

Twisted Iwasawa invariants of knots, a précis

Ryoto Tange and Jun Ueki

ABSTRACT

本稿は 2020 年 12 月に東京女子大学および Zoom で開催された研究集会「結び目の数理論 III」の報告集のために作成されたものです。

Let p be a prime number and m an integer coprime to p . Based on our previous studies, we introduce the twisted Iwasawa invariants λ, μ, ν of $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ -covers of knots with $\mathrm{SL}_N(O)$ -representations over S -integers $O = O_{F,S}$ of number fields. We prove that the set of λ 's determine the genus and the fiberedness of a knot, yielding results on profinite rigidity. Intuitive examples attached are λ 's of the figure-eight knot. In addition, we study μ 's of various SL_2 -representations of twist knot groups to prove $\mu = 0$ theorems for certain classes, as well as to find examples with $\mu > 0$. We attach several remarks and further problems.

Contents

1	Introduction	1
2	Twisted Alexander polynomials and cyclic resultants	2
3	Twisted Iwasawa invariants	3
4	$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ -covers	4
5	λ -invariants, fiberedness and genus	5
6	μ -invariants and twist knots	5
7	Further problems	8
	References	8

1. Introduction

素数と結び目, 代数体と 3 次元多様体の類似性を追究する数論的位相幾何学において, 巡回分岐被覆を扱う岩澤理論と Alexander–Fox 理論の類似性は古典的に重要である [Maz64, Mor12]. 結び目の側には捻じれ Alexander 多項式の理論があるが, 素数の側でも楕円曲線の岩澤理論において表現で捻る理論が発展している.

S^3 内の結び目 K を考える. p を素数, m を p で割り切れない正整数とし, n や r は正整数を走るとする. 補空間 $X = S^3 - K$ の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 被覆 $X_n \rightarrow X$ について, $H_1(X_n)$ のトーシヨンの大きさを Alexander 多項式の巡回終結式 $\mathrm{Res}(\Delta_K(t), t^n - 1)$ によって表す Fox の公式 (cf. [Web79]) や, Mahler 測度による漸近公式 [GAS91] が知られている. また漸近公式の p 進的な類似および精密化として, p 進 height による漸近公式 [Uek20a], また $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ 被覆の p トーシヨンに関する岩澤型公式がある [HMM06, KM08, KM13, Uek17, Uek16, Uek18a]. 著者たちはこれまでに, 対象を結び目群の表現で捻ったものについて, Fox の公式や Mahler 測度による漸近公式の拡張を与えてきた [Tan18, Uek20b]. 本稿では結び目群の表現に付随する「捻じれ岩澤不変量」を導入し, その性質を調べる.

一般に結び目や絡み目の岩澤不変量は, Alexander 多項式から直接計算できる, いわば非常に弱い不変量である. 我々が取り組むのは, **弱い不変量から重要な情報が取り出せるか**, というタイプの問題である. 我々の結果は副有限剛性 [BF20, BR20, Rei18, Liu19, Liu20] の一種と位置づける事ができ, 非常に興味深いと考えられる.

2020 Mathematics Subject Classification Primary 57K10, 11R23; Secondary 57M10, 11S99

Keywords: knot, twisted Alexander polynomial, Iwasawa invariants, genus, fiberedness, profinite rigidity

February 19, 2021 11:44pm

RYOTO TANGE AND JUN UEKI

p 進整数環 $\mathbb{Z}_p = \varprojlim_r \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ を考え、 $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ 被覆の列を $\mathbb{Z}_p$ 被覆と呼ぶ。代数体 F の整数環にいくつかの素元の逆元を付け加えたものである S 整数環 $O = O_{F,S}$ を取る。結び目群の $\mathrm{SL}_N(O)$ 表現 ρ に対し、Fox の公式や Mahler 測度を用いた漸近公式 (Theorem 2.1), また岩澤型公式が成り立つ: ある定数 λ, μ, ν があって、十分大きな任意の r に対し $\|H_i(X_{mp^r}, \rho)_{\mathrm{tor}}\|_p = p^{-(\lambda r + \mu p^r + \nu)}$ である (Theorem 3.1). この λ, μ, ν を、 K の $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ 被覆と ρ の「捻じれ岩澤不変量」と呼ぼう。

数論における岩澤 λ 不変量はリーマン面の種数の類似物であった。実際、リーマン面の分岐被覆に対する Riemann–Hurwitz の公式と、 $\mathbb{Z}_p$ 体の p 冪拡大に対する Kida の公式の類似性が知られている [Kid80, Iwa81, Gra79]. 楕円曲線の場合も Hachimori–Matsuno [HM99] などがある。絡み目の $\mathbb{Z}_p$ 被覆の p 冪被覆に対する Kida の公式も定式化されている [Uek17].

我々は、ある $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ 被覆と ρ の岩澤不変量から捻じれ Alexander 多項式の次数や monic 性が復元できることを示す (Theorems 4.1, 4.5). これには (捻じれ) Alexander 多項式の副有限剛性を調べる際に用いた p 進的な議論 [Uek20a, Uek18b, Uek20b] を流用する。捻じれ Alexander 多項式に関する Friedl–Vidussi の深い結果 [FV11, FV15] を併せれば、捻じれ岩澤 λ 不変量によって、結び目のファイバー性と種数が決定されることが従う (Theorems 4.3, 5.1). これは結び目のファイバー性および種数の副有限剛性を含意する (Theorem 5.2).

数論における岩澤 μ 不変量は Mahler 測度の p 進類似にあたる力学系的な不変量であり、円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大に対する $\mu = 0$ は指導的な予想・定理である (cf. [Iwa73, FW79]). 絡み目の $\mathbb{Z}$ 被覆においては、岩澤 μ 不変量、Alexander 多項式の最高次係数 a_0 , および Alexander 加群へのメリディアン作用に関する Bowen の p 進エントロピー h_p との間にバランス公式が知られている [Uek20a]. 結び目の場合は $\Delta_K(1) = \pm 1$ より明らかに $\mu = 0$ である。

我々は $\mathbb{Z}_p$ 被覆と $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ 被覆の岩澤 μ 不変量の関係性をみる (Theorem 4.4). また、剰余表現 $\bar{\rho} = \rho \bmod p$ について $\Delta_{\bar{\rho},i}(t) \neq 0$ であれば ρ について $\mu = 0$ であることを示す (Theorem 6.1). Friedl–Vidussi [FV13] によれば捻じれ Alexander 多項式が 0 となる有限群値の表現が常に存在するので、この仮定が満たされることは一般に非自明である。我々はツイスト結び目 $J(2, 2n)$ の剰余既約 $\mathrm{SL}_2(O)$ 表現の捻じれ岩澤不変量について $\mu = 0$ が成り立つこと (Theorem 6.6) を計算によって確かめる。また剰余可約な既約表現についても同様の結果 (Theorem 6.7) を得る。

最後に、関連する予想や問題を記す。また文献表の後に、昨年度の報告集記事 (TangeTranUeki) の修正点を付す。

2. Twisted Alexander polynomials and cyclic resultants

結び目群 $\pi = \pi_1(S^3 - K)$ のアーベル化写像 $\alpha : \pi \rightarrow t^{\mathbb{Z}}$ を考える。 t は形式的な生成元である。 $\mathrm{Ker} \alpha$ には $\mathbb{Z}$ 被覆 $X_{\infty} \rightarrow X = S^3 - K$ が対応する。ここでは O を一般に Noether UFD とする。表現 $\rho : \pi \rightarrow \mathrm{SL}_N(O)$ で捻った i -th Alexander 加群 $\mathcal{A}_{\rho,i}$ とは、Shapiro の補題により自然に同型な次の加群たちこのことをいう: $H_i(X, \rho \otimes \alpha) \cong H_i(X_{\infty}, \rho) \cong H_i(\mathrm{Ker} \alpha, \rho) \cong H_i(\pi, \rho \otimes \alpha)$. $\mathcal{A}_{\rho,i}$ は $t^{\mathbb{Z}}$ の共役作用によって有限生成 $\Lambda_O = O[t^{\mathbb{Z}}]$ 加群となる。有限生成 torsion Λ_O 加群であるとき、その initial Fitting イデアルの divisorial hull の生成元を i -th Alexander 多項式といい $\Delta_{\rho,i}(t) \in \Lambda_O$ と書く。(一般に環において、イデアル α を含む単項イデアル全体の交わりを divisorial hull と呼ぶ。環の元の単数倍を除いた等式を $\doteq$ を用いて表す。)

もし O が体であり ρ が SL_2 既約表現であれば、 $\Delta_{\rho,0} \doteq 1$ であり [FKK12, Proposition A], $\Delta_{\rho,1}$ は Reidemeister トーションとしての捻じれ Alexander 多項式 $\tau_{\rho \otimes \alpha}(t)$ と Λ_O の単数倍を除き一致する。一方、もし O が代数体の S 整数環 $O_{F,S}$ であり、剰余表現 $\rho \bmod p$ が既約であれば、 p 上の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し $O_{\mathfrak{p}}$ で O の $\mathfrak{p}$ 進完備化を表せば、 $\Delta_{\rho,0} \doteq 1$, $\Delta_{\rho,1} \doteq \tau_{\rho \otimes \alpha}$ in $\Lambda_{O_{\mathfrak{p}}} = O_{\mathfrak{p}}[t^{\mathbb{Z}}]$ となる [Tan18, Corollary 3].

$O = O_{F,S}$ のとき、 $\bar{S} := \mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}} S$ と書く。多項式 $f(t) \in O[t^{\mathbb{Z}}]$ に対し $\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}} : O[t^{\mathbb{Z}}] \rightarrow \mathbb{Z}_S[t^{\mathbb{Z}}]$;

TWISTED IWASAWA INVARIANTS OF KNOTS

$f(t) \mapsto \prod_{\sigma: F \rightarrow \mathbb{C}} f(t)^\sigma$ という写像を考える. O が PID であるかどうかによらず, $\text{Nr}_{F/\mathbb{Q}} A_{\rho,i}$ の $\mathbb{Z}_S[t^\mathbb{Z}]$ 上の Fitting ideal の生成元は $\text{Nr}_{F/\mathbb{Q}} \Delta_{\rho,i}(t)$ となる. これは [SW09] の言葉でいえば total representation に付随する捻じれ Alexander 多項式である. $(\text{Nr}_{F/\mathbb{Q}} \Delta_{\rho,i}(t)) \cap \mathbb{Z}[t^\mathbb{Z}]$ の生成元 $\bar{\Delta}_{\rho,i} \in \mathbb{Z}[t^\mathbb{Z}]$ を取っておく.

多項式 $f(t) \in O[t^\mathbb{Z}]$ に対し巡回終結式を $\text{Res}(f(t), t^n - 1) = \prod_{\zeta^n=1} f(\zeta)$ によって約束する. これは多項式の係数を並べた行列の行列式によって計算され, 一般に O の元となる. 一般に有限群 G に対し元の個数を $|G|$ と書く. アーベル群 G に対し torsion 部分群を G_{tor} と書く. 整数の p 進ノルムを $|mp^r|_p = p^{-r}$ によって定める. 多項式 $f(t) \in \mathbb{Z}[t^\mathbb{Z}]$ に対し Mahler 測度と p 進 height が, $\log M(f(t)) = \int_{|z|=1} \log |f(z)| \frac{dz}{z}$, $\log M_p(f(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\zeta^n=1} \frac{\log |f(\zeta)|}{n}$ によって定められる. これら

は単位円周上に根がある場合にも適切に解釈することができる. $f(t) = \sum a_i t^i = a_0 \prod (t - \alpha_i)$ と書けば, $M(f(t)) = a_0 \prod_i \max\{1, |\alpha_i|\}$, $M_p(f(t)) = |a_0|_p \prod_i \min\{1, |\alpha_i|_p\} = \min\{|a_i|_p\}_i$ が成り立つ. [Uek20b, Theorem11.1] と同様にして次が言える.

THEOREM 2.1. $\rho : \pi \rightarrow \text{SL}_N(O)$ に対し $A_{\rho,i}$ が有限生成 torsion $\Lambda_O = O[t^\mathbb{Z}]$ 加群であるとき, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 被覆 $X_n \rightarrow S^3 - K$ たちについて,

- (1) Wang 完全列が導く同型 $A_{\rho,i}/(t^n - 1)A_{\rho,i} \xrightarrow{\cong} H_i(X_n, \rho)$ がある.
- (2) $\Psi_n(t) = \gcd(\bar{\Delta}_{\rho,i}(t), r_n = \text{Res}(\bar{\Delta}_{\rho,i}, (t^n - 1)/\Psi_n(t)))$ とおけば

$$|H_i(X_n, \rho)_{\text{tor}}| = c_n |r_n| \prod_{p \in \bar{S}} |r_n|_p,$$

$c_n = |(A_{\rho,i}/\Psi_n(t)A_{\rho,i})_{\text{tor}}|$ が成り立つ. c_n は有界な数列である.

- (3) Mahler 測度 M と p 進 height M_p について, 以下の漸近公式が成り立つ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |H_i(X_n, \rho)|^{\frac{1}{n}} = M(\bar{\Delta}_{\rho,i}(t)), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|H_i(X_n, \rho)\|_p^{\frac{1}{n}} = M_p(\bar{\Delta}_{\rho,i}(t)).$$

3. Twisted Iwasawa invariants

引き続き $O = O_{F,S}$ とし, 素数 p 上の素イデアル $\mathfrak{p}$ を取り, $O_{\mathfrak{p}}$ で $\mathfrak{p}$ 進整数環 $\varprojlim O/\mathfrak{p}^r O$ を表す. $p \in \bar{S}$ のときは p -torsion が自明となるため, 始めから $p \notin \bar{S}$ としておく. $\rho : \pi \rightarrow \text{SL}_N(O)$ に対し $A_{\rho,i}$ が有限生成 torsion 加群であり $\bar{\Delta}_{\rho,i} \in \mathbb{Z}_S[t^\mathbb{Z}]$ が定義されているとする. $\mathbb{Z}$ 被覆の底空間を $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 被覆に取り替えたものの Alexander 多項式は $\prod_{\zeta^m=1} \Delta_{\rho,i}(\zeta t)$ となることに注意する. Theorem 2.1 (1) の同型, また (2) で各 r に対し $(t^{p^r} - 1) \mid (t^{p^{r+1}} - 1)$ であることから $r \gg 0$ に対し $\Psi_{p^r}(t)$ および c_{p^r} が一定となることに注意しておく. [Uek17, Theorem 4.9] と同様の議論により岩澤加群 $A_p := \varprojlim_r H_i(X_{mp^r}, \rho \otimes O_{\mathfrak{p}})$ が有限生成 torsion $\mathbb{Z}_p[[T]]$ 加群となり, その特性多項式は $\prod_{\zeta^m=1} \Delta_{\rho,i}(\zeta(1+T))$ となる. 岩澤同型 $\mathbb{Z}_p[[t^{\mathbb{Z}_p}]] \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_p[[T]]$; $t \mapsto 1+T$ と p 進 Weierstrass 準備定理 [Was97, Theorem 7.3] を用いた岩澤加群の標準的な議論 (cf. [Och14, 定理 2.45, 注意 2.50], [Was97, §13.2, 13.3]) により, 次の岩澤型式を得る.

THEOREM 3.1. $\prod_{\zeta^m=1} \bar{\Delta}_{\rho,i}(\zeta(1+T)) \doteq p^\mu (T^\lambda + p(\text{lower terms}))$ in $\mathbb{Z}_p[[T]]$ を満たす $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}_{>0}$, 及び $\nu \in \mathbb{Z}$ が一意に存在し, 十分大きな任意の r に対し次が成り立つ:

$$\|H_i(X_{mp^r}, \rho)\|_p = p^{-(\lambda r + \mu p^r + \nu)}.$$

この λ, μ, ν を ρ と $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_p$ 被覆の i -th 岩澤不変量と呼ぶ. p や i を動かす際には下付き添字で $\lambda = \lambda_p = \lambda_i = \lambda_{p,i}$ のように表す.

RYOTO TANGE AND JUN UEKI

同じく p 進 Weierstrass 準備定理によって、とくに $\mathrm{SL}_2(O)$ 表現の Reidemeister torsion $\tau_{\rho \otimes \alpha}(t) = \Delta_{\rho,1}(t)/\Delta_{\rho,0}(t)$ に対し $\prod_{\zeta^n=1} \mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}} \tau_{\rho \otimes \alpha}(\zeta(1+T)) \doteq p^{\mu_\tau} (T^{\lambda_\tau} + p(\text{lower terms}))$ in $\mathbb{Z}_p[[T]]$ と書けば、 $\mu_\tau = \mu_1 - \mu_0$, $\lambda_\tau = \lambda_1 - \lambda_0$ が成り立つ。ついでに $\nu_\tau = \nu_1 - \nu_0$ と定め、これらを Reidemeister–Iwasawa invariants と呼ぼう。多くの場合、幾何的な情報を持つのはこれらである。剰余表現 $\rho \bmod p$ が既約であれば $\Delta_{\rho,0}(t) \doteq 1$ より $\mu_\tau = \mu_1$, $\lambda_\tau = \lambda_1$ が成り立つ。

EXAMPLES 3.2. $K = 4_1$ (figure-eight knot) のホロノミー表現の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ への 2 つのリフトを考えると、付随する ($i = 1$ の) 捻じれ Alexander 多項式は $\Delta_\pm(t) = t^2 \pm 4t + 1$ である。 $\Delta_+(1+T) = T^2 + 6T + 6$ は $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\lambda_p = 0$ ($p \neq 2, 3$). $\Delta_-(1+T) = T^2 - 2T + 2$ は $\lambda_2 = 2$, $\lambda_p = 0$ ($p \neq 2$). いずれも p によらず $\mu = 0$. ホロノミー表現のリフトは spin 構造に対応するので、この例では $\mathbb{Z}_p$ 被覆の岩澤 λ 不変量は spin 構造を区別する、とも言える。

4. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ -covers

$\mathbb{Z}$ 被覆の部分被覆として得られる $\mathbb{Z}/mp^r\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ 被覆の列を考えることで得られる、 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 被覆を底空間とする $\mathbb{Z}_p$ 被覆を、本稿では $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ 被覆と呼ぶ。これは $\mathbb{Z}$ 被覆の底空間を $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 被覆に取り替えたものの部分被覆たちからなる無限列である。

THEOREM 4.1. 一般に $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ -cover の岩澤 λ 不変量は $\overline{\Delta}_{\rho,i}(t)$ の次数以下である。また、ある $m_i \in \mathbb{Z}$ が存在し、 $m_i|m$ である m に対し $\lambda = \deg(\overline{\Delta}_{\rho,i}(t))$ が成り立つ。

$\overline{\Delta}_{\rho,i}(t)^m$ ではなく $\overline{\Delta}_{\rho,i}(t)$ の次数が現れるというのが注目すべき点である。 $N = 1$, $\rho = 1$ とすれば $\Delta_{\rho,1}(t) = \Delta_K(t)$ が古典的 Alexander 多項式である。

Proof. $\Delta(t) := \overline{\Delta}_{\rho,i}(t)$ と置く。 p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の完備化を取り $\mathbb{C}_p$ と書く。 $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ を取り $\mathbb{C}$ および $\mathbb{C}_p$ への埋め込みを固定する。 a_0 を割らない各素数 p に対し、 $\Delta(t)$ は monic となり、その根は全て p 進単位円周 $|z|_p = 1$ 上に並ぶ。一般に $|\alpha|_p = 1$ なる各 $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ に対し、 $|\alpha - \zeta|_p < 1$ を満たすような 1 の p 素冪根 $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$ が唯一つ存在する。 $\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}] \rightarrow \mathbb{Z}_p[[t^{\mathbb{Z}_p}]] \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_p[[T]]$ によるイデア $\mathbb{Z}$ 被覆の底空間を $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 被覆に取り替えたものの Alexander 多項式に $\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}}$ を施したものは $\prod_{\zeta^m=1} \Delta(\zeta t)$ となる。以上の事実を併せれば結論を得る。 $\square$

ここで用いた p 進数の基本的な性質は [Uek20a] に整理した。この方法は捻じれ Alexander 多項式の副有限剛性を調べる際に [Uek20b] で用いたものである。

EXAMPLES 4.2. figure-eight knot $K = 4_1$ の $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ 被覆を考える。 $i = 1$ とする。

$m = 1$ のとき、 $\Delta_K(t) = t^2 - 3t + 1$, $\Delta_K(1+T) = T^2 - T - 1 \doteq 1$ in $\mathbb{Z}_p[[T]]$ for any p .

$m = 2$ のとき、 $\prod_{\zeta^2=1} \Delta_K(\zeta t) = (t^2 - 3t + 1)(t^2 + 3t + 1) = (T^2 - T - 1)(T^2 + 5T + 5) \doteq T^2 + 5T + 5$ in $\mathbb{Z}_p[[T]]$. $\lambda_5 = 2$, $\lambda_p = 0$ ($p \neq 5$).

$m = 4$ のとき、 $\prod_{\zeta^4=1} \Delta_K(\zeta t) = (t^2 - 3t + 1)(t^2 + 3t + 1)(t^4 + 7t^2 + 1) = (T^2 - T - 1)(T^2 + 5T + 5)(T^4 + 4T^3 + 13T^2 + 18T + 9) \doteq T^2 + 5T + 5$ in $\mathbb{Z}_p[[T]]$. $\lambda_5 = 2$, $\lambda_p = 0$ ($p \neq 5$).

ファイバー結び目の古典的 Alexander 多項式については、monic であり、また次数は種数の 2 倍に一致することが古典的に知られている。よって次を得る。

THEOREM 4.3. K がファイバー結び目であれば、 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ 被覆の古典 (表現で捻らない, $i = 1$ の) 岩澤 λ 不変量が種数を決定する。

岩澤 μ 不変量については、次が成り立つ。

TWISTED IWASAWA INVARIANTS OF KNOTS

THEOREM 4.4. Theorem 3.1 の状況で, $p^{-\mu} = M_p(\prod_{\zeta^m=1} \bar{\Delta}_{\rho,i}(\zeta t)) = M_p(\bar{\Delta}_{\rho,i}(t))^m$ が成り立つ.

$\mathbb{Z}$ 被覆から得られる $\mathbb{Z}_p$ 被覆の岩澤 μ 不変量を μ' と書けば, $\mu = m\mu'$ が成り立つ. 特に $\mu = 0$ と $\mu' = 0$ は同値である,

Proof. Theorem 2.1 (3) の p 進 height を用いた漸近公式と Theorem 3.1 の比較, $\zeta^m = 1$ なる各 ζ に対し $p^{-\mu} = M_p(\bar{\Delta}_{\rho,i}(t)) = M_p(\bar{\Delta}_{\rho,i}(\zeta t))$ であること, および $\mathbb{Z}$ 被覆の底空間を $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 被覆に取り替えたものの Alexander 多項式が $\prod_{\zeta^m=1} \Delta_K(\zeta t)$ であることによる. $\square$

多項式 $f(t) \in O[t^{\mathbb{Z}}]$ が monic であるとは, 最高次係数が O の単数であることをいう. (注意. 結び目群の SL_2 表現に付随する Reidemeister torsion は単数倍を除かずに決まるため, 最高次係数が 1 であることを monic の定義とする流儀もある.) 多項式の monic 性について次が成り立つ.

THEOREM 4.5. $\Delta_{\rho,i}(t) \in O[t^{\mathbb{Z}}]$ が monic であるかどうかは, m と p を動かせば, μ と λ たちによって決定される.

Proof. $\Delta_{\rho,i}(t)$ の monic 性と $\bar{\Delta}_{\rho,i}(t)$ の monic 性は同値である. 多項式 $\bar{\Delta}_{\rho,i}(t)$ の係数の最大公約数は $\mathbb{Z}_p$ 被覆の μ_p たちについて $g = \prod_p p^{\mu_p}$ である. $\bar{\Delta}_{\rho,i}(t)/g$ の最高次係数を素数 p が割ることと, どんな m をとっても $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ 被覆の λ_p が多項式の次数を与えないことが同値である. $\square$

5. λ -invariants, fiberedness and genus

Friedl–Vidussi の結果によれば, 有限群値の表現に付随する捻じれ Alexander 多項式たちの次数によって結び目のファイバー性および種数 (Thurston norm) が決定される [FV11, FV15]. 有限群は Cayley の定理から対称群に埋め込むことができ, よって $SL_N(\mathbb{C})$ に埋め込めるので, 適切な操作によって我々の状況に帰着できる. 前節の結果を併せることで次を得る.

THEOREM 5.1. ある表現 $\rho: \pi \rightarrow SL_N(O)$ と $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ 被覆に付随する岩澤不変量たちによって, 結び目のファイバー性および種数が決定される.

双曲結び目の情報がホロノミー表現の捻じれ Alexander 多項式によって決定されるという DFJ 予想の観点から, SL_2 表現による決定の精密化が進められている [AD20]. 我々の結果についても, 表現の取り方に関する精密化の余地が多分に残されていると言える.

ファイバー性や種数の決定は多項式の次数による評価が sharp であることに依拠している. 岩澤不変量は明らかに結び目群の副有限不変量であるから, 副有限剛性に関する結果を得る:

THEOREM 5.2. 結び目のファイバー性や種数は, 結び目群の副有限完備化の同型類から定まる.

この結果は, Alexander 多項式が 1 の冪根を根に持たない場合は [BF20] によって与えられた (2015 年に arXiv にて preprint が公開). 一般の場合のファイバー性の副有限剛性は [JZ20] によって与えられた (2017 年に web にて preprint が公開).

6. μ -invariants and twist knots

この節では ρ を $SL_2(O)$ 表現とする. 素数 p 上の素イデアル $\mathfrak{p} \subset O$ を考え, $\mathbb{F} = O/\mathfrak{p}$ とする.

THEOREM 6.1. $\bar{\rho} = \rho \bmod \mathfrak{p}$ が既約かつ $\Delta_{\bar{\rho},1}(t)/\Delta_{\bar{\rho},0}(t) \neq 0$ in $\mathbb{F}[t^{\mathbb{Z}}]$ ならば, $\mu_{p,1} = 0$ である.

$\mu_{p,1} \neq 0$ であるためには, $\bar{\rho}$ が non-acyclic であることが必要である.

Proof. 等式 $\Delta_{\bar{\rho},i}(t) = \Delta_{\rho,i}(t) \bmod \mathfrak{p}$ と $p^{-\mu_p} = M_p(\bar{\Delta}_{\rho,i}(t))^m$ により, $\Delta_{\bar{\rho},i}(t) \neq 0$ in $\mathbb{F}[t^{\mathbb{Z}}]$ ならば $\mu_{p,i} = 0$ である. $\bar{\rho} = \rho \bmod \mathfrak{p}$ が既約ならば $\Delta_{\rho,0}(t) \doteq 1$ より $\mu_{p,0} = 0$ かつ $\mu_{p,\tau} = \mu_{p,1}$ であり, 追加の仮定のもとで $\mu_{p,\tau} = \mu_{p,1} = 0$ である.

RYOTO TANGE AND JUN UEKI

表現が non-acyclic とは、ある i に対し $H_i(\pi, \rho) \neq 0$ であることをいう。non-acyclic 表現の共役類は、指標多様体上で acyclic torsion 関数 $\tau(x, y) = \Delta_{\rho,1}(1)/\Delta_{\rho,0}(1)$ の零点に対応する。 $\mu_{p,1} \neq 0$ であれば $\Delta_{\rho,1}(1) = 0$ in $\mathbb{F}$ だから、 $\bar{\rho}$ は non-acyclic である。 $\square$

以下では、twist 結び目群の表現に付随する岩澤 μ 不変量を調べる。まず twist 結び目の定義と幾つかの性質をまとめる。各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して twist 結び目 $J(2, 2n)$ は以下の図式で定義される。full twist は $n > 0$ のとき右手捻り、 $n < 0$ のとき左手捻りと約束する。



$J(2, 0) = 0_1$ (unknot), $J(2, 2) = 3_1$ (trefoil), $J(2, 4) = 5_2$, $J(2, -2) = 4_1$ (figure-eight knot) である。 $1/2$ -full twist を half twist とすれば $J(2, -2n)$ と $J(2, 2n+1)$ は鏡映の関係になる。

$J(2, 2n)$ の結び目群 $\pi_n := \pi_1(S^3 - J(2, 2n))$ は次の表示を持つ [HS04, Proposition 1]:

$$\pi_n = \langle a, b \mid aw^n = w^n b \rangle, \quad w = [a, b^{-1}] = ab^{-1}a^{-1}b.$$

指標多様体の理論により、 SL_2 表現の共役類は $x := \text{tr } \rho(a)$ と $y := \text{tr } \rho(ab)$ でパラメータ付けられる。 $z = z(x, y) := \text{tr } \rho(w) = 2x^2 - x^2y + y^2 - 2$ も用いる。第2種 Chebyshev 多項式 $\mathcal{S}_n(z) \in \mathbb{Z}[z]$ を $\mathcal{S}_n(2 \cos \theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$ によって定める。(文献によっては添字が一つズレているので注意。)

PROPOSITION 6.2 [Le93, Theorem 3.3.1], [NT16, (1.2), (1.3)], [TTU20, Proposition 3.5]. 既約 $SL_2(\mathbb{C})$ 表現の共役類の全体は、 $f_n(x, y) = (y-1)\mathcal{S}_n(z) - \mathcal{S}_{n-1}(z)$ の零点であって $x^2 - y - 2 \neq 0$ なるものの全体と一対一に対応する。また、 $x^2 - y - 2 = 0$ の各零点には可約表現が対応する。

$\mathbb{C}$ を有限体 $\mathbb{F}$ に取り替えても、絶対既約表現や絶対可約表現について同様である。

PROPOSITION 6.3 [Tra18, Theorem 1]. F を $\mathbb{C}$ または有限体とする。 $x = \text{tr } \rho(a)$, $y = \text{tr } \rho(ab)$ を満たす既約表現 $\rho: \pi \rightarrow SL_2(F)$ に対し $\Delta_{\rho,1}(t)/\Delta_{\rho,0}(t) = a_0(x, y)t^2 + a_1(x, y)t + a_0(x, y)$, $a_0(x, y) = \frac{\mathcal{S}_{n+1}(z) - \mathcal{S}_{n-1}(z) - 2}{z - 2}$, $a_1(x, y) = x(\mathcal{S}_n(z) - a_0(x, y))$. ここに $a_0(x, y), a_1(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ である。

PROPOSITION 6.4 [TTU20, Theorem A, Proposition 3.5]. $\Delta_{\rho,1}(1)/\Delta_{\rho,0}(1) = 2a_0 + a_1 = 0$ かつ $f_n = 0$ かつ $x^2 - y - 2 \neq 0$ は、 $x = y$ かつ $1 - x = \alpha + \alpha^{-1}$ を満たすような 1 の $3n - 1$ 乗根 $\alpha \neq \pm 1$ が存在することと同値である。

次の命題が $\mu = 0$ 定理の証明の鍵となる。

PROPOSITION 6.5. 引き続き $J(2, 2n)$ の群の SL_2 表現を考える。

(1) 体上の既約表現 ρ に対し $\Delta_{\rho,1}(t) = \Delta_{\rho,0}(t) \neq 0$ である。

(2) 体上で、 $f_n(x, y) = 0$ と $x^2 - y - 2 = 0$ の交点の全体は $(\pm\sqrt{4 - \frac{1}{n}}, 2 - \frac{1}{n})$ で与えられる。

Proof. (1) a_0, a_1, f_n の共通零点を考える。 $2a_0 + a_1 = 0$ かつ $f_n = 0$ のもとで、 $a_0 = 0$ かつ $a_1 = 0$ であるための条件は $x\mathcal{S}_n(z) = 0$ である。 Proposition 6.4 のように $1 - x = \alpha + \alpha^{-1}$ とおけば、 $\mathcal{S}_n(z) = \frac{\alpha^{3n} - \alpha^{-3n}}{\alpha^3 - \alpha^{-3}}$ より $\alpha^{6n} = 1$ または α は 1 の原始 6 乗根となる。これは Proposition 6.4 の「 $2a_0 + a_1 = 0$ かつ $f_n = 0$ かつ $x^2 - y - 2 \neq 0$ 」であるための条件 $\alpha^{3n-1} = 1$ かつ $\alpha \neq \pm 1$ と両立しない。よって共通零点は存在せず、 $\Delta_{\rho}(t) \neq 0$ である。

(2) $z - 2 = (y - 2)(x^2 - y - 2) = 0$ より $z = 2$, $f_n(x, y) = (y - 1)\mathcal{S}_n(z) - \mathcal{S}_{n-1}(z) = (y - 1)n - (n - 1) = yn - 2n + 1 = 0$, よって $y = 2 - \frac{1}{n}$, $x = \pm\sqrt{y + 2} = \pm\sqrt{4 - \frac{1}{n}}$ となる。 $\square$

TWISTED IWASAWA INVARIANTS OF KNOTS

twist 結び目 $J(2, 2n)$ の表現に対する我々の $\mu = 0$ 定理は以下の通り:

THEOREM 6.6. $\mathrm{SL}_2(O)$ 表現 ρ について, $\rho \bmod \mathfrak{p}$ が絶対既約ならば $\mu_{p,\tau} = \mu_{p,1} = 0$ である.

Proof. Section 2 で見たように, [FKK12, Proposition A], [Tan18, Corollary 3] によって, 剰余既約な表現 ρ について $\Delta_{\rho,0}(t) \doteq 1$ in $O_{\mathfrak{p}}[t^{\mathbb{Z}}]$ である. Proposition 6.5 (1) により, 既約表現 $\bar{\rho}$ に対し $\Delta_{\bar{\rho},1} \neq 0$ であるから, Theorem 6.1 により, ρ に対し $\mu_{p,\tau} = \mu_{p,1} = 0$ である. $\square$

剰余可約な既約表現には固有の現象が見られ, それ自体が興味深い対象である.

THEOREM 6.7. $p \mid (3n-1)$ のとき, 点 $(\pm 1, -1) \in \mathbb{F}_p^2$ には $f_n = 0$ 上の可約表現が対応する. これらの点のリフトに対応して, $\rho \bmod \mathfrak{p}$ が可約かつ $\rho \otimes \mathbb{C}$ が既約であるような $\mathrm{SL}_2(O)$ 表現 ρ の共役類が無限個存在する. このような ρ についても $\mu_{p,\tau} = \mu_{p,0} = \mu_{p,1} = 0$ が成り立つ.

Proof. Proposition 6.5 および [TTU20, Proposition 1.5] から, $(x, y) = (\pm 1, -1)$ のとき, $z(x, y) = 2$, $\mathcal{S}_n(z) = n$ より $f_n(x, y) = -3n + 1$. また $\tau_{\rho(x,y) \otimes \alpha}(1) = \tau_n(x, y) = a_0 + 2a_1 = (2-x)n^2 + xn$ より $\tau_n(1, -1) = n^2 + n$, $\tau_n(-1, -1) = -3n^2 + n$ in $\mathbb{F}_p$. さらに $x^2 - y - 2 = 0$ である. よって $p \mid (3n-1)$ のもとで, 点 $(-1, -1) \in \mathbb{F}_p^2$ には可約かつ non-acyclic な $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ 表現 $\bar{\rho}$ が対応する. また $p = 2$ かつ n が奇数のとき点 $(1, -1) \in \mathbb{F}_p^2$ について同様である. これより $\bar{\rho}$ のリフトは $\mu > 0$ なる例の候補を与える. 一方, Proof of Proposition 6.5 (1) により $a_0 = a_1 = 0$ なる条件は $x\mathcal{S}_n(z) = \pm n = 0$ だが, これは $p \mid (3n-1)$ に反する. よって $\Delta_{\bar{\rho},1}(t)/\Delta_{\bar{\rho},0}(t) \neq 0$ in $\mathbb{F}[t^{\mathbb{Z}}]$ である.

p 上の素イデアル $\mathfrak{p} \subset O$ に対し, $\mathbb{F} = O/\mathfrak{p}$ における像が点 $(\pm 1, -1)$ であるような点 $(\xi, \eta) \in O^2$ を, 点 $(\pm 1, -1)$ の O^2 へのリフトという. このようなリフトは O を適切に取り替えれば無数にある. 例えば, 各 $k \in \mathbb{Z}$ に対し $\eta = pk - 1$ と置き, $f_n(x, \eta)$ の根 $x = \xi$ の全体を最小分解体 F の中で取れば良い. Proposition 6.2 および 6.5 (2) より, 高々 2 つの点を除き, 対応する ρ は $\rho \otimes \mathbb{C}$ が既約表現であり, $\Delta_{\rho,1}(t) \neq 0$ である. 必要に応じて 2 次拡大および表現の共役を取れば $\bar{\rho} = \rho \bmod \mathfrak{p}$ となることから, $\Delta_{\rho,i}(t) \bmod \mathfrak{p} = \Delta_{\bar{\rho},i}(t)$ である. $\Delta_{\bar{\rho},1}(t)/\Delta_{\bar{\rho},0}(t) \neq 0$ より, $\mu_{p,\tau} = 0$ を得る. また直接計算から 1 の原始 3 乗根 ζ_3 に対し $(\Delta_{\rho,0}(t)) = (t - \zeta_3, 5) = 1$ in $\mathbb{F}_p[t^{\mathbb{Z}}]$ ゆえ $\mu_{p,0} = 0$, よって $\mu_{p,1} = 0$ を得る. $\square$

REMARK 6.8. 点 $(-1, -1) \in \mathbb{F}^2$ は f_n の特異点である. 実際, [TTU20, Subsec. 1.6, 3.2] の計算

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(\xi, \xi) = \frac{2(n\xi^2 - 2n\xi - 1)}{(\xi + 1)\xi(\xi - 2)(\xi - 3)}, \quad \frac{\partial f_n}{\partial y}(\xi, \xi) = \frac{2((2n-1)\xi^2 + (-4n+2)\xi + 1)}{(\xi + 1)\xi(\xi - 2)(\xi - 3)}$$

at $\xi \neq -1, 0, 2, 3$ およびロピタルの定理により, $\frac{\partial f_n}{\partial x}(-1, -1) = \frac{\partial f_n}{\partial y}(-1, -1) = 0$ in $\mathbb{F}$ である. よって上の議論において ξ を得る際に Hensel の補題は適用できない.

REMARK 6.9. Friedl–Vidussi の研究 [FV13] によれば, 任意の結び目に対し有限群に値を持つ表現 ρ であって $\Delta_{\rho}(t) = 0$ となるものが存在する. しかし, 絶対既約な $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F})$ 表現 $\bar{\rho}$ であって $\Delta_{\bar{\rho},1} = 0$ となるものが存在するかどうかは, おそらくまだ知られていない.

捻じれ Alexander 多項式を指標多様体上の関数と見れば, 多項式の係数が指標多様体の連続関数となる. 例えば twist 結び目であれば $\mu \neq 0$ となる表現は, $f_n(x, y)$, $a_0(x, y)$, $a_1(x, y)$ という 3 つの 2 変数多項式関数の $\bmod \mathfrak{p}$ での共通零点に対応している必要があった. 同様の事情で, 結び目群のほとんどの表現に対して $\mu = 0$ が期待できそうだが, 少なくとも現時点で, 各結び目について $\mu \neq 0$ なる表現の存在は一般に非自明である.

Proposition 6.3 では, 種数 1 の 2 橋結び目に対する一般的な結果 [Tra18, Theorem 1] を, twist 結び目に限った形で引用した. 原典は $\mathbb{C}$ 上の主張だが, $\mathbb{Z}$ 係数で議論ができ, 有限体上でも成り立つ. 剰余既約な SL_2 表現が $\mu \neq 0$ であるためには剰余表現が non-acyclic であることが必要だが, non-acyclic 表現を体系的に見つける研究は少ない. twist 結び目の場合 [Bén20, TTU20] に続き, 他の結び目に対する研究が Tran によって進められている.

RYOTO TANGE AND JUN UEKI

7. Further problems

捻じれ Alexander 多項式に関する様々な予想や問題が、捻じれ岩澤不変量の問題に読み替えられる。

CONJECTURE 7.1. 2つの結び目 J, K の群の間に全射準同型 $\varphi : \pi_J \twoheadrightarrow \pi_K$ があるならば、種数の大小関係 $g(J) \geq g(K)$ がある。

結び目群の全射準同型に関する研究は沢山ある (cf. [KSW05, ORS08]). 全射準同型 $\pi_J \xrightarrow{\varphi} \pi_K \xrightarrow{\rho} \mathrm{SL}_2(O)$ があれば $\Delta_{J, \rho \circ \varphi}(t) \mid \Delta_{K, \rho}(t)$ となるので、岩澤 λ 不変量について $\lambda_J \mid \lambda_K$ となる。 $g(K)$ を決定する ρ であつて $\rho \circ \varphi$ が $g(J)$ を決定するようなものが存在するかが問題となる。 [FV11, FV15] の議論を我々の観点から読み込むことで、この予想にアプローチできるのではないか。

CONJECTURE 7.2 [DFJ12]. 双曲結び目 K のホロノミー表現に付随する捻じれ Alexander 多項式 T_K の次数 d と結び目の種数 $g(K)$ について $d = 4g(K) - 2$ が成り立つ。

一般にホロノミー表現の岩澤不変量はどのような情報を持っているのだろうか (cf. Example 3.2). 対称表現との合成の極限によって双曲体積が得られるが [God17, BDHP19], Kionke–Loeh の p 進単体体積 [KL20] と岩澤不変量が絡んで来るのではないか。

QUESTION 7.3 (Yi Liu). Weeks 多様体などの arithmetic 多様体の場合に, cocompact でない表現にも研究対象を拡張できるのではないか。

Acknowledgments

研究集会「結び目の数理 III」の組織委員の先生方に感謝申し上げます。 We would like to express our gratitude to Takashi Hara, Teruhisa Kadokami, Takahiro Kitayama, Yi Liu, Yasushi Mizusawa, Tatsuya Ohshita, Makoto Sakuma for useful comments. The second author has been partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP19K14538.

REFERENCES

- AD20 Ian Agol and Nathan M. Dunfield, *Certifying the thurston norm via $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ -twisted homology*, pp. 1–20, Princeton University Press, 2020.
- BDHP19 Léo Bénard, Jérôme Dubois, Michael Heusener, and Joan Porti, *Asymptotics of twisted alexander polynomials and hyperbolic volumes*, preprint, arXiv:1912.12946, December 2019.
- Bén20 Léo Bénard, *Torsion function on character varieties*, to appear in Osaka J. Math. arXiv:1711.08781v2, 2020.
- BF20 Michel Boileau and Stefan Friedl, *The profinite completion of 3-manifold groups, fiberedness and the thurston norm*, pp. 21–44, Princeton University Press, 2020.
- BR20 Martin R. Bridson and Alan W. Reid, *Profinite rigidity, fibering, and the figure-eight knot*, pp. 45–64, Princeton University Press, 2020.
- DFJ12 Nathan M. Dunfield, Stefan Friedl, and Nicholas Jackson, *Twisted Alexander polynomials of hyperbolic knots*, Exp. Math. **21** (2012), no. 4, 329–352. MR 3004250
- FKK12 Stefan Friedl, Taehee Kim, and Takahiro Kitayama, *Poincaré duality and degrees of twisted Alexander polynomials*, Indiana Univ. Math. J. **61** (2012), no. 1, 147–192. MR 3029395
- FV11 Stefan Friedl and Stefano Vidussi, *Twisted Alexander polynomials detect fibered 3-manifolds*, Ann. of Math. (2) **173** (2011), no. 3, 1587–1643. MR 2800721
- FV13 ———, *A vanishing theorem for twisted Alexander polynomials with applications to symplectic 4-manifolds*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **15** (2013), no. 6, 2027–2041. MR 3120739
- FV15 ———, *The Thurston norm and twisted Alexander polynomials*, J. Reine Angew. Math. **707** (2015), 87–102. MR 3403454

TWISTED IWASAWA INVARIANTS OF KNOTS

- FW79 Bruce Ferrero and Lawrence C. Washington, *The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields*, Ann. of Math. (2) **109** (1979), no. 2, 377–395. MR 528968 (81a:12005)
- GAS91 Francisco González-Acuña and Hamish Short, *Cyclic branched coverings of knots and homology spheres*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **4** (1991), no. 1, 97–120. MR 1142552 (93g:57004)
- God17 Hiroshi Goda, *Twisted Alexander invariants and hyperbolic volume*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **93** (2017), no. 7, 61–66. MR 3685596
- Gra79 Georges Gras, *Sur les invariants “lambda” d’Iwasawa des corps abéliens*, Number theory, 1978–1979, Publ. Math. Fac. Sci. Besançon, Univ. Franche-Comté, Besançon, 1979, pp. Exp. No. 5, 37. MR 747996 (85i:11093)
- HM99 Yoshitaka Hachimori and Kazuo Matsuno, *An analogue of Kida’s formula for the Selmer groups of elliptic curves*, J. Algebraic Geom. **8** (1999), no. 3, 581–601. MR 1689359
- HMM06 Jonathan Hillman, Daniel Matei, and Masanori Morishita, *Pro- p link groups and p -homology groups*, Primes and knots, Contemp. Math., vol. 416, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, pp. 121–136. MR 2276139 (2008m:57010)
- HS04 Jim Hoste and Patrick D. Shanahan, *A formula for the A -polynomial of twist knots*, J. Knot Theory Ramifications **13** (2004), no. 2, 193–209. MR 2047468
- Iwa73 Kenkichi Iwasawa, *On the μ -invariants of $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions*, Number theory, algebraic geometry and commutative algebra, in honor of Yasuo Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, 1973, pp. 1–11. MR 0357371 (50 #9839)
- Iwa81 ———, *Riemann-Hurwitz formula and p -adic Galois representations for number fields*, Tôhoku Math. J. (2) **33** (1981), no. 2, 263–288. MR 624610 (83b:12003)
- JZ20 Andrei Jaikin-Zapirain, *Recognition of being fibered for compact 3-manifolds*, Geom. Topol. **24** (2020), no. 1, 409–420. MR 4080486
- Kid80 Yûji Kida, *l -extensions of CM-fields and cyclotomic invariants*, J. Number Theory **12** (1980), no. 4, 519–528. MR 599821 (82c:12006)
- KL20 Steffen Kionke and Clara Loeh, *A note on p -adic simplicial volumes*, preprint. arXiv:2003.10756, March 2020.
- KM08 Teruhisa Kadokami and Yasushi Mizusawa, *Iwasawa type formula for covers of a link in a rational homology sphere*, J. Knot Theory Ramifications **17** (2008), no. 10, 1199–1221. MR 2460171 (2009g:57023)
- KM13 ———, *On the Iwasawa invariants of a link in the 3-sphere*, Kyushu J. Math. **67** (2013), no. 1, 215–226. MR 3089003
- KSW05 Teruaki Kitano, Masaaki Suzuki, and Masaaki Wada, *Twisted Alexander polynomials and surjectivity of a group homomorphism*, Algebr. Geom. Topol. **5** (2005), 1315–1324. MR 2171811
- Le93 Thang (Ty Kuok Tkhang) Le, *Varieties of representations and their subvarieties of cohomology jumps for knot groups*, Mat. Sb. **184** (1993), no. 2, 57–82. MR 1214944 (94a:57016)
- Liu19 Yi Liu, *Mapping classes are almost determined by their finite quotient actions*, arXiv:1906.03602, 6 2019.
- Liu20 ———, *Finite-volume hyperbolic 3-manifolds are almost determined by their finite quotient groups*, preprint. arXiv:2011.09412, November 2020.
- Maz64 Barry Mazur, *Remarks on the Alexander polynomial*, http://www.math.harvard.edu/~mazur/papers/alexander_polynomial.pdf, 1963–64.
- Mor12 Masanori Morishita, *Knots and primes*, Universitext, Springer, London, 2012, An introduction to arithmetic topology. MR 2905431
- NT16 Fumikazu Nagasato and Anh T. Tran, *Some families of minimal elements for a partial ordering on prime knots*, Osaka J. Math. **53** (2016), no. 4, 1029–1045. MR 3554855
- Och14 Tadashi Ochiai, *Iwasawa theory and its perspective I*, Iwanami Sutudies in Advanced Mathematics, Iwanami shoten, Tokyo, (in Japanese), 2014.

TWISTED IWASAWA INVARIANTS OF KNOTS

- ORS08 Tomotada Ohtsuki, Robert Riley, and Makoto Sakuma, *Epimorphisms between 2-bridge link groups*, The Zieschang Gedenkschrift, Geom. Topol. Monogr., vol. 14, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2008, pp. 417–450. MR 2484712
- Rei18 Alan W. Reid, *Profinite rigidity*, Proc. Int. Cong. of Math. Rio de Janeiro **1** (2018), 1191–1214.
- SW09 Daniel S. Silver and Susan G. Williams, *Dynamics of twisted Alexander invariants*, Topology Appl. **156** (2009), no. 17, 2795–2811. MR 2556037
- Tan18 Ryoto Tange, *Fox formulas for twisted Alexander invariants associated to representations of knot groups over rings of S -integers*, J. Knot Theory Ramifications **27** (2018), no. 5, 1850033, 15. MR 3795397
- Tra18 Anh T. Tran, *Twisted Alexander polynomials of genus one two-bridge knots*, Kodai Math. J. **41** (2018), no. 1, 86–97. MR 3777388
- TTU20 Ryoto Tange, Anh T. Tran, and Jun Ueki, *Non-acyclic SL_2 -representations of twist knots, -3 -dehn surgeries, and L -functions*, 2020, to appear in Int. Math. Res. Not. IMRN. arXiv:2005.13246.
- Uek16 Jun Ueki, *On the Iwasawa μ -invariants of branched $\mathbf{Z}_p$ -covers*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **92** (2016), no. 6, 67–72. MR 3508576
- Uek17 ———, *On the Iwasawa invariants for links and Kida’s formula*, Internat. J. Math. **28** (2017), no. 6, 1750035, 30. MR 3663789
- Uek18a ———, *On the Iwasawa invariants of branched $\mathbf{Z}_p$ -covers, a survey*, Algebraic number theory and related topics 2015, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B72, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2018, pp. 331–342. MR 3970429
- Uek18b ———, *The profinite completions of knot groups determine the Alexander polynomials*, Algebr. Geom. Topol. **18** (2018), no. 5, 3013–3030. MR 3848406
- Uek20a ———, *p -adic Mahler measure and $\mathbf{Z}$ -covers of links*, Ergodic Theory Dynam. Systems **40** (2020), no. 1, 272–288. MR 4038035
- Uek20b ———, *Profinite rigidity for twisted Alexander polynomials*, J. Reine Angew. Math. (2020), 000010151520200014, 22 pages, first published online.
- Was97 Lawrence C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 83, Springer-Verlag, New York, 1997. MR 1421575 (97h:11130)
- Web79 Claude Weber, *Sur une formule de R. H. Fox concernant l’homologie des revêtements cycliques*, Enseign. Math. (2) **25** (1979), no. 3–4, 261–272 (1980). MR 570312 (81d:57011)

補遺: 昨年度の「結び目の数理 II」報告集の修正点

5 頁目の下方にある 2 階微分 $\frac{d^2 y_f}{dx^2}, \frac{d^2 y_\tau}{dx^2}$ の記述に誤りがあった。正しい結果については、差が

$$\frac{d^2}{dx^2}(y_f - y_\tau)|_{x=\alpha} = \frac{-(3n-1)^2(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)(\alpha-3)}{(n\alpha^2 - 2n\alpha - 1)^3}.$$

という美しい形になり、1 の $3n-1$ 乗根や局所体論との深い関係が示唆される [TTU20].

Ryoto Tange rtange.math@gmail.com

Department of Mathematics, School of Education, Waseda University, 1-104, Totsuka-cho, Shinjuku-ku, 169-8050, Tokyo, Japan

Jun Ueki uekijun46@gmail.com (corresponding author, comments are welcome!)

Department of Mathematics, School of System Design and Technology, Tokyo Denki University, 5 Senju Asahi-cho, Adachi-ku, 120-8551, Tokyo, Japan