく知られている．本研究では，有限型曲面の基本群について，生成元が単純曲線で代表される無限表示を構成した．また，向き付け不可能な有限型曲面の基本群について，生成元が双側な単純曲線で代表される部分群の無限表示も構成した．

1. 主結果

曲面 S とその内部の点 $* \in S$ に対して， $*$ を基点とする S の基本群を $\pi_1(S, *)$ と表す． S が閉曲面であれば， $\pi_1(S, *)$ は関係式が 1 つの有限表示を持ち， S が閉曲面でない場合は $\pi_1(S, *)$ は自由群であり，関係式のない有限表示を持つことはよく知られている．本研究では， $\pi_1(S, *)$ に対して以下の無限表示を与えた．

定理 1 有限型曲面 S に対して， π をシンボル S_α で生成され次の関係式をもつ群とする．ただし， α は非自明な単純曲線で代表される $\pi_1(S, *)$ の元である．

$$(1) S_{\alpha^{-1}} = S_\alpha^{-1}$$

$$(2) S_\alpha S_\beta = S_{\alpha\beta}$$

このとき， π は $\pi_1(S, *)$ と同型である．

向き付け不可能曲面上の単純閉曲線には，その正則近傍がアニュラスであるものと Mobius の帯であるものが存在する．それらをそれぞれ双側，単側と呼ぶ． S が向き付け不可能曲面であるとき， $\pi_1(S, *)$ は $*$ を基点とする単側な有向単純閉曲線のホモトピー類で生成されることは知られている． $*$ を基点とする S の双側な有向単純閉曲線のホモトピー類で生成される $\pi_1(S, *)$ の部分群を $\pi_1^+(S, *)$ と表す．本研究では， $\pi_1^+(S, *)$ に対して以下の無限表示も与えた．

定理 2 向き付け不可能な有限型曲面 S に対して， π^+ をシンボル S_α で生成され次の関係式をもつ群とする．ただし， α は非自明な単純曲線で代表される $\pi_1^+(S, *)$ の元である．

$$(1) S_{\alpha^{-1}} = S_\alpha^{-1}$$

$$(2) S_\alpha S_\beta = S_{\alpha\beta}$$

$$(3) S_\alpha S_\beta S_\alpha^{-1} = S_{\alpha\beta\alpha^{-1}}$$

このとき， π^+ は $\pi_1^+(S, *)$ と同型である．

これらの定理を示すために次の補題を用いる．

本研究は科研費（課題番号:19K14542）の助成を受けたものである．

* e-mail: kobayashi_ryoma@ishikawa-nct.ac.jp

補題 3 ([2]) G, H をそれぞれ集合 X, Y で生成される群とし, H は G に作用しているものとする. また, 次の条件をみたす $X' \subset X$ を考える.

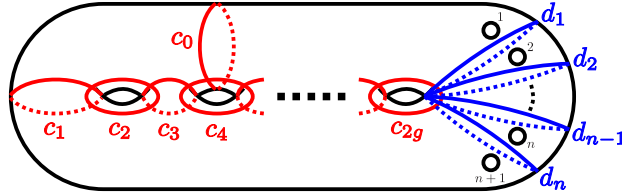
- $H(X') = X$
- 任意の $x \in X', y \in Y$ に対して, $y^{\pm 1}(x)$ は X' が生成する G の部分群に属する.

このとき, X' は G を生成する.

2. S が向き付け可能曲面の場合の定理 1 の証明の概略

$\Sigma_{g,m}$ で種数 $g \geq 0$, 境界成分数 $m \geq 0$ の向き付け可能曲面を表す. $\mathcal{PM}(\Sigma_{g,m})$ で $\Sigma_{g,m}$ の境界の順序を入れ替えない向きを保つ自己微分同相写像のイソトピー類全体からなる群を表し, $\Sigma_{g,m}$ の純写像類群と呼ぶ. $\Sigma_{g,m}$ の単純閉曲線 c に対して, t_c で c に沿った右手系 Dehn ツイストを表す. $\mathcal{PM}(\Sigma_{g,n+1})$ の生成系について次のことが知られている.

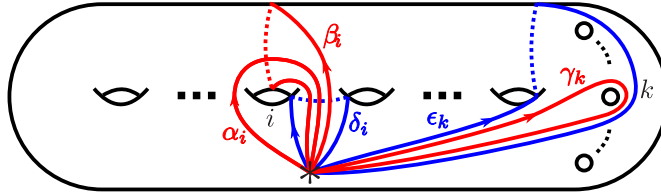
定理 4 (cf. [1]) $c_0, c_1, \dots, c_{2g}, d_1, \dots, d_n$ を下図に示す $\Sigma_{g,n+1}$ 上の曲線とする. このとき $\mathcal{PM}(\Sigma_{g,n+1})$ は $t_{c_0}, t_{c_1}, \dots, t_{c_{2g}}, t_{d_1}, \dots, t_{d_n}$ で生成される.



注意 5 $\Sigma_{g,n+1}$ の $n+1$ 番目の境界を $\Sigma_{g,n}$ 上の点 $*$ と同一視することで, $\mathcal{PM}(\Sigma_{g,n+1})$ は $\pi_1(\Sigma_{g,n}, *)$ に自然に作用することが分かる.

$\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ を下図に示す $\Sigma_{g,n}$ 上の $*$ を起点とする有向閉曲線とする. $\pi_1(\Sigma_{g,n}, *)$ は次の有限表示を持つことはよく知られている. ただし, $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ である.

$$\begin{aligned} \pi_1(\Sigma_{g,n}, *) &= \left\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_n \mid [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_g, \beta_g] \gamma_1 \cdots \gamma_n = 1 \right\rangle \\ &= \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \mid \rangle \end{aligned}$$



集合 X, X', Y を次で定義する.

$$\begin{aligned} X &:= \left\{ S_\alpha \mid \alpha \text{ is a non separating loop or a separating loop which bounds the } k\text{-th boundary component } (1 \leq k \leq n-1). \right\} \\ X' &:= \{ S_{\alpha_1}, \dots, S_{\alpha_g}, S_{\beta_1}, \dots, S_{\beta_g}, S_{\gamma_1}, \dots, S_{\gamma_{n-1}} \} \subset X \\ Y &:= \{ t_{c_0}, t_{c_1}, \dots, t_{c_{2g}}, t_{d_1}, \dots, t_{d_n} \} \end{aligned}$$

本研究では次を示した.

命題 6 (1) X は π を生成する .

$$(2) \mathcal{PM}(\Sigma_{g,n+1})(X') = X$$

(3) 任意の $x \in X', y \in Y$ に対して, $y^{\pm 1}(x)$ は X' が生成する π の部分群に属する .

この命題と命題 3 により, X' は π を生成することが分かる . さらに, 本研究では自然な対応

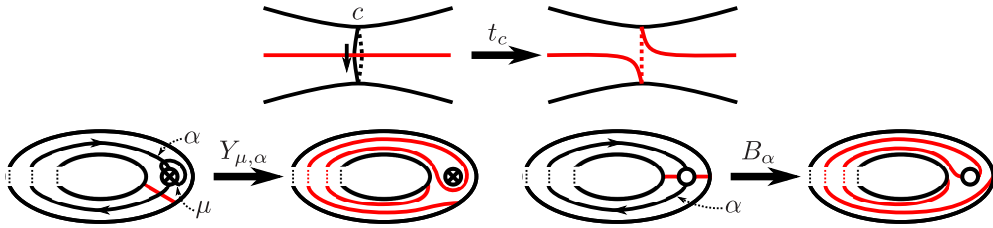
$$\pi \ni S_\alpha \mapsto \alpha \in \pi_1(\Sigma_{g,n}, *) \quad (\forall S_\alpha \in X')$$

が同型写像であることを示した .

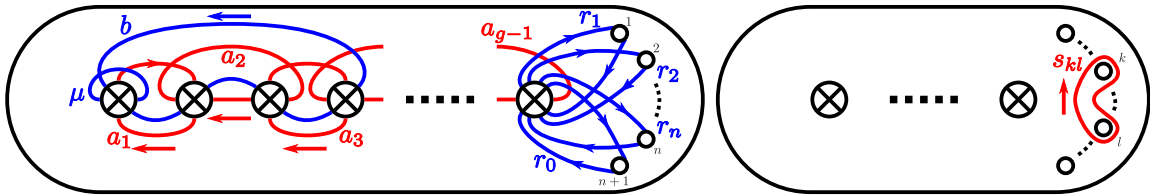
以上により, S が向き付け可能曲面の場合に定理 1 は成り立つ .

3. S が向き付け不可能曲面の場合の定理 1 の証明の概略

$N_{g,m}$ で種数 $g \geq 1$, 境界成分数 $m \geq 0$ の向き付け不可能曲面を表す . $\mathcal{PM}(N_{g,m})$ で $N_{g,m}$ の境界の順序を入れ替えない自己微分同相写像のイソトピー類全体からなる群を表し, $N_{g,m}$ の純写像類群と呼ぶ . $N_{g,n}$ の双側な単純閉曲線 c に対して, c に沿った Dehn ツイスト t_c のツイストする方向は下図のように c の横の矢印で指し示す . 有向単純閉曲線 α と単側な単純閉曲線 μ に対して, $Y_{\mu,\alpha}$ で下図のように μ の近傍を α に沿って一回押すことで表される写像類を表す . 1 つの境界上の 2 点に端点を持つ有向単純道 α に対して, B_α で下図のように境界を α に沿って一回押すことで表される写像類を表す . 本研究では, $\mathcal{PM}(N_{g,n+1})$ について次の生成系を与えた .



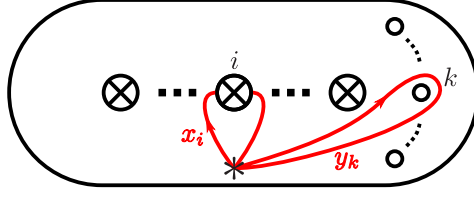
定理 7 $a_1, \dots, a_{g-1}, b, \mu, r_0, r_1, \dots, r_n, s_{kl} \ (1 \leq k < l \leq n)$ を下図に示す $N_{g,n+1}$ 上の曲線とする . このとき $\mathcal{PM}(N_{g,n+1})$ は $t_{a_1}, \dots, t_{a_{g-1}}, t_b, Y_{\mu, a_1}, B_{r_0}, B_{r_1}, \dots, B_{r_n}, t_{s_{kl}} \ (1 \leq k < l \leq n)$ で生成される .



注意 8 $N_{g,n+1}$ の $n+1$ 番目の境界を $N_{g,n}$ 上の点 $*$ と同一視することで, $\mathcal{PM}(N_{g,n+1})$ は $\pi_1(N_{g,n}, *)$ に自然に作用することが分かる .

$x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_n$ を下図に示す $N_{g,n}$ 上の $*$ を起点とする有向閉曲線とする . $\pi_1(N_{g,n}, *)$ は次の有限表示を持つことはよく知られている .

$$\begin{aligned} \pi_1(N_{g,n}, *) &= \left\langle x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_n \mid x_1^2 \cdots x_g^2 y_1 \cdots y_n = 1 \right\rangle \\ &= \langle x_1, \dots, x_g, y_1, \dots, y_{n-1} \mid \rangle \end{aligned}$$



集合 X, X', Y を次で定義する .

$$\begin{aligned} X &:= \left\{ S_\alpha \left| \begin{array}{l} \alpha \text{ is a one sided loop whose complement is non orientable,} \\ \text{or a separating loop which bounds the } k\text{-th boundary component} \\ (1 \leq k \leq n-1). \end{array} \right. \right\} \\ X' &:= \{S_{x_1}, \dots, S_{x_g}, S_{y_1}, \dots, S_{y_{n-1}}\} \subset X \\ Y &:= \{t_{a_1}, \dots, t_{a_{g-1}}, t_b, Y_{\mu, a_1}, B_{r_0}, B_{r_1}, \dots, B_{r_n}, t_{s_{kl}} \mid (1 \leq k < l \leq n)\} \end{aligned}$$

本研究では次を示した .

命題 9 (1) X は π を生成する .

$$(2) \mathcal{PM}(N_{g,n+1})(X') = X$$

(3) 任意の $x \in X', y \in Y$ に対して, $y^{\pm 1}(x)$ は X' が生成する π の部分群に属する .

この命題と命題 3 により, X' は π を生成することが分かる . さらに, 本研究では自然な対応

$$\pi \ni S_\alpha \mapsto \alpha \in \pi_1(N_{g,n}, *) \quad (\forall S_\alpha \in X')$$

が同型写像であることを示した .

以上により, S が向き付け不可能曲面の場合に定理 1 は成り立つ .

4. 定理 2 の証明の概略

$x_{ij} = x_i x_j, z_k = x_g y_k x_g^{-1}$ とおく . 本研究では, $\pi_1^+(N_{g,n}, *)$ について次の有限表示を与えた .

補題 10 $\pi_1^+(N_{g,n}, *)$ は, $n \geq 1$ のとき $x_{12}, \dots, x_{g-1g}, x_{11}, \dots, x_{gg}, y_1, \dots, y_{n-1}, z_1, \dots, z_{n-1}$ で自由に生成される自由群であり, $n = 0$ のとき $x_{12}, \dots, x_{g-1g}, x_{11}, \dots, x_{gg}$ で生成され 2 つの関係式 $x_{11} \cdots x_{gg} = 1, x_{gg} x_{g-1g}^{-1} x_{g-1g-1} x_{g-2g-1}^{-1} \cdots x_{22} x_{12}^{-1} x_{11} x_{12} \cdots x_{g-1g} = 1$ を持つ群である .

集合 X, X', Y を次で定義する .

$$\begin{aligned} X &:= \left\{ S_\alpha \left| \begin{array}{l} \alpha \text{ is a non separating two sided loop whose complement is non orientable,} \\ \text{or a separating loop which bounds the } k\text{-th boundary component} \\ \text{or one crosscap whose complement is non orientable } (1 \leq k \leq n-1). \end{array} \right. \right\} \\ X' &:= \{S_{x_{12}}, \dots, S_{x_{g-1g}}, S_{x_{11}}, \dots, S_{x_{gg}}, S_{y_1}, \dots, S_{y_{n-1}}, S_{z_1}, \dots, S_{z_{n-1}}\} \\ Y &:= \{t_{a_1}, \dots, t_{a_{g-1}}, t_b, Y_{\mu, a_1}, B_{r_0}, B_{r_1}, \dots, B_{r_n}, t_{s_{kl}} \mid (1 \leq k < l \leq n)\} \end{aligned}$$

本研究では次を示した .

命題 11 (1) X は π^+ を生成する .

$$(2) \mathcal{PM}(N_{g,n+1})(X') = X$$

(3) 任意の $x \in X', y \in Y$ に対して, $y^{\pm 1}(x)$ は X' が生成する π^+ の部分群に属する .

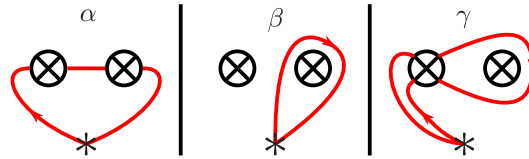
この命題と命題 3 により, X' は π^+ を生成することが分かる . さらに, 本研究では自然な対応

$$\pi^+ \ni S_\alpha \mapsto \alpha \in \pi_1^+(N_{g,n}, *) \quad (\forall S_\alpha \in X')$$

が同型写像であることを示した .

以上により, 定理 2 は成り立つ .

注意 12 定理 2 の関係式 (3) $S_\alpha S_\beta S_\alpha^{-1} = S_{\alpha\beta\alpha^{-1}}$ において, 曲線 α, β, γ は下図に示すものだけに制限できる . 関係式 (3) が関係式 (1), (2) から得られるかどうかは分からない .



参考文献

- [1] Farb, Benson; Margalit, Dan *A primer on mapping class groups*. Princeton Mathematical Series, **49**.
- [2] Putman, Andrew *An infinite presentation of the Torelli group*. Geom. Funct. Anal. **19** (2009), no. 2, 591–643.